

Eksamenssett i TTK4105

16/5-01
29/7-02
15/5-03
15/8-03
24/5-05
9/8-05
8/6-06
4/6-07
25/5-09
28/5-10
9/6-11
19/5-12
30/5-13
22/5-14
30/5-15
23/5-16
10/6-17
31/5-18
9/8-18
13/5-19

Formelsamlinga fra 2019-eksamen er lagt ved bakerst, og den vil bli nærmest identisk i år. Merk ellers at Rouths kriterium — brukt i noen tidligere eksamener — ikke lenger er pensum, mens Skogestads SIMC-metode er kommet inn.



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1045, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamen i fagene SIE3005 og 43021 regulerings-teknikk

onsdag 16. mai 2001
Tid: 0900 - 1500

Sensur vil foreligge seinest torsdag 7. juni

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Studenthjerne med fullt minne tillatt.

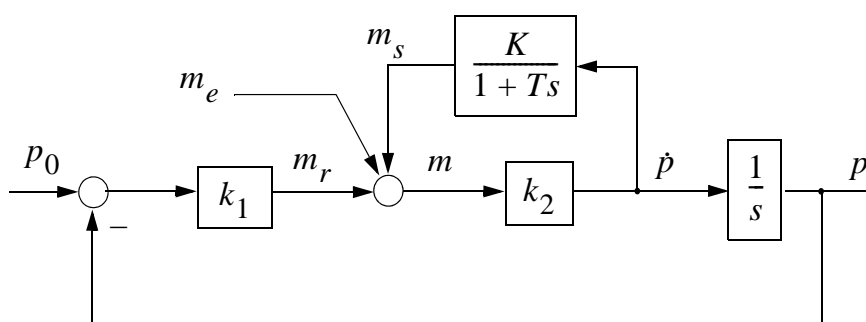
Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (36 %) (NB: Du trenger ikke kunne noe økonomi for å løse denne oppgaven)



figur 1.1

Figur 1.1 viser en modell for den kortsiktige dynamikk (timer, dager) i et idealisert aksjemarked. De som handler aksjer oppviser to typer oppførsel: "Realøkonomisk" (dvs. de handler på grunnlag av en oppfatning av hva de tror aksjen "egentlig" er verdt, her gitt ved en konstant pris p_0), eller "spekulativ" (dvs. de handler på grunnlag av endrings hastighet \dot{p} i prisen). Overskuddsetterspørsel etter aksjer er gitt ved m [antall aksjer]. m er negativ når flere aksjer tilbys enn ønskes kjøpt. Vi har

$$m = m_r + m_s + m_e, \quad (1.1)$$

hvor indeks "r" betyr "realøkonomisk", "s" betyr "spekulativ". Indeks "e" for "ekstern" indikerer en ekstra etterspørsel som påvirker systemet. Det henvises til figur 1.1.

Parametre i modellen er koeffisientene $k_1, k_2 > 0$, forsterkning K og tidskonstant T .
Sett inntil videre $p_0 = 0$, da vi først bare skal studere virkninga av den eksterne etterspørsel m_e .

a) (7 %) Systemet kan uttrykkes som en tilstandsrommodell, $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.

$$\text{Velg } \begin{bmatrix} p \\ m_s \end{bmatrix}. \quad \text{Vis at da er } A = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_2 \\ -\frac{K k_1 k_2}{T} & -\frac{1}{T}(1 - K k_2) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Velg $u = m_e$ og $y = p$. Finn b og c^T .

b) (7 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s) = \frac{p}{m_e}(s)$ ved hjelp av tilstandsrommodellen.

c) (6 %) Finn den samme transferfunksjonen ved å redusere blokkdiagrammet.

d) (6 %) Vis at $h(s)$ har udempet resonansfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{T}}, \quad \text{og relativ dempningsfaktor } \zeta = \frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K}{2\sqrt{k_1 k_2 T}} \quad (1.3)$$

Kommentér ut fra ζ virkninga av økt K på systemet – er den rimelig ut fra de to typer oppførsel som modellen bygger på?

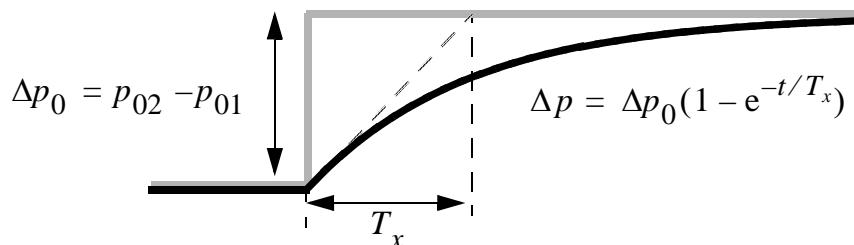
e) (5 %) For et visst variasjonsområde $K_1 < K < K_2$ er polene komplekse konjugerte og systemet stabilt. Finn K_1 og K_2 . Skissér polenes forflytning (dvs. *rotkurven*) når K varierer i dette området. (Tips: Kurven blir veeeeldig ;-) enkel.)

f) (5 %) Sett nå $m_e = 0$. Figur 1.2 viser et prisforløp når aksjens “realøkonomiske verdi” p_0 endrer seg som et sprang fra p_{01} til p_{02} (det kan f.eks. tenkes at det kunngjøres at bedriften har utviklet et nytt attraktivt produkt).

I dette underpunktet er forsterkninga K gitt en verdi som man fort kan bestemme ved betraktning av sprangresponsen i figur 1.2 og modellen i figur 1.1:

Hva er K – hva med omfanget av spekulativ oppførsel?

Finn også den T_x som er angitt i figur 1.2 !



figur 1.2

Oppgave 2 (31 %)

En modell av kurs-dynamikken til en supertanker er

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(\beta x_2 - \gamma x_2^3 + Ku) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Her er

x_1, x_2 = henholdsvis kursvinkel [rad], og kursvinkelhastighet (dreiehastighet) [rad/s]

J = supertankerens treghetsmoment m.h.p. vertikal-aksen. [kg m²]

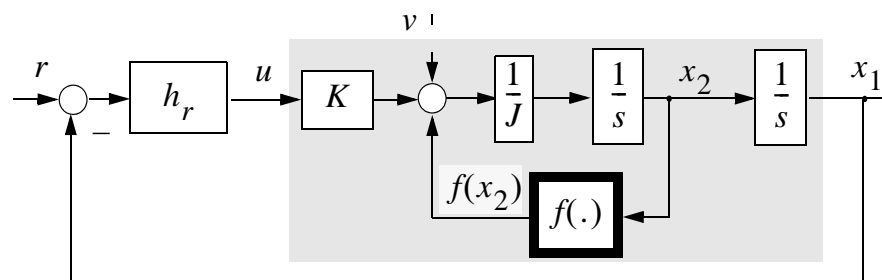
u, K = henholdsvis rorvinkel [rad], og *rorkonstant* [Nm / rad]

Koeffisientene β og γ er begge > 0 .

- a) (6 %) Finn en linearisert modell $\Delta \dot{x} = A\Delta x + \underline{b}\Delta u$ rundt et arbeidspunkt x^p, u^p .
- b) (6 %) Finn egenverdiene til den lineariserte modell. Kommentér stabiliteten for lave dreiehastigheter. Hvordan er stabiliteten ved *store* dreiehastigheter?

Et blokkdiagram for modellen (2.1) (skravert felt), nå med regulering, er vist i figur 2.1:

figur 2.1 Skip med regulering



Her er $f(x_2) = \beta x_2 - \gamma x_2^3$. Vi betrakter små avvik fra en kursvinkel-referanse $r = 0$, og forutsetter lav dreiehastighet, $x_2 \approx 0$. Sløyfetransferfunksjonen h_0 for den lineariserte skipsmodell blir

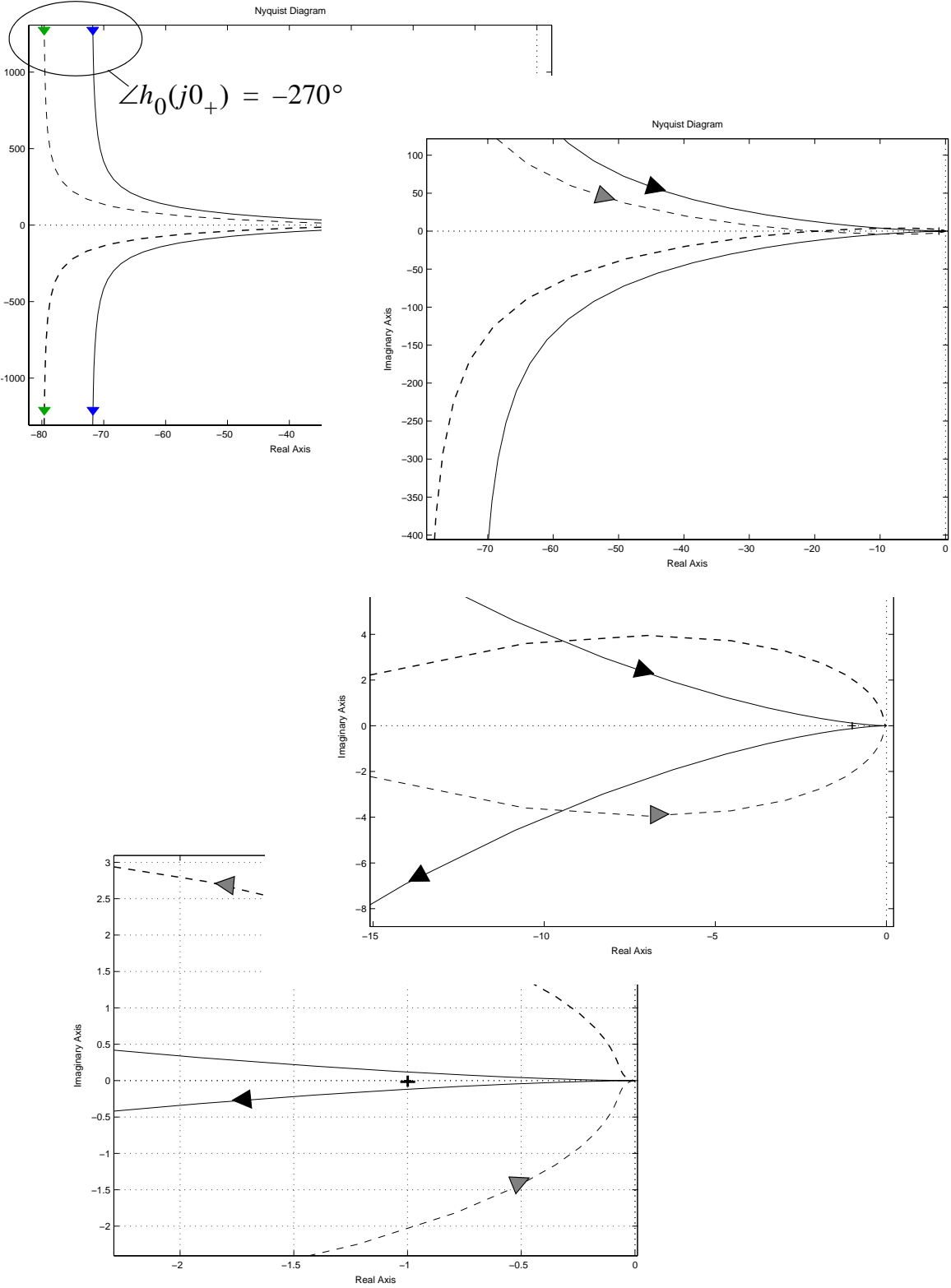
$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = h_r(s) \cdot \frac{K}{\beta} \frac{1}{s(-1 + Ts)}, \text{ der } T = \frac{J}{\beta} \quad (2.2)$$

- c) (5 %) Nyquist(polar-)diagrammet for h_0 for et gitt sett med systemparametre er vist i figur 2.2 på neste side, i fire forskjellige skalaer: Heltrukket linje er h_0 med P-regulator. Hva kan du si om systemets stabilitet med P-regulator? Begrunn svaret ut fra diagrammet!
- d) (7 %) Det stipla Nyquist-diagrammet er h_0 med en annen regulator. Er systemet stabilt med denne regulatoren? Begrunn svaret! Er denne regulatoren en PI- eller en begrenset PD-regulator? Begrunnet svar! (Tips: Se formelsamling med regulatorer. Du kan så se av Nyquist-diagrammet hvilken det må være.)

(Tips til punktene c) og d): Den uendelig store halvsirkelen som utgjør en del av begge de to Nyquistkurvene går for dette systemet inn i *venstre* halvplan, ikke høyre).

- e) (7 %) Det kommer nå inn en forstyrrelse v som vist med stipla linje i figur 2.1. v er et enhetssprang. Finn det stasjonære avvik med regulatoren du valgte i d), ved hjelp av sluttverditeoremet!

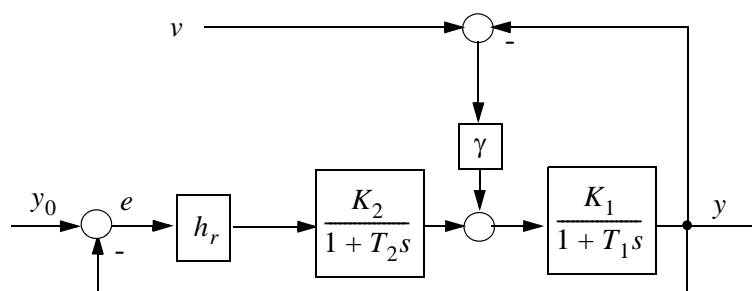
(NB: Om du valgte feil i d), vil du likevel få kreditert rett svar på dette spørsmålet.)



figur 2.2 Polardiagram for h_0 med to forskjellige regulatorer, i fire forskjellige skalaer

Oppgave 3 (9 %)

Strukturen i figur 3.1 er et reguleringsystem for oppvarming i en bygning.



figur 3.1

Fag nr.: SIE3005 og 43021

Dato: 16. mai 2001

Student nr.:

Sidenr.:

Bygningens dynamikk har tidskonstant T_1 , mens ovnene har tidskonstant T_2 . Innetemperatur er y , utetemperatur er v , som måles og skal brukes i en foroverkopling. Varmeovergangstallet mellom bygning og omgivelser er γ .

- (5 %) Tegn inn en foroverkopling fra forstyrrelsen i blokkdiagrammet. Du kan tegne på dette arket og levere det, hvis du foretrekker det. Finn den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$.
- (4 %) Finn med utgangspunkt i $h_{fi}(s)$ den statiske foroverkopling K_f . Hva oppnår du med den?

Oppgave 4 (24 %)

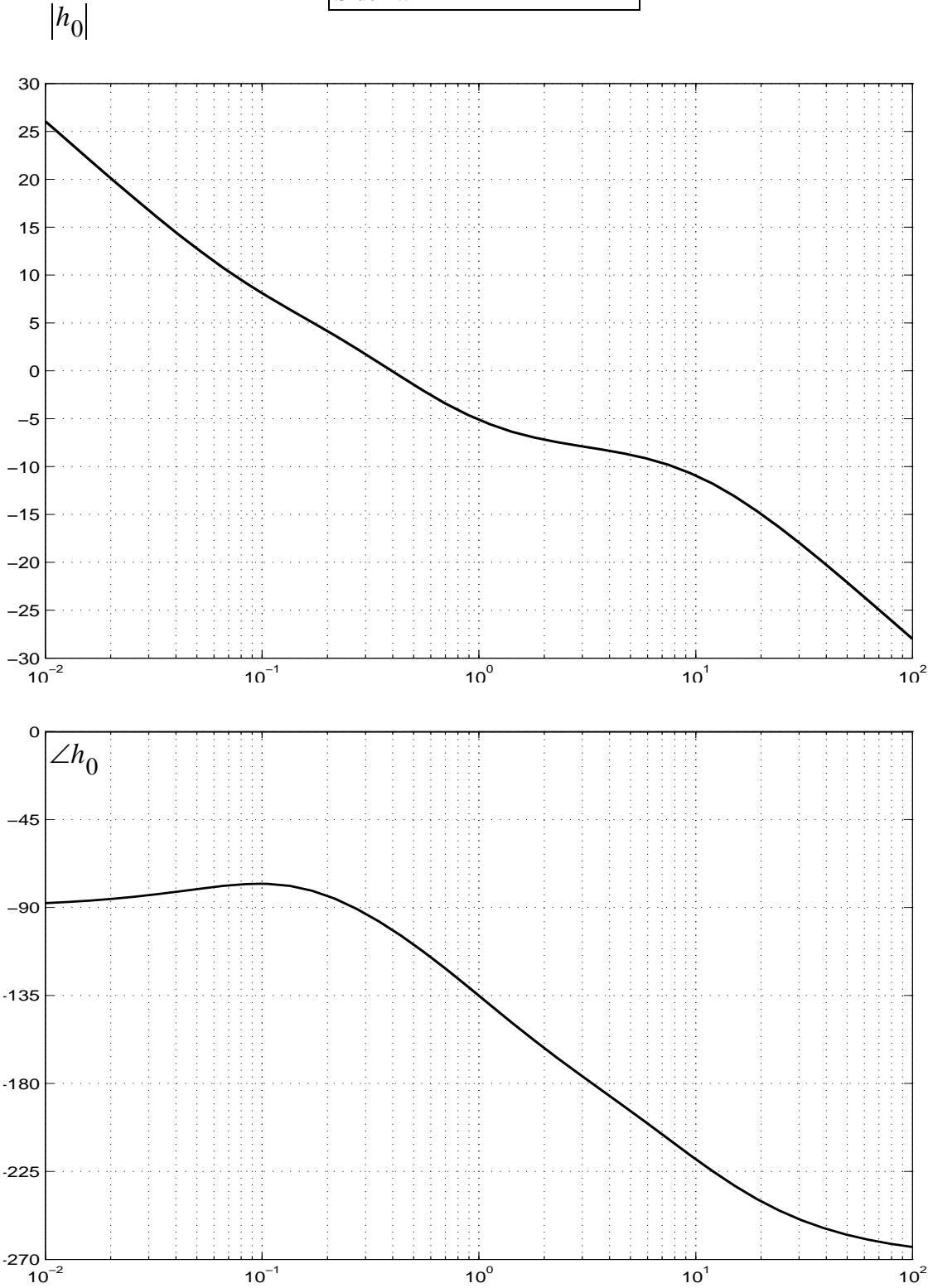
Gitt en prosess med PI-regulator, slik at

$$h_0 = h_r h_u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \cdot K \frac{1 - T_2 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)}, \text{ der } K = 2, T_1 = 5, T_2 = 1, T_3 = 0.1 \quad (4.1)$$

Vi velger $T_i = 10$ og tegner Bode-diagram med $K_p = 1$. Se figur 4.1.

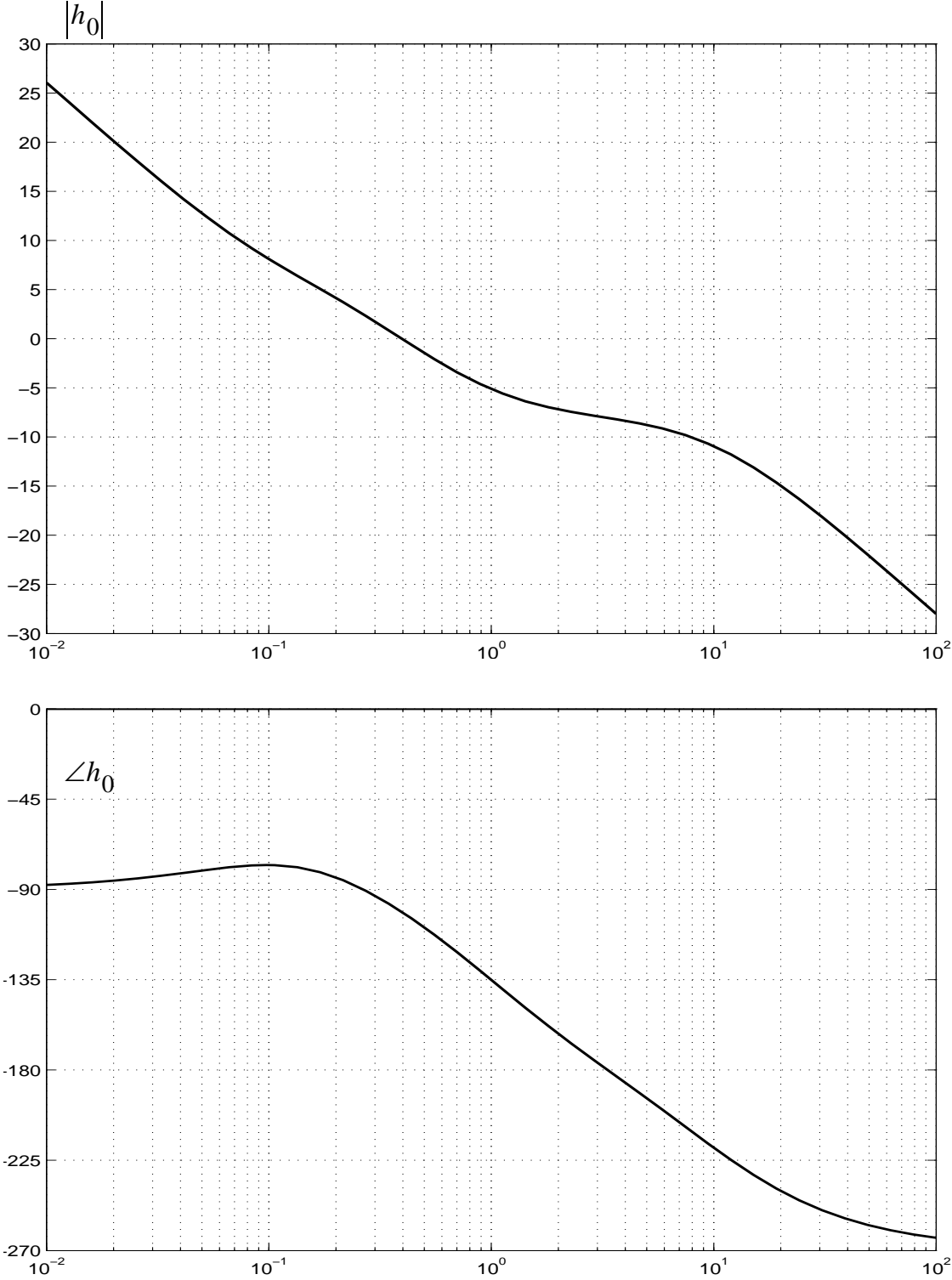
- (9 %) Tegn asymptotene for $|h_0|$ og $\angle h_0$ i figur 4.1, og lever den påtegnede figur som en del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du finner asymptotene, det er ikke nok å "tilpasse dem" til de gitte kurver. Spesielt må du angi hvordan du fastla 0-dB-linja.
- (6 %) Finn fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK for de valgte verdier av T_i og K_p . Ut fra resultatet: Er K_p passe stor? Og hva med valget som ble gjort av T_i : Bør T_i justeres?
- (4 %) Tegn inn asymptoter for $|N(j\omega)|$ og $|M(j\omega)|$ i figur 4.1. (I den grad noen linjer kommer oppå andre, bruk farger, eller stiplet linje, eller legg ny linje litt på sida av den allerede inntegnede linja.)
- (5 %) PI-regulatoren skal nå byttes ut med en *diskret* PI-regulator, fortsatt med de gitte verdier på T_i og K_p . Dette svarer tilnærmet til å introdusere en tidsforsinkelse i reguleringsløyfa lik $0.5T$, der T er tastetida. Du velger $T = 0.1$. Hva blir endringa i fasemarginen?

Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:



figur 4.1

Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:



figur 4.2 (samme som 4.1, hvis du trenger et ekstra ark)

Løsning eksamen i SIE 3005/43021 regulerings-teknikk
16/5 - 2001, T.A.

1a) Sett $x_1 = p$ og $x_2 = m_s$, Vi får fra blokdiagrammet:

$$\dot{x}_1 = k_2 [k_1 (p_0 - x_1) + x_2 + u]$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T} x_2 + \frac{K}{T} k_2 [k_1 (p_0 - x_1) + x_2 + u]$$

Sett $p_0 = 0$, og får da:

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_2 \\ -\frac{K k_1 k_2}{T} & -\frac{1}{T} (1 - K k_2) \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} k_2 \\ \frac{K}{T} k_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = [1 \quad 0]$$

⚠ NB!

$$a) \quad h(s) = \frac{P}{M_2}(s) = \frac{h_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + k_1 h_1 \frac{1}{s}} = \frac{h_1}{s + k_1 h_1}$$

$$\text{der } h_1 = \frac{k_2}{1 - k_2 \frac{K}{1+Ts}} = \frac{k_2 (1+Ts)}{1+Ts - k_2 K}$$

Sett h_1 inn i h :

$$h(s) = \frac{k_2 (1+Ts)}{1+Ts - k_2 K} = \frac{k_2 (1+Ts)}{s(1+Ts - k_2 K) + k_1 k_2 + k_1 k_2 T s} = \frac{k_2 (1+Ts)}{T s^2 + (1 + k_1 k_2 T - k_2 K) s + k_1 k_2}$$

b) Alternativt - å bruke tilstandsrommodellen: Vi har

$$h(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}$$

$$\text{Søker først } (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

- 2 -

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s + k_1 k_2 & -k_2 \\ \frac{k_1 k_2}{T} & s + \frac{1}{T}(1 - K k_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(s + k_1 k_2)(s + \frac{1}{T}(1 - K k_2) + \frac{k_1 K k_2}{T})} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T}(1 - K k_2) & k_2 \\ -\frac{k_1 k_2}{T} & s + k_1 k_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + (k_1 k_2 + \frac{1}{T}(1 - K k_2))s + \frac{k_1 k_2}{T}} \begin{bmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \Rightarrow h(s) &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{k_2}{\frac{k_1 k_2}{T}} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{q(s)} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{k_2}{\frac{k_1 k_2}{T}} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ &= \frac{k_2 s + \frac{1}{T}(1 - K k_2) k_2 + \frac{k_1 k_2}{T}}{q(s)} = \frac{k_2 (s + \frac{1}{T})}{s^2 + (k_1 k_2 + \frac{1}{T}(1 - K k_2))s + \frac{k_1 k_2}{T}} \end{aligned}$$

Det samme med $h(s)$ funnet fra blokdiagram!

d)

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{k_2}{T} \frac{1 + Ts}{s^2 + \frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K}{T} s + \frac{k_1 k_2}{T}} = \frac{k_2}{T} \frac{1 + Ts}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \Rightarrow \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k_1 k_2}{T}}, \quad \xi = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K}{T} \right) = \frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K}{2\sqrt{k_1 k_2 T}} \end{aligned}$$

Når K er stor, dominerer spekulativ oppførsel: Akførene følger hverandre, og den positive tilbakekoplingsløypen motvirkes ikke tilstrekkelig av den negative og stabiliserende tilbakekoplingsløypen som styldes realøkonomiske motivert handel.

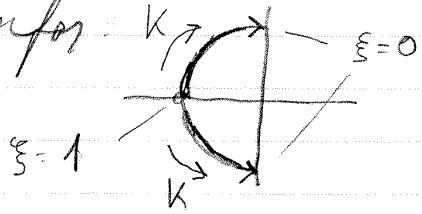
e) Polene er kompleks konjugerte og systemet er stabilt for $0 < \xi < 1$. Vi definerer K_2 slik at $K=K_2$ gir $\xi=0$, og K_1 slik at $K=K_1$ gir $\xi=1$.

$$\text{Dette gir } 1+k_1k_2T-k_2K_2=0 \Rightarrow K_2 = \frac{1+k_1k_2T}{k_2}$$

$$\text{og } \frac{1+k_1k_2T-k_2K_1}{2\sqrt{k_1k_2T}} = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{k_2} (1+k_1k_2T - 2\sqrt{k_1k_2T})$$

Siden ω_0 fra (1.3) er uavhengig av K , må de komplekskonjugerte polene ligge i konstant avstand fra origo.

Rootkurven blir derfor en sirkelbue:



f) Dette er ^{sprang}responsen til et system av typen $\frac{1}{1+T_x s}$. Av figur 1.1

ser vi at dette bare kan innebære for $K=0$, dvs. ingen spekulativ oppførsel. Vi ser også at da er

$$T_x = \frac{1}{k_1 k_2}$$

$$2a) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J}(\beta - 3\gamma(x_2^P)^2) \end{bmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_P = \begin{bmatrix} 0 \\ K/J \end{bmatrix}$$

Vi ser at det er bare x_2^P som inngår. Det er fordi resten av modellen er lineær.

$$b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J}(\beta - 3\gamma(x_2^P)^2) \end{bmatrix}, \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{J}(\beta - 3\gamma(x_2^P)^2) \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{J}(\beta - 3\gamma(x_2^P)^2) \end{cases}$$

Kurstdynamikken er ustabil for x_2^P liten, da blir $\lambda_2 = \underline{\underline{\beta/J}}$

For x_2^P stor, derimot, dominerer leddet $-3\gamma(x_2^P)^2$. Dermed blir $\lambda_2 = \frac{1}{J}(\beta - 3\gamma(x_2^P)^2)$ negativ og skipet blir kurs-stabilt.

c) Vi har $N_p = 1 \Leftrightarrow$ en pol i h.v.p. for det åpne system. (V.8) gir oss da kravet om

2π omdreining (i positiv dreieretning). Siden den uendelig store havisvinkelen går inn i v.h.p., ser vi at den heltrukne kurve for h_0 alltid dreier seg -2π om $(-1,0) \Rightarrow$ ustabil for alle K_p

d) Den stiplete løkka til høyre gir oss en omdreining rundt $(-1,0) \Rightarrow$ nå er systemet stabilt.

Av figuren ser vi at $h(j0) = -270^\circ$. Av (2.2) ser vi at $h_u(j0) = -270^\circ$. Dermed kan ikke h_r gi noe fasebidrag til h_0 for $\omega = 0$. Altså kan ikke h_r inneholde noen ren integrasjon. Da gjenstår en bsp. PD-regulator, som ikke gir noe fasebidrag ved $\omega = 0$.

Oppgave 4 a)

Se neste side

b) $\Delta K \approx 8 \text{ dB}$ og $\psi \approx 79^\circ$, se neste side. Dette er litt rimelige marginer, K_p kunne vært litt litt, f.eks. med 2 dB.

c) Se neste side

d) $|h_o|$ blir uforandret $\Rightarrow \omega_c$ forblir den samme. $\psi = \angle h_o(j\omega_c) + 180^\circ$

Endringa i fasemargin blir da like endringa i $\angle h_o(j\omega_c)$. Vi har

$$\angle \tilde{h}_o(j\omega_c) = \angle h_o(j\omega_c) + \angle e^{-j\omega_c \frac{T}{2}}$$

$$\angle e^{-j\omega_c \frac{T}{2}} = -\omega_c \frac{T}{2} = -0.4 \cdot 0.05 = -0.02 \text{ [rad]}$$

↑
fra Bode-
diagram
neste side

$$= -0.02 \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{-1.15^\circ}}$$

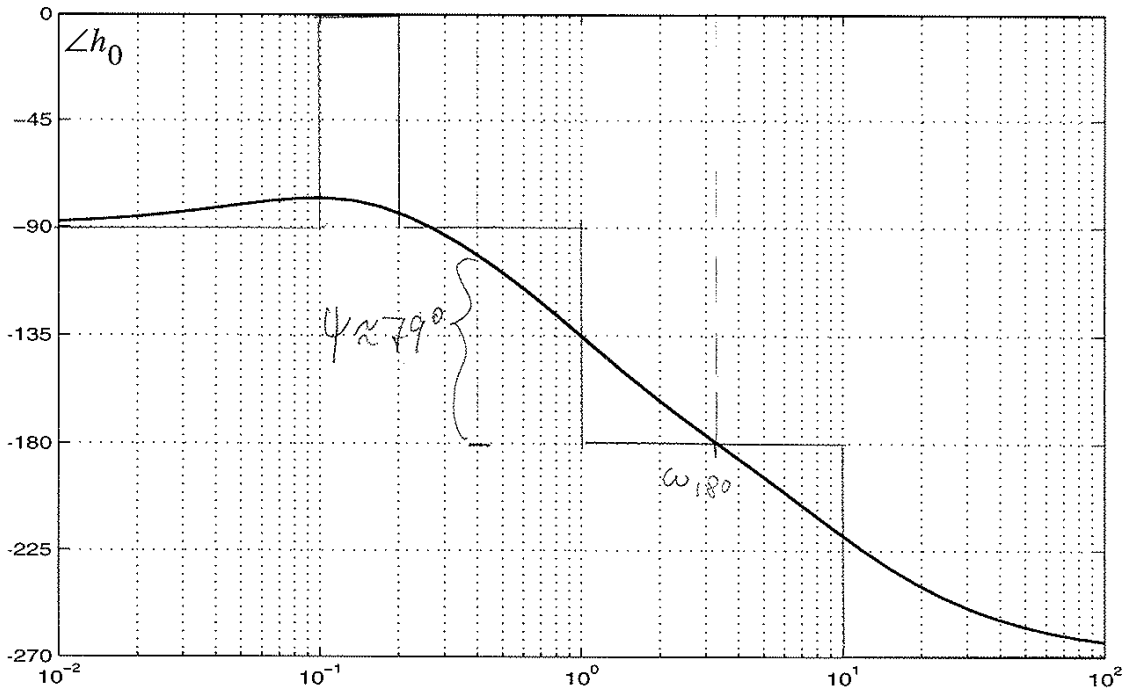
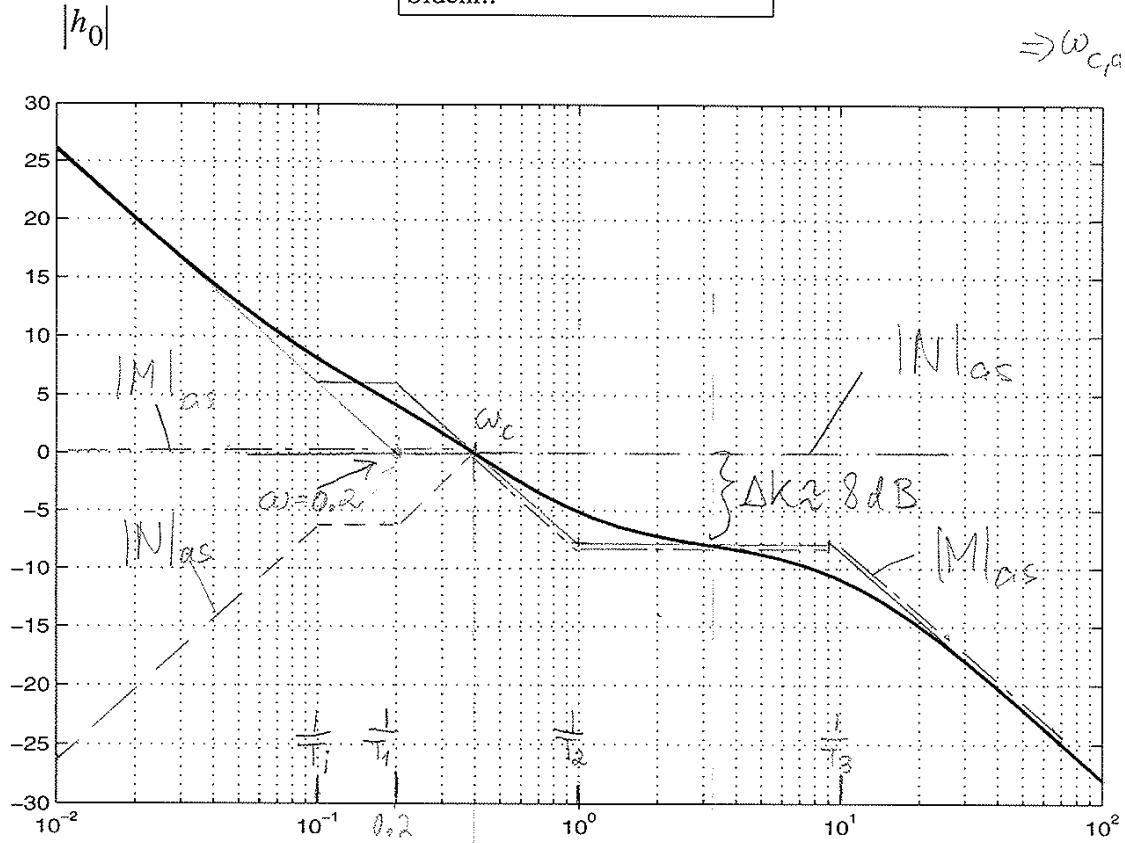
b) T_i kunne vært minsket, Dette ville økt krysnsfrekvensen uten at fasemarginen hadde blitt uakseptabelt lav.

den unødvendig store

Fag nr.: SIE3005 og 43021
 Dato: 16. mai 2001
 Student nr.:
 Sidenr.:

$$|h_p(j\omega)|_{GS, \omega \ll 1} = \frac{2}{10\omega}$$

$$\Rightarrow \omega_{c, GS, \omega \ll 1} = 0.2$$



figur 4.1



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamen i SIE3005 reguleringsteknikk

mandag 29. juli 2002

Tid: 0900 - 1500

NB: Midtsemesterprøven teller ikke med – så dette er en "100%-eksamen"!

Sensur vil foreligge seinest 9. august.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner** – sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan eller skal man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

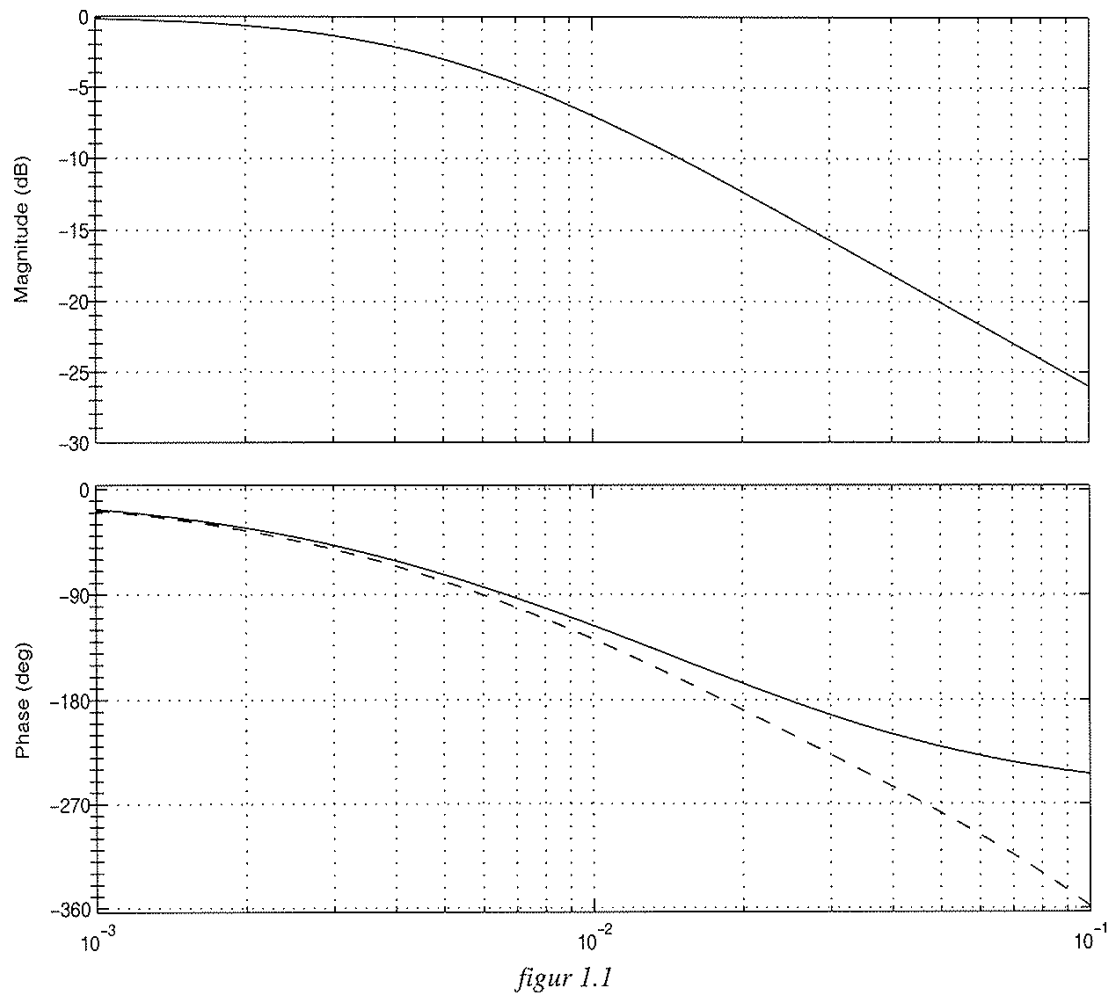
STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (45 %)

En prosess har transferfunksjonen
$$h(s) = \frac{1 - 50s}{10000s^2 + 250s + 1} \quad (1.1)$$

Bodediagram er vist i figur 1.1. *Se bort fra den stiplede grafen helt til du kommer til deloppgave h).*

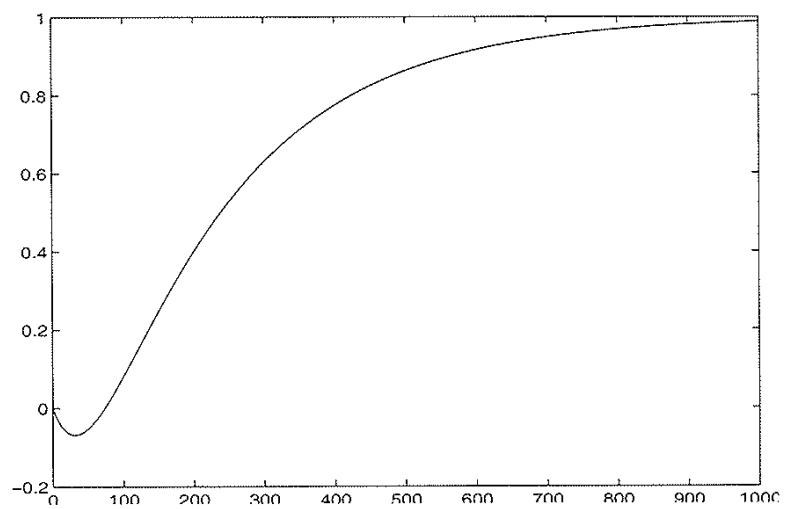
- (10 %) Finn, og tegn inn asymptoter for amplitude- og faseforløp i figur 1.1. Det skal framgå tydelig ved påtegning av opplysninger på arket eller i øvrig tekst *hvordan* du fastlegger asymptotene, det er ikke nok å tegne inn noen linjer "som passer bra" til de oppgitte forløp. Er prosessen av minimum-fase type? Begrunn svaret!
- (5 %) Figur 1.2 viser enhetsprangresponsen til prosessen. Forklar kort ut fra transferfunksjonen tidsforløpet like etter start, og tidsforløpet for stor t . Beregn, og tegn inn, tangenten til tidsforløpet i $t = 0$. (Tips: Begynnelsesverditeoremet)
- (4 %) Anta at prosessen skal reguleres med P-regulator (seriekompensasjon). I utgangspunktet velger man $K_p = 2$ (= 6 dB). Tegn inn 0-dB-linja for $h_0(s) = K_p h(s)$ i figur 1.1. Finn så forsterkningsmargin ΔK og fasemargin ψ for $K_p = 2$.
Ta arket med figurene 1.1 og 1.2 ut av oppgavesettet og legg ved besvarelsen.
- (4 %) Anta at du øker forsterkninga til systemet er akkurat på stabilitetsgrensa. Hva blir frekvensen (rad/sek) på de stående svingningene vi da får? (Tips: Kan finnes v.h.a. Bode-diagrammet). Finn det lukkede systems poler ved hjelp av denne frekvensen.



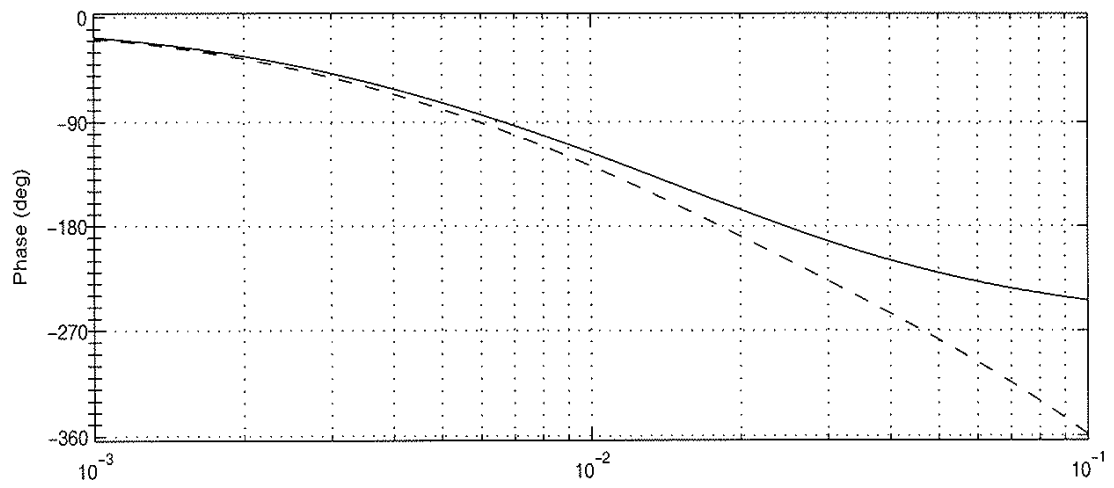
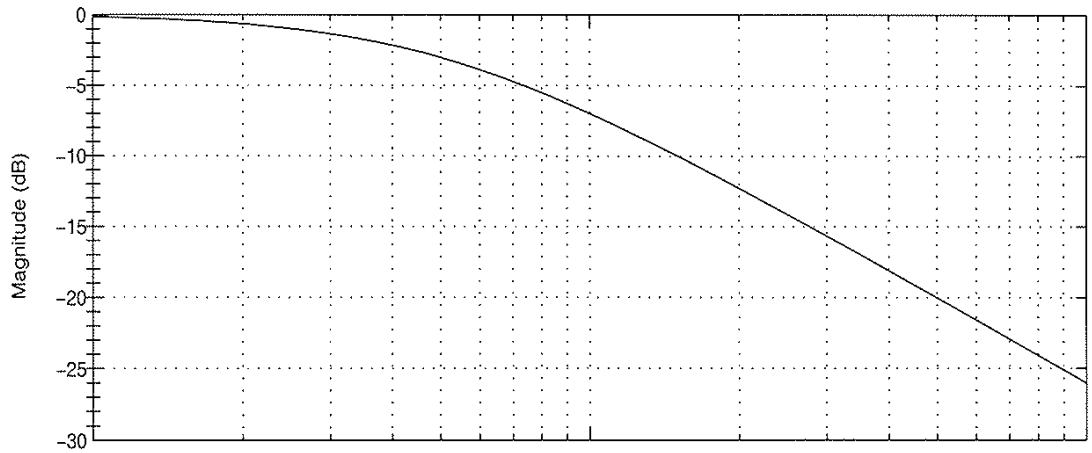
figur 1.1

Fag nr.: SIE3005
Dato: 29. juli 2002
Student nr.:
Side nr.:

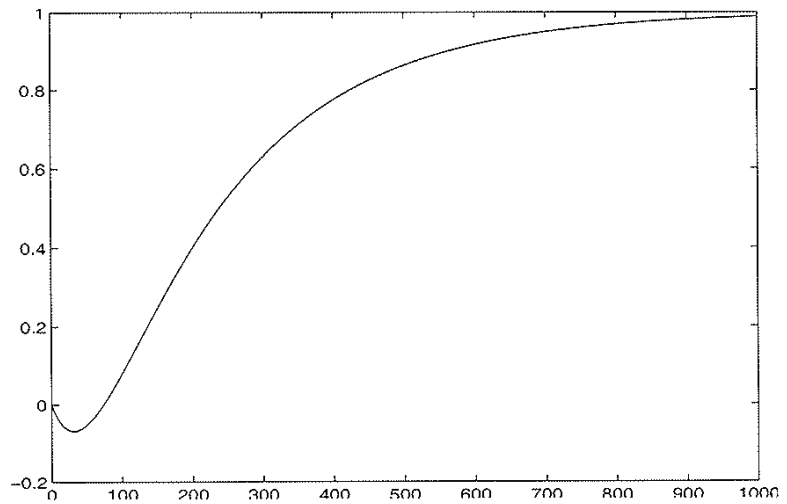
figur 1.2



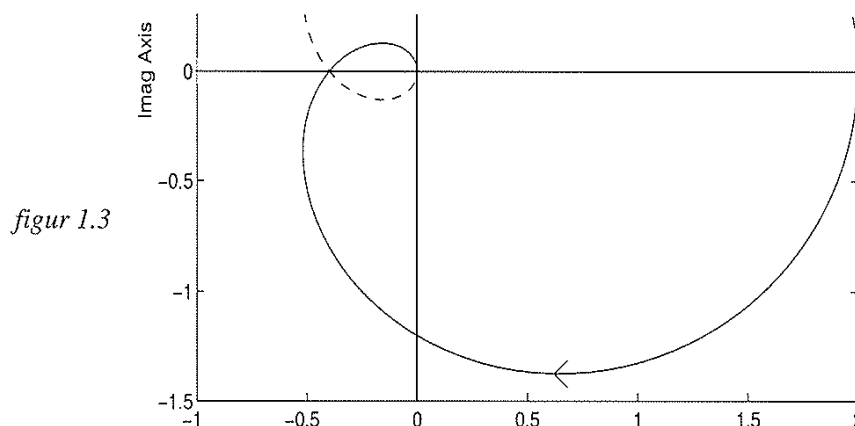
(Ekstra ark hvis du trenger det:)



Fag nr.: SIE3005
 Dato: 29. juli 2002
 Student nr.:
 Side nr.:



Fag nr.: SIE3005
 Dato: 29. juli 2002
 Student nr.:
 Side nr.:



figur 1.3

e) (3 %) Figur 1.3 viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for prosessen med $K_p = 2$. Tegn i figuren slik at det framgår hvordan du finner forsterknings- og fasemargin v.h.a. dette diagrammet. Du trenger ikke lese av ΔK og ψ , men du kan hvis du vil, sjekke resultatene mot de du fant under punkt (c).

Ta arket med figur 1.3 ut av oppgavesettet og legg ved besvarelsen.

f) (5 %) Fra nå av skal vi i stedet anvende en PI-regulator på prosessen. Bruk Ziegler-Nichols' regler (se tabell 1.1 under) til å finne K_p og T_i .

(Tips: T_k i tabellen er lengden av en svingeperiode i den stående svingningen.)

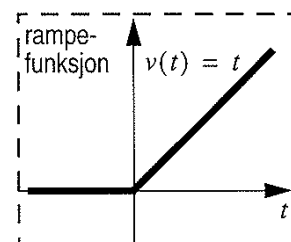
Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

Tabell 1.1

g) (7 %) En forstyrrelse $v(t)$ som er en rampefunksjon, påvirker vårt system, som vist i figur 1.4. Referansen antas konstant = 0. Vis at forstyrrelsen fører til et stasjonært avvik

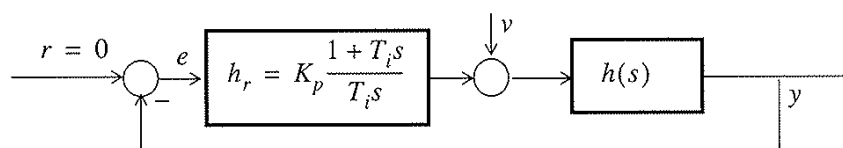
$$e(t = \infty) = -T_i/K_p$$

(Tips: En rampefunksjon er integralet av et enhetssprang).



Hva blir det stasjonære avviket hvis forstyrrelsen i stedet er et enhetssprang? (Dette kan besvares kort og verbalt).

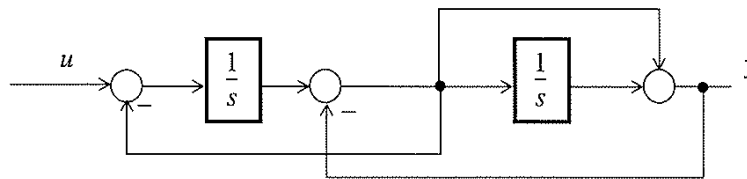
figur 1.4



- h) (4 %) Betrakt fra nå av den stiplede grafen i bodediagrammet i figur 1.1. Den uttrykker at transferfunksjonen $h(s)$ (likning (1.1)) nå er modifisert med en tidsforsinkelse i serie med den. Finn denne tidsforsinkelsen ved hjelp av Bodediagrammet (Tips: Den er et rundt tall!).
- i) (3 %) Denne tidsforsinkelsen inngår ikke i den fysiske prosessen, vi har bare forutsatt den som et hjelpemiddel fordi regulatoren skal realiseres som en *diskret* regulator. Hva er da tastetida ("samplingstida") T ? Er den valgt passe stor? Begrunn svaret!

Oppgave 2 (7 %)

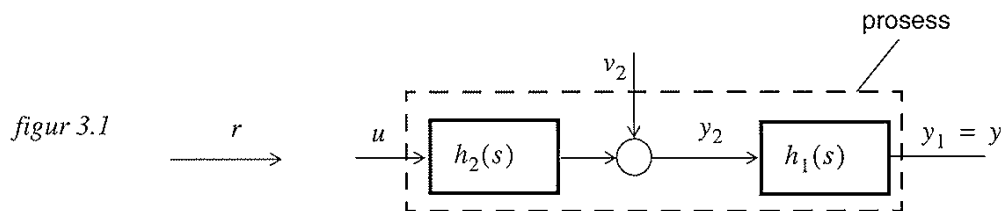
Du skal redusere blokkdiagrammet i figur 2.1, det vil si å finne transferfunksjonen fra u til y .



figur 2.1

Oppgave 3 (12 %)

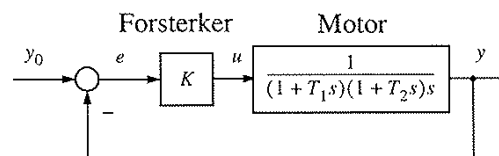
En prosess kan deles opp i to delsystemer i serie slik som vist i figur 3.1. En forstyrrelse angriper ved inngangen til det høyre delsystemet. Man velger kompensasjon ved intern tilbakekopling (kaskadereguleringssystem) for prosessen. Referansen som y skal følge, er r .



- a) (6 %) Kall regulatorene for h_{r1} og h_{r2} , og tegn blokkdiagram for prosessen med kompensasjon ved intern tilbakekopling.
- b) (6 %) Forklar (verbalt er tilstrekkelig) hvorfor reguleringsegenskapene - både når det gjelder å undertrykke forstyrrelsen og når det gjelder å følge referansen - kan gjøres bedre med bruk av kompensasjon ved intern tilbakekopling, sammenliknet med bruk av vanlig seriekompensasjon.

Oppgave 4 (9 %)

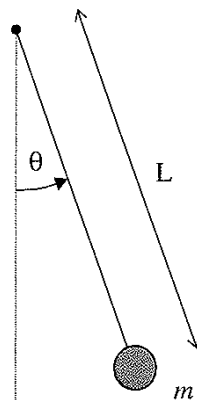
Figuren til høyre viser et følgereguleringsystem (for vinkelposisjon) med en likestrømsmotor og proporsjonalregulator K . Finn, ved hjelp av Rouths kriterium, for hvilke verdier av K det lukkede system er stabilt!



Oppgave 5 (27 %)

Gitt en pendel bestående av ei stang med lengde L og en masse m (se figur 5.1). Stangas masse kan ignoreres. Pendelen er opphengt i et punkt med friksjon, som gir et bremsende dreiemoment som er proporsjonalt med pendelens vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Dempekonstanten er D [Nm / (rad/s)].

figur 5.1



- a) (6 %) Vis at ei differensialligning for vinkelposisjonen θ er

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta} \quad (5.1)$$

Ligninga (5.1) er ulineær. Hvorfor?

- b) (4 %) Sett $x_1(t) = \theta(t)$, definér en passende $x_2(t)$, og formulér (5.1) som et sett av to første ordens differensialligninger, på formen (= tilstandsrommodell):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

Fra nå av betrakter vi bare små vinkelutslag rundt likevektspunktet $\theta = 0$:

- c) (4 %) Linearisér systemet rundt likevektspunktet, dvs. du skal vise at matrisa A i tilnærminga

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A \Delta \mathbf{x}, \text{ blir } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

- d) (8 %) Det oppgis at vinkelposisjonen ved $t = 0$ er $\theta_0 = 0$, og at pendelen da har hastigheten v_0 [m/s] langs sirkelbuen. Man kan da bruke dette, pluss Laplacetransformasjon og (5.3) til å finne $\theta(t)$. Det forlanges ikke her at du finner $\theta(t)$, men at du stopper et trinn før dette resultatet, dvs. du skal finne $\theta(s)$.

(Tips: Som et mellomresultat må du finne matrisa $(sI - A)^{-1}$).

- e) (5 %) Finn udempet resonansfrekvens ω_0 og relativ dempningsfaktor ζ for pendelen.

Løsningsforslag SIE 3005 Reguleringssteknikk 29/7-2002

OPPGAVE 1

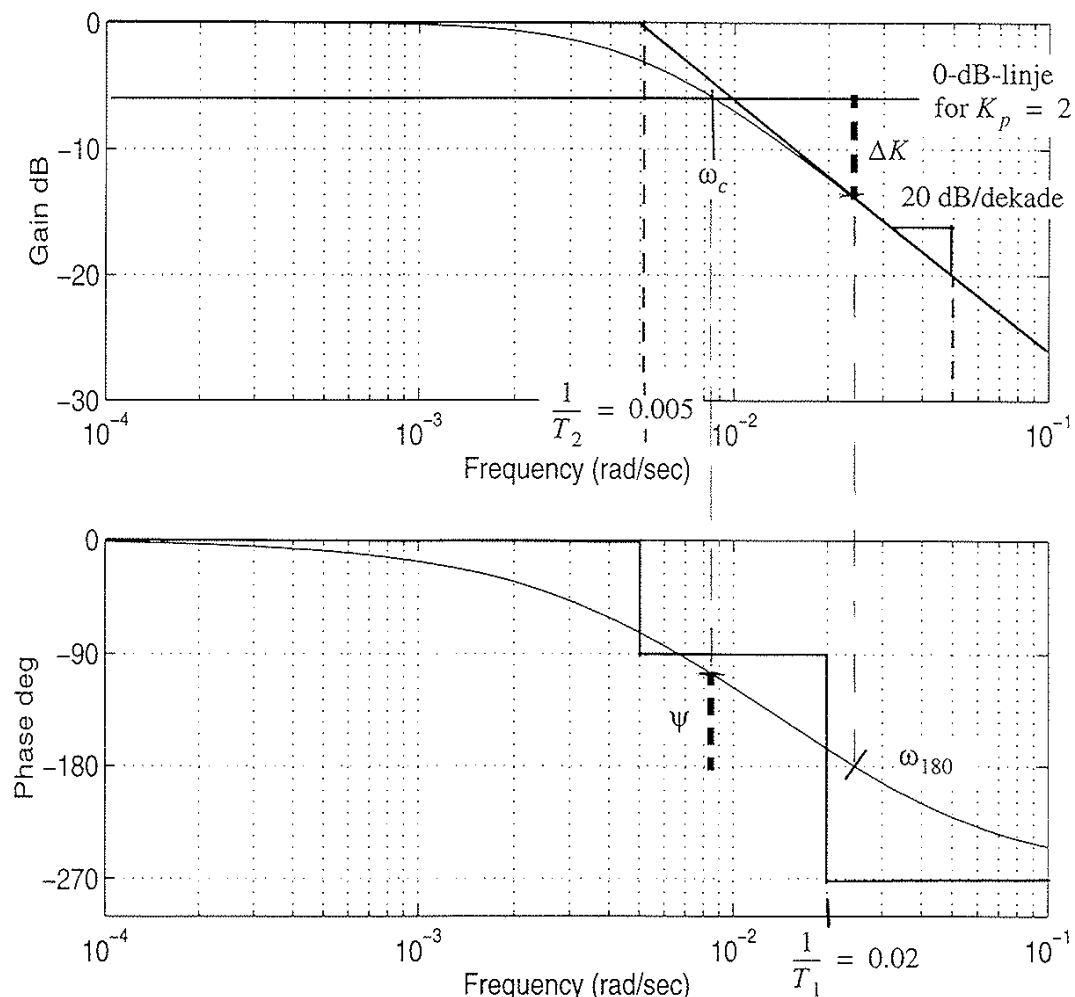
a) Vi må få $h(s)$ på formen

$$h(s) = \frac{(1 - 50s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} = \frac{(1 - 50s)}{1 + (T_1 + T_2)s + T_1T_2s^2} \quad (1)$$

Vi har $T_1T_2 = 10000$ og $T_1 + T_2 = 250$. Dette gir ligninga $T_{1,2}^2 - 250T_{1,2} + 10000 = 0 \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm \sqrt{125^2 - 10000} \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm 75$ som gir $T_1 = 50$ og $T_2 = 200$. Dermed har vi transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{(1 - 50s)}{(1 + 50s)(1 + 200s)}$$

Merk at $|h(s)| = \left| \frac{1}{1 + 200s} \right|$.



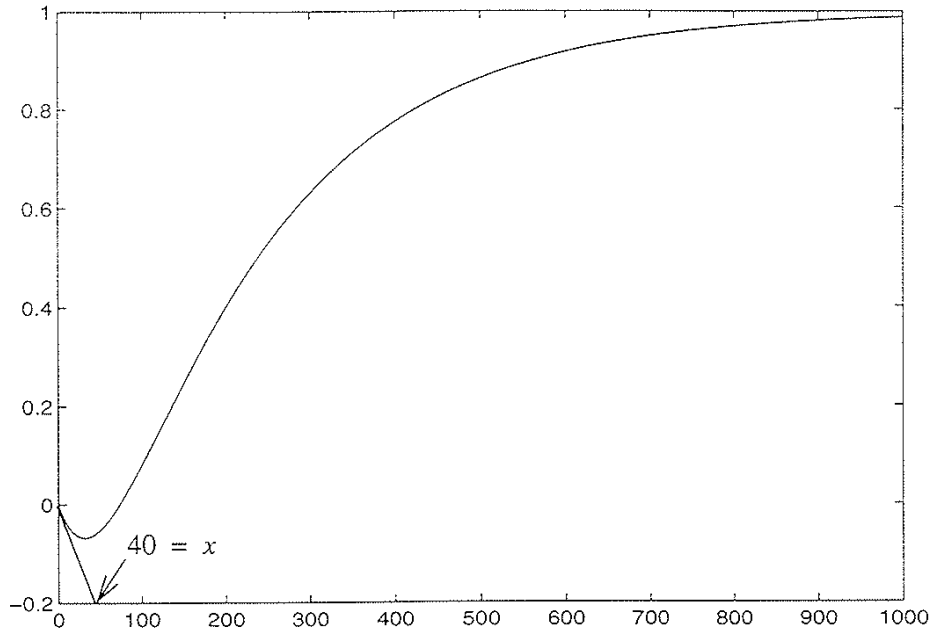
Figur 1: Bodediagram for prosess.

Vi ser i figur 1 at $\angle h_{as}$ knekker $-90^\circ + (-90^\circ)$ ved $\omega = \frac{1}{T_2}$ pga. nullpunktet $-\frac{1}{T_2}$ og polen

$\frac{1}{T_2}$. $\angle h_{as}$ knekker -90° til ved $\omega = \frac{1}{T_1}$ pga. den andre polen.

Prosesseren er ikke-minimum fase pga. det negative nullpunktet (nullpunktet i høyre halvplan).

b)



Figur 2: Enhetsprangresponsen til prosessen

Nullpunktet i høyre halvplan gir et transient forløp som svinger seg ned først. Responsen $\rightarrow 1$ når $t \rightarrow \infty$ fordi statisk forsterkning = 1 ($h(0) = \frac{1}{1}$). Tangenten finnes ved

at en bruker (V.2): $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(sh(s) \frac{1}{s} \cdot s \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sh(s)) = \frac{-50}{50 \cdot 200} = -0.005$

Størrelsen x på figur 2 finnes slik: $-\frac{0.2}{x} = -0.005 \Rightarrow x = 40$.

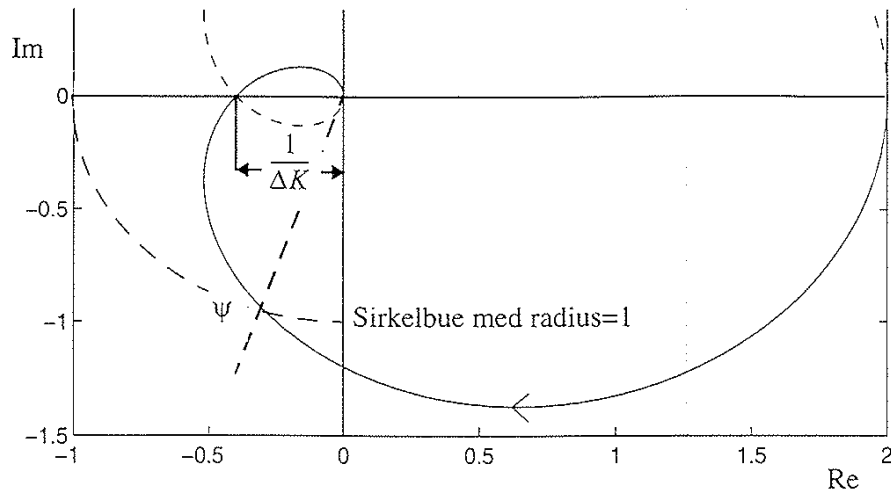
c) 0-dB-linja er tegna på inn på figur 1. Vi leser av $\psi = 76^\circ$ og $\Delta K = 7.8$ dB.

d) På stabilitetsgrensa har vi $\omega_c = \omega_{180}$, dvs. $|h(j\omega_{180})| = 1$ og $\angle h(j\omega_{180}) = -180^\circ$, dvs. at $h(j\omega_{180}) = -1$.

Det lukkede systemet på stabilitetsgrensa er gitt ved: $\frac{h(j\omega_{180})}{1 + h(j\omega_{180})}$.

$1 + h(j\omega_{180}) = 0 \Rightarrow \pm j\omega_{180}$ er poler i det lukkede systemet. Svingefrekvensen blir ω_{180} , avleses som $\omega_{180} \approx 0.022$ rad/s.

e)



Figur 3: Nyquistkurve for prosessen

f) Vi bruker tabell 1.1, linje 2. Ser at vi trenger K_{pk} og T_k . Fra c) har vi at $K_{pk} = K_p + \Delta K = 6 + 7.8 = 13.8 \text{ dB} = 4.9$. T_k er periodetida for stående svingning:

$$\omega_{180} = \frac{2\pi}{T_k} \Rightarrow T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \approx \frac{6.28}{0.022} = 285. \text{ Tabell 1.1 gir da } K_p = 0.45 \cdot 4.91 = 2.2 \text{ og}$$

$$T_i = \frac{285}{1.2} = 237.5.$$

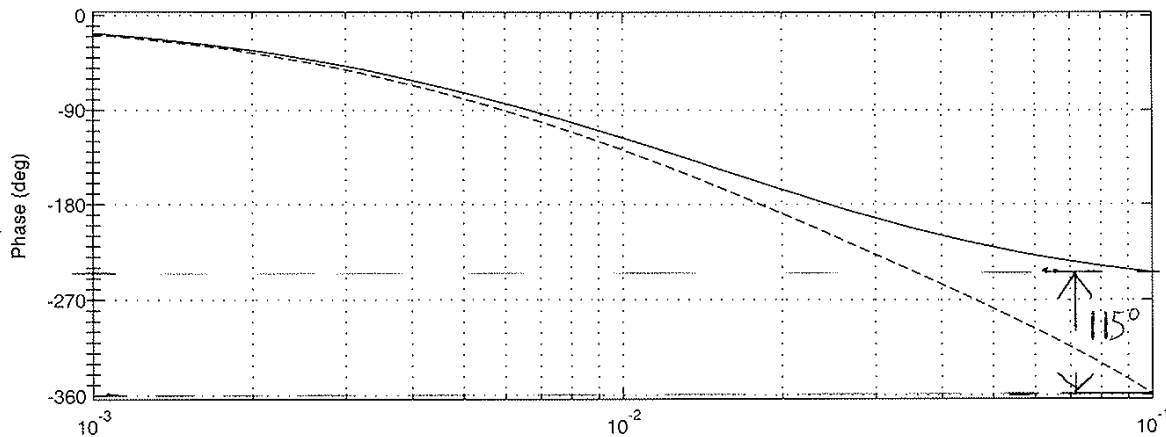
g) Vi må finne $\frac{e}{v}(s) = \frac{h(s)}{1 + h_r(s)h(s)}$. $v(t)$ er en rampefunksjon. Dermed har vi

$$L(v(t)) = \frac{1}{s^2}. \text{ Får følgende grenseverdi:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(s e(s) \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-1}{\frac{1}{h(s)} + h_r(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-1}{\frac{(\dots)(\dots)}{(\dots)} + K_p \frac{T_i s + 1}{T_i s}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-T_i s}{\frac{(\dots)(\dots)(T_i s)}{(\dots)} + K_p (T_i s + 1)} \right) = -\frac{T_i}{K_p} \end{aligned}$$

Hvis $v(t)$ i stedet hadde vært lik $\mu_1(t)$, forsvinner $\frac{1}{s}$ i formelen over, og $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

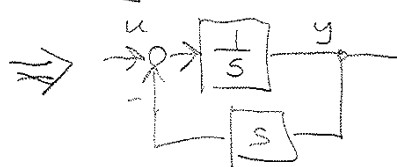
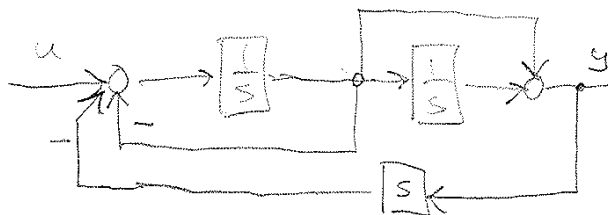
1h



Tidsforsinkelens fasebidrag ved frekvensen 0.1 er -115° , avlest i Bodediagram. Vi har $-\omega\tau = -115 \cdot \frac{\pi}{180}$ med $\omega = 0.1$. Dette gir $\tau = \frac{1150}{180} \cdot \pi = 20.07 \Rightarrow \tau = \underline{\underline{20}}$

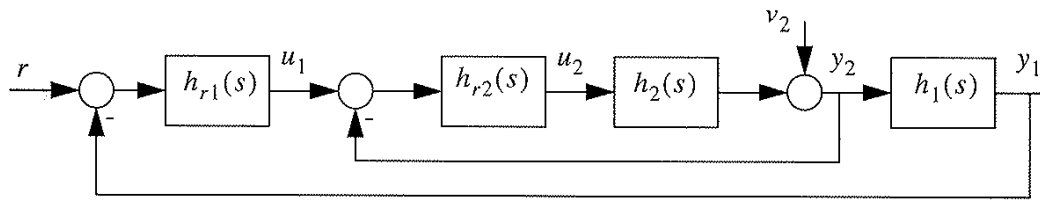
1i) Ved diskret regulering svarer vi vinklingen av leddelementet i en tilsvarende kontinuerlig analyse ved å introdusere en blokk med en tidsforsinkelse lik halve taktida. Fra 1h) veit vi at $\frac{T}{2} = 20$ i dette tilfellet, $\Rightarrow T = 40$. Den minste tidskonstanten i prosessen er 50. T bør være flere ganger mindre enn denne, og er derfor for stor.

Oppgave F)



$\Rightarrow \frac{y}{u}(s) = \frac{1}{2s}$

Oppgave 3 a)



3 b) Ved riktig valg av $h_{r2}(s)$ kan man oppnå en reguleringsgrad $N_2(s) = \frac{1}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \ll 1$ for den indre sløyfen, noe som undertrykker forstyrrelsen kraftig før den virker på den ytre sløyfen. Riktig $h_{r2}(s)$ gir også $M_2(s) = \frac{h_2(s)h_{r2}(s)}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \approx 1$ med stor båndbredde, noe som bedrer egenskapene til den ytre sløyfen. Dermed: Høyere båndbredde, bedre stabilitets-egenskaper for det samlede system. *(og/eller)*

Oppgave 4)

$$h_0(s) = \frac{K}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s)}$$

(det karakteristiske)
som leder til polynomet

$$n_0(s) + t_0(s) = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K$$

Rouths kriterium brukt på dette polynomet gir følgende talltabell

T_1T_2	,	1
$T_1 + T_2$,	K
$\frac{T_1 + T_2 - KT_1T_2}{T_1 + T_2}$		
K		

Alle elementene i først kolonne av Rouths talltabell skal ha samme fortegn. Antar vi at både T_1 og T_2 er positive, blir betingelsen for stabilitet

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}$$

(Dette er et eksempel fra læreboka; Eks. 8.9 i 2002-utgaven)

Oppgave 5

- a) For roterende bevegelser har vi momentbalansen

$$T = I\ddot{\theta} \quad (1)$$

der T er moment, I er treghetsmoment og $\ddot{\theta}$ er vinkelakselerasjon.

Tyngdens komponent langs sirkelbua er: $mg\sin\theta$. Momentbidraget blir da: $Lmg\sin\theta$ (kraft \cdot arm). Når vi tar med friksjonen blir summen av momentene som virker mot bevegelsen:

$$-D\dot{\theta} - Lmg\sin\theta \quad (2)$$

I dette tilfellet er treghetsmomentet i likning (1) $I = mL^2$. Dermed gir likning (1) og (2) følgende:

$$mL^2\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} - Lmg\sin\theta \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{D}{mL^2}\dot{\theta}$$

Dette kan også modelleres ved bruk av Newtons 2. lov Akselerasjonen blir $a = L\ddot{\theta}$. Kraft som følge av dreiemomentet blir $-\frac{D\dot{\theta}}{L}$. Dermed: $F = ma \Leftrightarrow -mg\sin\theta - \frac{D\dot{\theta}}{L} = mL\ddot{\theta}$.

Leddene med $\sin\theta$ gjør likning (3) ulineær.

- b) Setter $x_1(t) = \theta(t)$ og $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Dermed kan likning (3) skrives på formen:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{D}{mL^2}x_2$$

$$\text{Her er } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ og } \underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{D}{mL^2}x_2 \end{bmatrix}.$$

c) Vi skal linearisere rundt likevektspunktet $x_1 = 0$. Det gir modellen på formen $\dot{x} = Ax$

$$\text{med } A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{x_1=0} = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \right|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}$$

d) Laplacetransformen med bruk av formel (V.3) gir:

$$\begin{aligned} s\dot{x}(s) - x_0 &= A\dot{x}(s) \\ (sI - A)\dot{x}(s) &= \dot{x}_0 \\ \dot{x}(s) &= (sI - A)^{-1} \dot{x}_0 \end{aligned}$$

$$\text{Her er } (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix}$$

Vi har $\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ L \end{bmatrix}$. Merk at vi må regne om til vinkelhastighet. Målinga blir: $\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{x}$.

Dette gir:

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ L \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \\ \theta(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ L \end{bmatrix} = \frac{v_0/L}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \end{aligned} \tag{5}$$

e) Vi skriver likning (5) som et andre ordens system, se side 10 i eksamensoppgava:

$$\theta(s) = \frac{v_0/L}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

Dette gir udempet resonansfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og relativ dempningsfaktor

$$\zeta = \frac{D}{mL^2 \cdot 2\omega_0} = \frac{D}{2mgL\sqrt{g/L}} = \frac{D}{2mg^{1/2}L^{3/2}}$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamen i SIE3005 reguleringsteknikk

torsdag 15. mai 2003

Tid: 0900 - 1300 (til 1500 for de med 100%-eksamen)

Sensur vil foreligge seinest 5. juni. Følg før det også med på fagets nettsted om flervalgsdelen av eksamen.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgavene på side 1 – 4 skal løses av alle, både de som tar 70%- og de som tar 100%-eksamen.

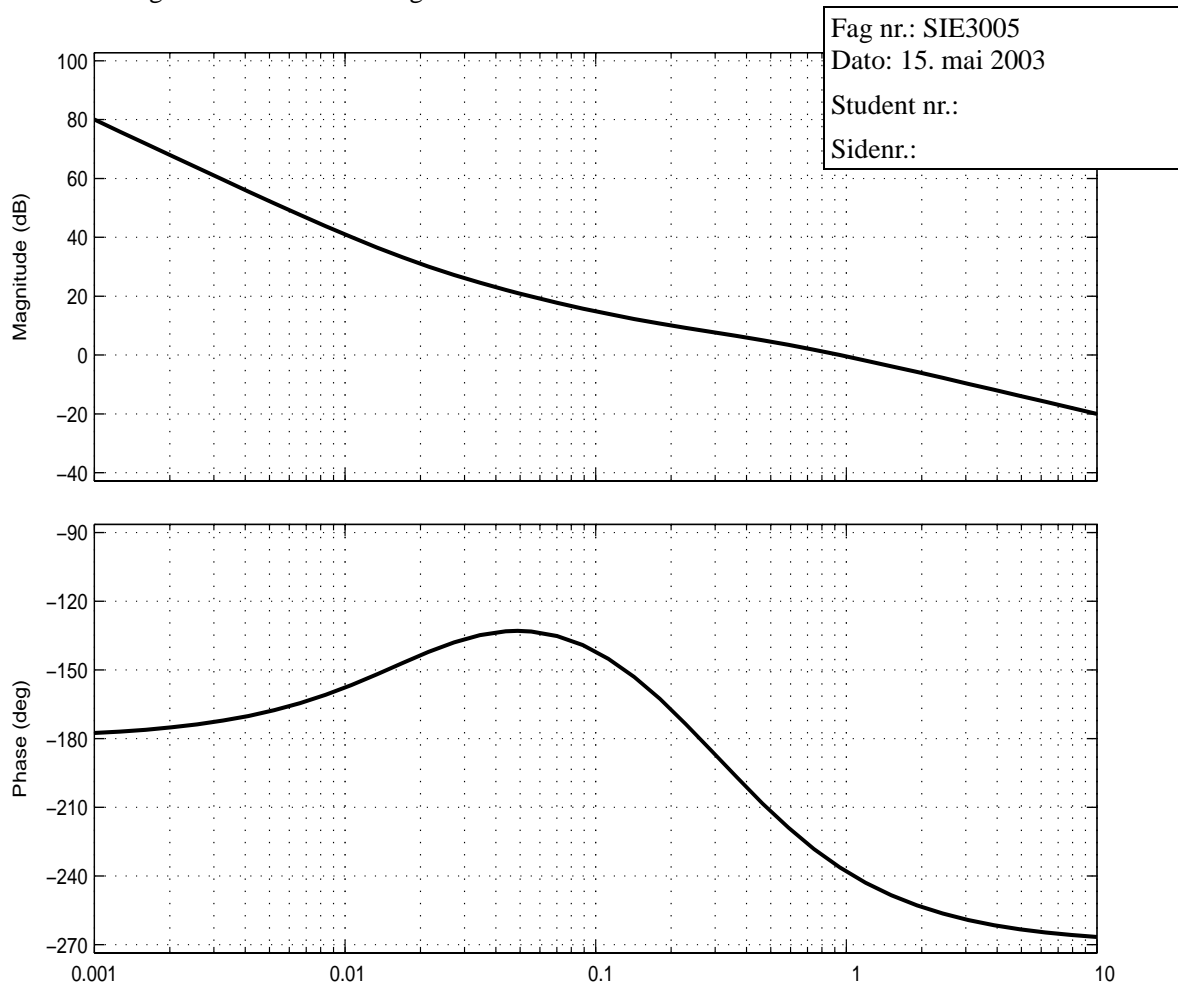
Oppgave 1 (30 %)

Gitt prosessen
$$h_u(s) = K \frac{1 - T_1 s}{s^2}, \quad K = 0.01, T_1 = 5 \quad (1.1)$$

Du skal bruke regulatoren
$$h_r = K_p \frac{1 + T_2 s}{1 + \alpha T_2 s}, \quad \alpha < 1. \quad (1.2)$$

- a) (2 %) Hva kaller vi denne type regulator? Hvorfor er dette et fornuftig valg av regulator type for den gitte prosessen (kort, verbalt svar)?
- b) (10 %) Figur 1.1 neste side viser Bode-diagram for $h_0 = h_r h_u$, med $T_2 = 50$, $\alpha = 0.05$, og $K_p = 1$. Er systemet stabilt med denne forsterkinga? (Begrunnet svar!)
Tegn inn asymptoter for amplitude og fase, og lever den påtegnede figur som en del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du finner asymptotene, det er ikke nok å "tilpasse dem" til de gitte kurver. Spesielt må du angi hvordan du fastlegger hvor venstre del av asymptoten til $|h_0|$ krysser 0-dB-linja.
- c) (6 %) Regulatoren (1.2) skal nå realiseres diskret. Hva er den viktigste negative virkninga av å bruke diskret regulator, og hvordan kan vi tilnærmet få fram denne virkninga ved å analysere som om vi bruker kontinuerlig regulator? Bruk denne metoden, og skissér inn det modifiserte faseforløpet du da får for h_0 i figur 1.1. Tasterida (samplingstida) er $T = 1$.

- d) (5 %) Bestem ved hjelp av Bodediagrammet den K_p som gir forsterkningsmargin omtrent $\Delta K = 6\text{dB}$. Vurdér ut fra det dårligere faseforløpet ved kryssfrekvensen p.g.a. diskret regulator: Er tastetida valgt liten nok?



figur 1.1 (se også side 4)

- e) (3 %) *For enkelhets skyld forutsetter vi i resten av denne oppgaven kontinuerlig regulator (1.2). Reguleringsystemets stabilitet kan da vurderes ved hjelp av Rouths kriterium. Du skal ikke sette inn tallverdier, men bruke de algebraiske uttrykkene (1.1) og (1.2) slik de står. Sett opp Rouths tabell for det lukkede systemet.*
- f) (3 %) Forklar med utgangspunkt i Rouths kriterium hva slags krav som må stilles til T_2 sammenlignet med T_1 . Dette kunne du sagt ut fra et enklere verbalt resonnement, bare ved å betrakte (1.1) og (1.2) uten å måtte bruke Rouths kriterium. Forklar det også!
- g) (1 %) Hvis du skulle brukt Rouths kriterium (vi forutsetter fortsatt kontinuerlig regulering) og prosessen (1.1) hadde inneholdt en tidsforsinkelse, hva måtte du ha gjort da?

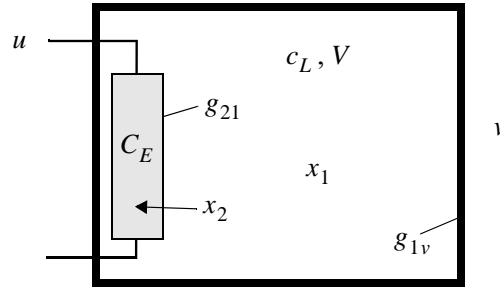
Fag nr.: SIE3005
 Dato: 15. mai 2003
 Student nr.:
 Sidenr.:

Oppgave 2 (20 %)

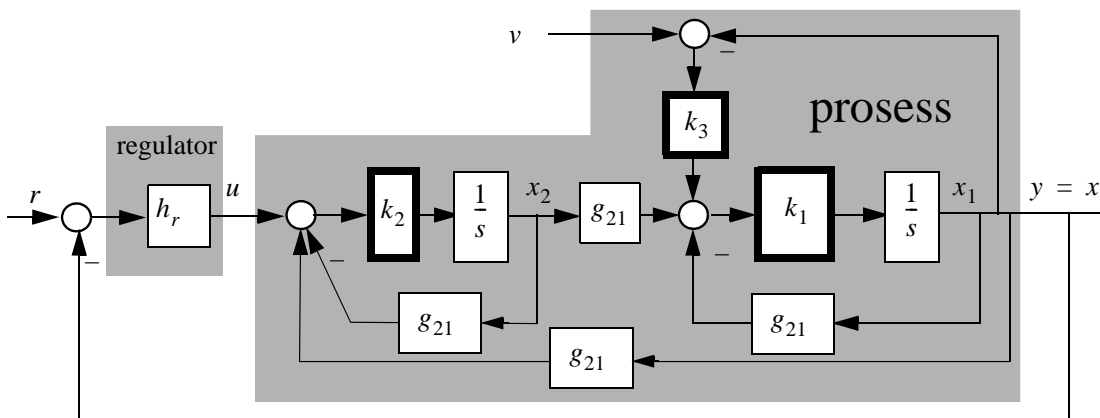
Et rom varmes opp av en ovn med en viss termisk treghet. Rommet har varmetap til omgivelsene. Rommet med ovn er skissert til høyre:

Vi har:

- $x_1 = y$: Temperatur i rom, antas jevnt fordelt [$^{\circ}C$].
- x_2 : Temperatur i ovn [$^{\circ}C$].
- v : Temperatur ute [$^{\circ}C$].
- u : Pådrag til ovn [W].
- C_E : Varmekapasitet i ovn [$J/^{\circ}C$]
- c_L : Spesifikk varmekapasitet for luft [$J/(m^3 \cdot ^{\circ}C)$].
- V : Volum av rom [m^3].
- g_{21}, g_{1v} : Varmerovergangstall ovn/rom og rom/ute [$W/^{\circ}C$].



Figur 2.1 viser blokkdiagrammet for prosessen (= rom + ovn) med seriekompensasjon:



figur 2.1

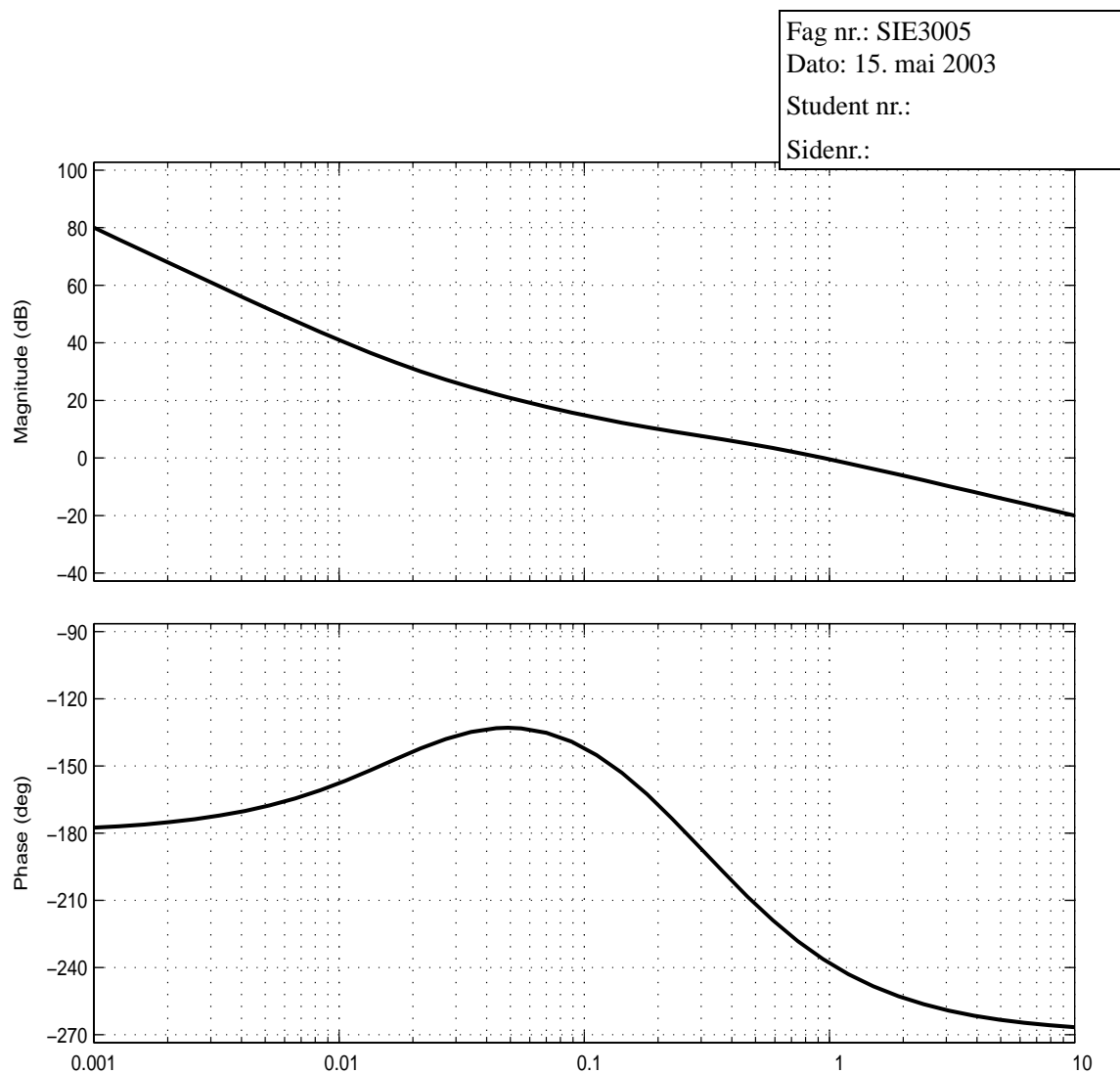
a) (7 %) Finn størrelsene k_1, k_2, k_3 i figur 2.1.

Fra nå av kan du for enkelhets skyld bruke betegnelsene k_1, k_2, k_3 i resten av oppgaven, uten å sette inn for disse størrelsene:

b) (6 %) Forutsett ingen ytre tilbakekobling, dvs. $h_r = 0$. Vis at transferfunksjonen fra v til y blir:

$$h_{vy}(s) = \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + [g_{21}(k_1 + k_2) + k_1 k_3]s + k_1 k_2 k_3 g_{21}} \quad (2.1)$$

- c) (2 %) Forutsett fortsatt ingen ytre tilbakekobling, dvs. $h_r = 0$.
 Ut fra (2.1): Hva blir $y(\infty)$ når $v = v_0 = \text{konst.}$?
 Er svaret rimelig (kort fysisk, verbal forklaring)?
- d) (3.5 %) Anta at du har måling av utetemperaturen v . Finn den ideelle (= dynamiske) foroverkopling fra v til u . Kommentér. (Tips: Den har formen $h_{fi} = -K_f(1 + T_f s)$.)
 Tegn inn blokken h_{fi} med forbindelser i blokkdiagrammet i figur 2.1, og levér arket.
- e) (1.5 %) Finn så en konstant (= statisk) foroverkopling med utgangspunkt i den ideelle. Hva oppnår du med denne konstante foroverkoplingen?



Ekstra figur 1.1 hvis du trenger den

Seksjon med flervalgsoppgaver (“multiple choice”)

Les alt dette nøye før du begynner:

Dere som har 100%-eksamen (full eksamen) skal gjøre alle flervalgsoppgavene.

Dere øvrige som tar 70%-eksamen, dvs. hvor resultatet fra midtsemesterprøven skal telle med i karakteren, skal hoppe over oppgavene O1 – O11, og bare gjøre oppgavene O12 – O19. Ikke kryss av noe som helst i feltene som gjelder oppgavene O1 – O11.

I de fleste oppgavene i denne seksjonen skal man krysse av bare *ett* av flere svaralternativer. Hvis man prøver å “gardere” ved å krysse av flere enn ett kryss der hvor det bare skal være ett kryss, nulles resultatet på oppgaven. Dette gjelder bortsett fra der hvor det er sagt spesielt fra at det kan være *flere riktige kryss* i den aktuelle oppgave.

Noen oppgaver har færre svaralternativer enn A – F. Avkryssing på overflødige svaralternativer ignoreres ved sensuren, så hvis man kommer i skade for å gjøre dette, teller det ikke.

Feil svar gir minuspoeng, så det er bedre å ikke krysse av, enn å tippe. Poeng for svaralternativ er satt slik at summen av alle mulige alternativ på en gitt oppgave = 0. Svært gale svar gir mer minus enn litt gale svar. Prosenttallet som oppgis ved hver oppgave forteller hva man kan oppnå ved helt korrekt avkryssing.

Svarskjemaet skal krysses av med **blå eller svart kulepenn**, slik: . Krysser du feil, kan krysset "slettes" ved å fylle hele ruta med blekk: . Når du skal slette et kryss på denne måten, er det viktig at ruta blir helt full av farge, slik at ikke noe av det hvite papiret synes inne i ruta. Korrekturlakk er forbudt, det kan skape problemer for arkmatoren ved optisk innlesing. Og ikke brett svarskjemaet på noe vis.

Studentnummeret skal skrives pent to ganger. Skriv siffer omtrent slik: 0 | 2 3 4 5 6 7 8 9. (Ikke skriv noe i feltet “Eventuell ekstra ID”.)

Tips om arbeidsmåte: Ikke kryss av på svarskjemaet før du er ferdig med oppgavene. For hver oppgave noterer du et annet sted koden for plassering av riktig kryss, f.eks. "B", hvis du mener den aktuelle oppgave skal ha kryss der. Så kan du like før innlevering overføre slik informasjon til svarskjemaet, oppgave etter oppgave, i form av riktig plasserte kryss. Merk da at både **oppgavenummer og bokstaver for svaralternativ er (for det meste) trykket i tilfeldig ombyttet rekkefølge på svarskjemaet**, forskjellig for hver student. Så pass på hvor du setter kryssene!

Du får utdelt to identiske eksemplarer av svarskjemaet (hvis ikke, be om to nye og identiske svarskjemaer fra eksamensvakta. De er identiske når nummeret øverst på hvert skjema er det samme. Kontrollér det!). Det ene svarskjemaet krysses av og innleveres. Det andre beholdes. Det kan du bruke til å lage en kopi av svarskjemaet før levering, og har med det muligheten til å kontrollere dine kryss mot fasiten som blir lagt ut på Veven. Fasiten, og dine poeng for flervalgsdelen av denne eksamen, kunngjøres via fagets nettsted på “oppslagstavla”, sannsynligvis før 31. mai. Følg med der! Den endelige sensur, som gjelder hele besvarelsen, kommer seinest 5. juni. Hvis den er ferdig før, varsles dette på fagets oppslagstavle.

Utfylt svarskjema skal legges inn i den øvrige besvarelse og leveres sammen med den.

Oppgavesettets sider 6, 7 og 8 skal rives av og leveres for seg (for makulering).

I **O1 – O6 (alle 2 %)** er det gitt 6 transferfunksjoner. Samtidig er det oppgitt 6 enhetsprang-responser A til F, se figur til høyre. Hver transferfunksjon skal koples til riktig sprangrespons.

$$\mathbf{O1:} \quad \frac{1 + 2s}{(1 + 0.5s)^2}$$

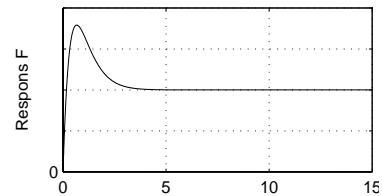
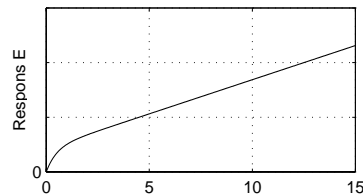
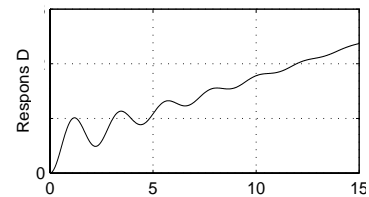
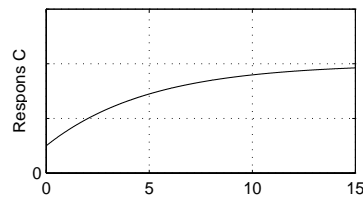
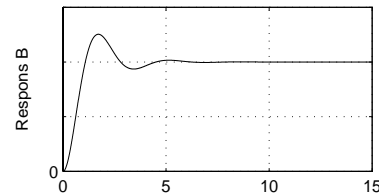
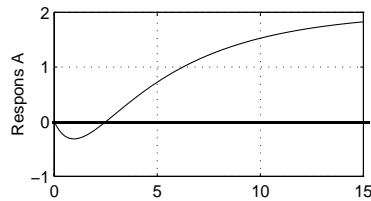
$$\mathbf{O2:} \quad \frac{2(1-2s)}{(1+s)(1+5s)}$$

$$\mathbf{O3:} \quad \frac{1 + 4s}{8s(1 + 0.5s)}$$

$$\mathbf{O4:} \quad \frac{64}{64 + 6.4s + s^2}$$

$$\mathbf{O5:} \quad \frac{1 + 4s}{s^3 + 0.5s^2 + 8s}$$

$$\mathbf{O6:} \quad \frac{2(1 + 1.25s)}{(1 + 5s)}$$



O7 (4 %) Relativ dempningsfaktor ζ for 2.ordens-delen av transferfunksjonen i O5 er

A: 0.1188 B: 0.1105 C: 0.1024 D: 0.0931 E: 0.0884 F: 0.0732

O8 (3 %)

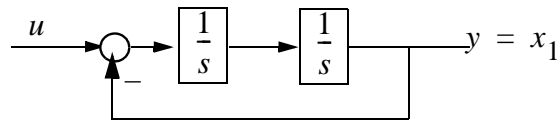
Sprangresponsen for transferfunksjonen i O6 ovenfor, starter i $y(0) =$

A: 0.0 B: 2.5 C: 1 D: 0.5 E: 2 F: 5

O9 (4 %) Her kan flere påstander (kryss) være riktige.

- A: For en fasevariabel tilstandsromform er tilstandene de deriverte av hverandre.
- B: Det finnes uendelig mange tilstandsrommodeller som gir samme impulsrespons for et system.
- C: Et lineært tidsinvariant system kan alltid representeres med et sett av differensiallikninger.
- D: Når det lineære systemet har kompleks konjugerte egenverdier, kan det ikke bringes på diagonal form.
- E: Et autonomt system kan ikke inneholde en tidsforsinkelse.
- F: Det er ikke mulig å finne en algebraisk løsning for responsen til en prosess med tidsforsinkelse i tilbakekoplingen.

O10 (3 %) Gitt systemet :



En tilstandsrommodell er

	matrisene A, B, C		matrisene A, B, C
A	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 1]$	D	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0]$
B	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [0 \ 1]$	E	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0]$
C	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [0 \ 1]$	F	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [0 \ 1]$

O11 (4 %)

Hva blir transisjonsmatrisen $\Phi(t)$?

A	$\begin{bmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix} 1 & \sin t \\ -\sin t & 1 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$	E	$\begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$	F	$\begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ -1 & \cos t \end{bmatrix}$

Fra og med her skal også de med 70%-eksamen løse flervalgsoppgaver:

O12 (4 %) Her kan flere påstander (kryss) være riktige.

- A: Foroverkopling fra referansen bedrer et systems stabilitet.
- B: Foroverkopling fra forstyrrelsen bedrer et systems stabilitet.
- C: Ziegler-Nichols metode krever ikke at prosessens modell er kjent.
- D: Anti-windup (anti-integrator-overlading) trengs for en PI-regulator når det er metning i pådraget.
- E: Intern tilbakekopling, sett i forhold til seriekompensasjon, kan ikke gi hurtigere regulering uten at det går ut over stabilitetsmarginene.
- F: Et system med tidsforsinkelse er et ikke-minum-fase-system.

O13 – O18, se nedenfor:

Gitt tre systemer, **S1 - S3**. Systemene utsettes for sprang- eller rampefunksjoner som vist.

Kryss av alternativ A på svarskjemaet hvis kombinasjonen av system og inngangssignal gir null stasjonært avvik,

B hvis inngangssignal og system gir $0 < e(\infty) = \text{konst.} < \infty$,

eller C hvis inngangssignal og system gir $e(\infty) = \infty$.

O13 (2 %) System **S1** og signal **a**.

O14 (2 %) System **S1** og signal **b**

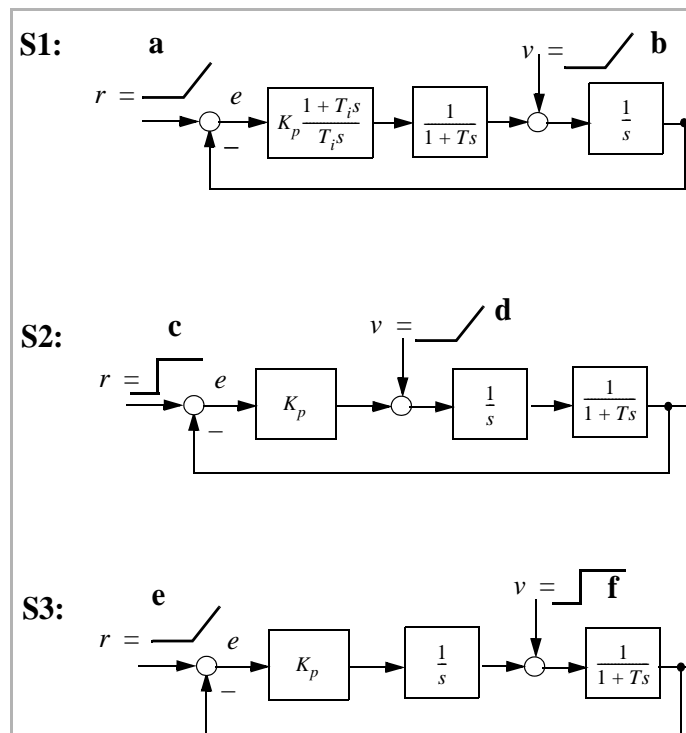
O15 (2 %) System **S2** og signal **c**

O16 (2 %) System **S2** og signal **d**

O17 (2 %) System **S3** og signal **e**

O18 (2 %) System **S3** og signal **f**

(Svaralternativene D, E og F lar du bare stå blanke i disse oppgavene.)



O19 (4 %)

Det rekursive uttrykket for det diskrete pådraget $u[k]$ for regulatoren i oppgave 1c (side 1 i dette oppgavesettet), med $K_p = 0.17$, blir:

A: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] + 2.86e[k],$

B: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

C: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

D: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k]$

E: $u[k] = u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

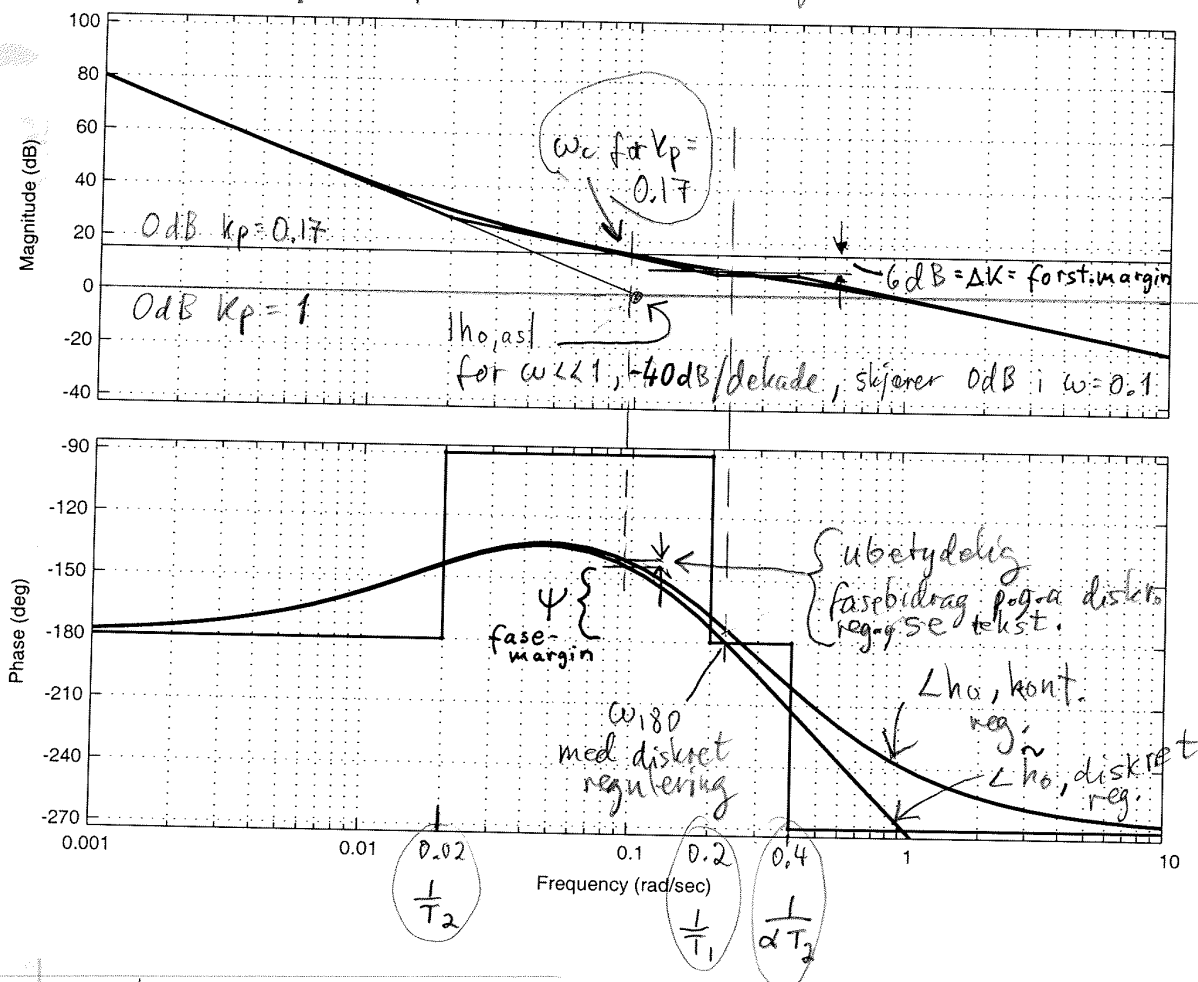
F: $u[k] = u[k-1] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1]$

(Tips: Svaret kan om ønskelig finnes uten å sette inn tallverdier – bare ved å eliminere uaktuelle alternativer).

Løsningsforslag eksamen 3005 regulerings- teknikk 15/5-2003

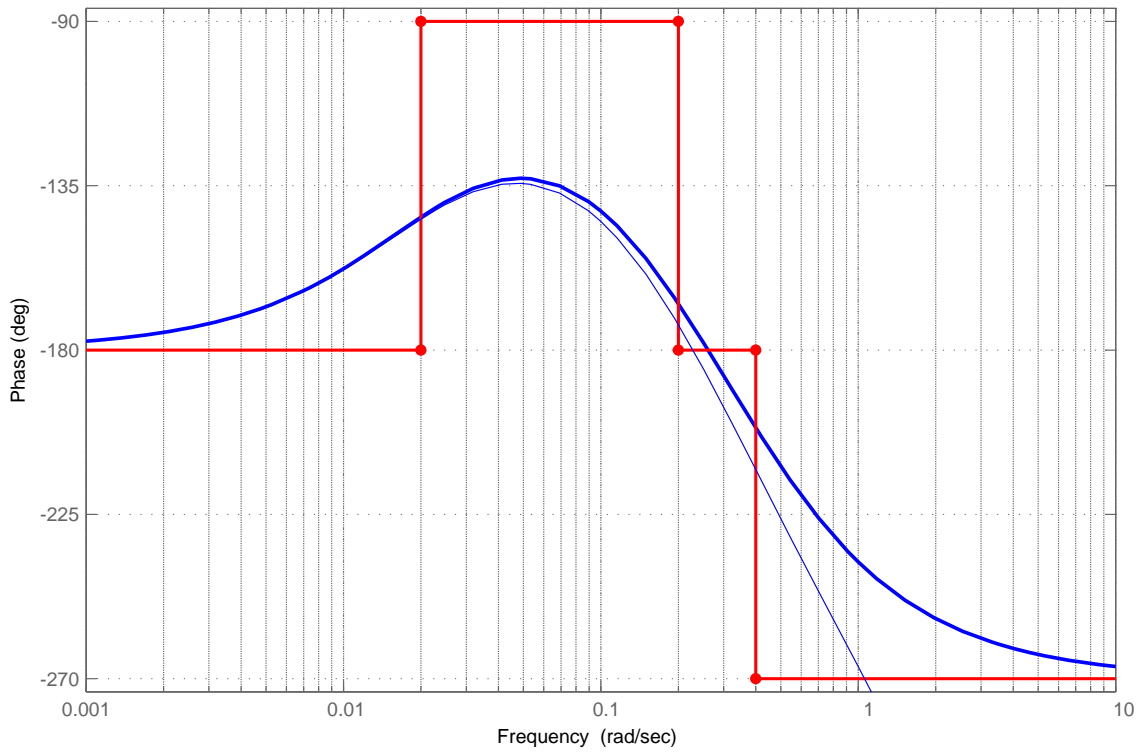
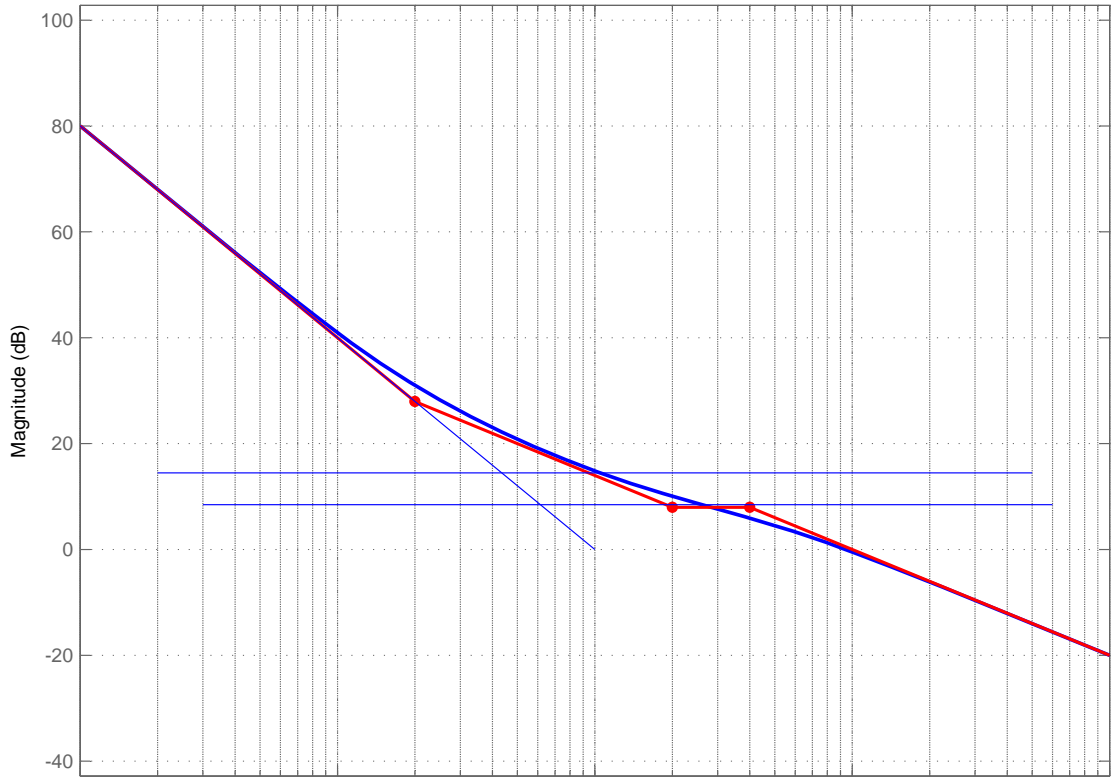
1a) Dette er en begrenset PD-regulator.
 Proessen har $\angle h_u < -180^\circ \forall \omega \Rightarrow$
 den kan bare stabiliseres med en regulator
 med derivetvirkning.

1b) Av Bode diagrammet ser vi at systemet er
 ustabilt for $k_p = 1$. Se ellers figur:



For $k_p = 1$ er $\omega_c \gg \omega_{180} \Rightarrow$ ustabilt system

Bode Diagram



1c) Haldelementet förer tilnærmet til at det introdueres en tidsforsinkelise = $\frac{T}{2}$ i den lukkede sløyfen. Dette gir tilnærmet en ny $\tilde{h}_0 = h_0 e^{-\frac{T}{2}s}$. Se figur forrige side. Vi må addere $-\frac{T}{2} \cdot \omega = -0.5\omega$ ved alle frekvenser, dvs. $-0.5 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \omega$ når vi gjør om til grader.

1d) Fra diagrammet ser vi at vi må redusere k_p med ca. 15.5 dB for å få 6 dB fasemargin. Ny k_p blir da $1 \cdot 10^{-\frac{15.5}{20}} \approx 0.17$

Kryssfrekvensen er ca. 0.093. Fasebidraget blir da $-0.5 \frac{180}{\pi} \cdot 0.093 = -2.7^\circ \Rightarrow$ minimal innvirkning fra haldelementet $\Rightarrow T$ er liten nok!

1e) Nevneren i det lukkede system blir $n_0(s) + t_0(s)$, der $h_0 = \frac{t_0}{n_0} =$

$$s^2(1 + \alpha T_2 s) + k_p k (1 + T_2 s)(1 - T_1 s)$$

$$= \alpha T_2 s^3 + (1 - T_1 T_2 k_p k) s^2 + k_p k (T_2 - T_1) s + k_p k$$

Tabell:

αT_2	$k_p k (T_2 - T_1)$
$(1 - k_p k T_1 T_2)$	$k_p k$
$k_p k \left(T_2 - T_1 - \frac{\alpha T_2 k_p k}{1 - k_p k T_1 T_2} \right)$	

1f) For det første må alle koeffisientene i $n_0(s) + t_0(s)$ ha samme fortegn. Dette innebærer kravet $T_2 > T_1$

noe som er rimelig, for med $T_2 < T_1$ ville det ikke bli mulig å få fasen til å over -180° , dvs. vi ville ikke hatt noen derivatutveining.

1g) Erstattet $e^{-\tau s}$ med en rasjonal approksimasjon,
f.eks. $e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}}$

Oppgave 2 a) Vi har for romtemperaturer:

$$c_{LV} \frac{dx_1}{dt} = g_{1V}(v - x_1) + g_{21}(x_2 - x_1)$$

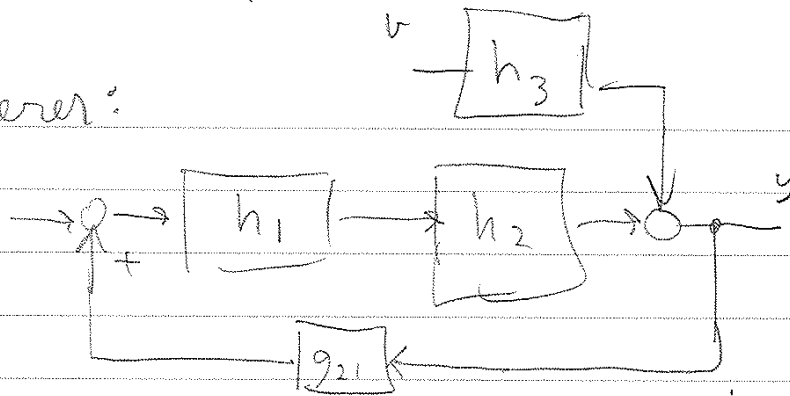
$$\Rightarrow \frac{1}{c_{LV}} = k_1, \quad g_{1V} = k_3$$

For ovnen:

$$C_E \frac{dx_2}{dt} = u - g_{21}(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{C_E}$$

2b) Definiere:



$$V_i \text{ bei } h_3 = \frac{k_3 \cdot k_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + (g_{21} + k_3) k_1 \cdot \frac{1}{s}} = \frac{k_1 k_3}{s + (g_{21} + k_3) k_1}$$

$$h_1 = \frac{k_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot g_{21}}{1 + k_2 \frac{1}{s} g_{21}} = \frac{k_2 g_{21}}{s + k_2 g_{21}}$$

$$h_2 = \frac{k_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + (g_{21} + k_3) k_1 \frac{1}{s}} = \frac{k_1}{s + (g_{21} + k_3) k_1} \Rightarrow \begin{cases} n_3 = n_2 \\ t_3 = k_3 t_2 \end{cases}$$

$$h_{uy} = h_3 \cdot \frac{1}{1 - h_1 h_2 g_{21}} = \frac{t_3}{n_3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t_1}{n_1} \cdot \frac{t_2}{n_2} \cdot g_{21}}$$

$$= \frac{t_3 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_3 \cdot n_1 \cdot n_2 - t_1 t_2 n_3 g_{21}} = \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{(s + k_2 g_{21})(s + (g_{21} + k_3) k_1) - k_1 k_2 g_{21}^2}$$

$$= \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + (k_2 g_{21} + k_1 k_3 + k_1 g_{21}) s + k_1 k_2 k_3 g_{21} + k_1 k_2 g_{21}^2 - k_1 k_2 g_{21}^2}$$

$$= \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + (g_{21} (k_1 + k_2) + k_1 k_3) s + k_1 k_2 k_3 g_{21}}$$

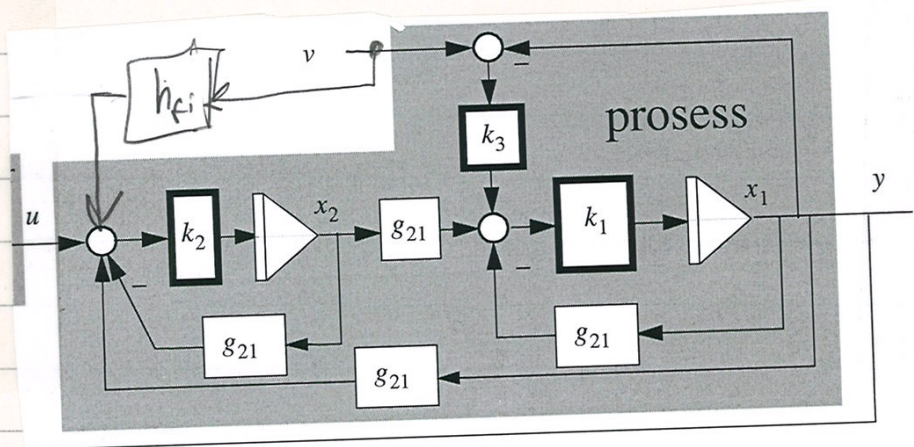
2c)

Sluttverditheorem: $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [h_{vy}(s) \cdot \frac{V_0}{s}] = h_{vy}(0)$

$= \frac{k_1 k_2 k_3 g_{21}}{k_1 k_2 k_3 g_{21}} \cdot V_0 = V_0 \Rightarrow$ rimelig, for

mår det ikke er noen oppvarming vil innetemp. $y \rightarrow$ utetemp. V_0 .

2d)



figur 2.1

Vi kan $h_{fi} = \frac{k_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot g_{21}}{1 + k_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot g_{21}} + k_3 = 0$

$\Rightarrow h_{fi} = \frac{-k_3 (s + k_2 g_{21})}{k_2 g_{21}} = -K_f (1 + T_f s)$
 med $T_f = \frac{1}{k_2 g_{21}}$, $K_f = k_3$

2e) Statisk $h_f = h_{fi}(0) = -k_3$

Den fjerner avvik når utetemperaturen er konstant.

ikke realiserbar p.g. uendelig derivat-tilbakekopling ved høye frekvenser

Eksamen i SIE3005 reguleringsteknikk
(flervalgs-seksjon)
NTNU, 15. mai 2003

Høyeste oppnåelige samlet poengsum = 50.00

	A	B	C	D	E	F
o 1	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	2.00
o 2	2.00	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40
o 3	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	2.00	-0.40
o 4	-0.40	2.00	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40
o 5	-0.40	-0.40	-0.40	2.00	-0.40	-0.40
o 6	-0.40	-0.40	2.00	-0.40	-0.40	-0.40
o 7	-0.80	-0.80	-0.80	-0.80	4.00	-0.80
o 8	-0.60	-0.60	-0.60	3.00	-0.60	-0.60
o 9	1.33	1.33	-0.50	-1.75	-1.75	1.33
o10	-0.70	-0.43	-0.43	-0.43	3.00	-1.00
o11	-0.97	4.00	-0.97	-0.97	-0.10	-0.97
o12	-1.33	-1.33	1.33	1.33	-1.33	1.33
o13	2.00	-1.00	-1.00			
o14	-1.00	2.00	-1.00			
o15	2.00	-1.00	-1.00			
o16	-1.00	-1.00	2.00			
o17	-1.00	2.00	-1.00			
o18	2.00	-1.00	-1.00			
o19	-0.97	4.00	-0.97	-0.97	-0.97	-0.10



Faglig kontakt under eksamen: Tommy Gravdahl, tlf. 7359 4393, mobil 9014 4212
T.G. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamen i SIE3005 reguleringsteknikk

fredag 15. august 2003

Tid: 0900 - 1500

Sensur vil foreligge seinest 5. september.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

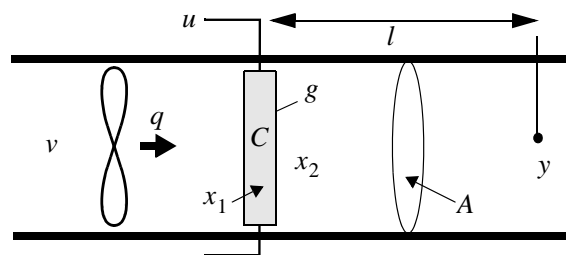
STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (68 %)

Gitt prosessen som vist i figur 1. Ei vifte blåser luft med volumstrøm q [m^3/s] og inngangstemperatur v [$^{\circ}C$] forbi et varmeelement som varmer opp lufta til temperatur x_2 . Et stykke lenger ute i røret måles temperaturen $y = x_2(t - \tau)$, der τ er en tidsforsinkelse. Vi betrakter en lineær modell av prosessen. Den gjelder for en liten temperaturøkning i lufta.

Flere størrelser defineres:

- u : Spenning over element [V].
- P : Effekt ytt av element [W], antas å være $P = Gu$, der G er en konstant.
- l : Avstand fra element til temperaturmåling [m]
- A : Tverrsnittsareal rør [m^2].
- C : Varmekapasitet element [$J/^{\circ}C$]
- g : Varmerovergangstall element/luft [$W/^{\circ}C$].
- γ : Spesifikk varmekapasitet for luft [$J/(kg \ ^{\circ}C)$].
- ρ : Spesifikk masse for luft [kg/m^3].



figur 1.1

Vi antar at alle størrelser er konstante, unntatt de tidsvariable x_1, x_2, y, v, u .

I det følgende bør du, for å forenkle arbeidet, innføre en koeffisient $\beta = \gamma\rho q$.

Til og med deloppgave (f) nedenfor er det ingen tilbakekopling (dvs. åpen sløyfe).

a) (3 %) Finn tidsforsinkelsen τ som funksjon av tre av de oppgitte koeffisienter.

b) (10 %) Prosessens modell blir $y = h_u u + h_v v$, med

$$h_u = K_u \frac{1}{1 + T_1 s} e^{-\tau s}, \quad h_v = K_v \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} e^{-\tau s} \quad (1.1)$$

Det oppgis at $K_v = 1$. Finn K_u , T_1 og T_2 ! (Tips for kontroll: Det oppgis at $T_2 = \frac{\beta}{g + \beta} T_1$. Dermed er $T_2 < T_1$, noe du trenger til oppgave (f) nedenfor.)

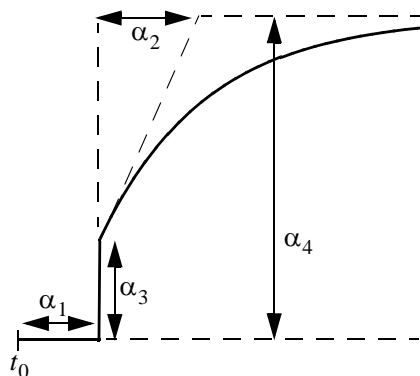
I det følgende trenger du ikke å ha greidd oppgave a) og b) for å få full uttelling. Bruk størrelsene K_u , T_1 og T_2 – du skal ikke sette inn noen tallverdier for dem.

c) (2 %) Kan modellen (1.1) formuleres på tilstandsromform? (Kort, men begrunnet, verbalt svar!)

d) (4 %) Anta at $v = v_0$ og $u = u_0 =$ konstante. Finn den tilsvarende konstante temperatur x_{20} i lufta. Forklar verbalt hvorfor K_v i (1.1) må være = 1!

e) (5 %) Anta at $v = v_0$ og $u = u_0 =$ konstante. Finn den tilsvarende konstante temperatur x_{10} i varmeelementet!

f) (7 %) Anta at $v = v_{01}$ har vært konstant i lengre tid, men så ved tida $t = t_0$ endrer seg som et sprang til en ny, noe større konstant verdi v_{02} . Responsen $y(t)$ er vist til høyre. Hva blir størrelsene α_i som er inntegnet der? Du må ikke begrunne svarene. (Tips: Sett $u = 0$ i denne oppgaven. Tips til α_3 : begynnelsesverditeoremet – se formelsamling.)



g) (5 %) Benytt symbolene h_u og h_v . Tegn blokkdiagram for en reguleringsstruktur med tilbakekopling og seriekompensasjon via en regulator kalt h_r . Referansen for ønsket utgangstemperatur kaller du r .

Temperaturen v kan måles. Føy til en foroverkopplingsstruktur med blokken h_f .

h) (5 %) Hva blir den ideelle foroverkopling h_{fi} ? Angi en mer realistisk foroverkopling! Hvilken innvirkning har denne foroverkoplingen på reguleringsystemets stabilitet?

i) (8 %) Anta nå at du ikke har foroverkopling. Finn et uttrykk for det stasjonære avviket etter et enhetssprang i v . Forutsett proporsjonalregulering og regulatorforsterkning K_p . Alternativt: hvis $h_r =$ PI-regulator, da vil den fjerne det stasjonære avviket. Forklar det verbalt, eller vis det!

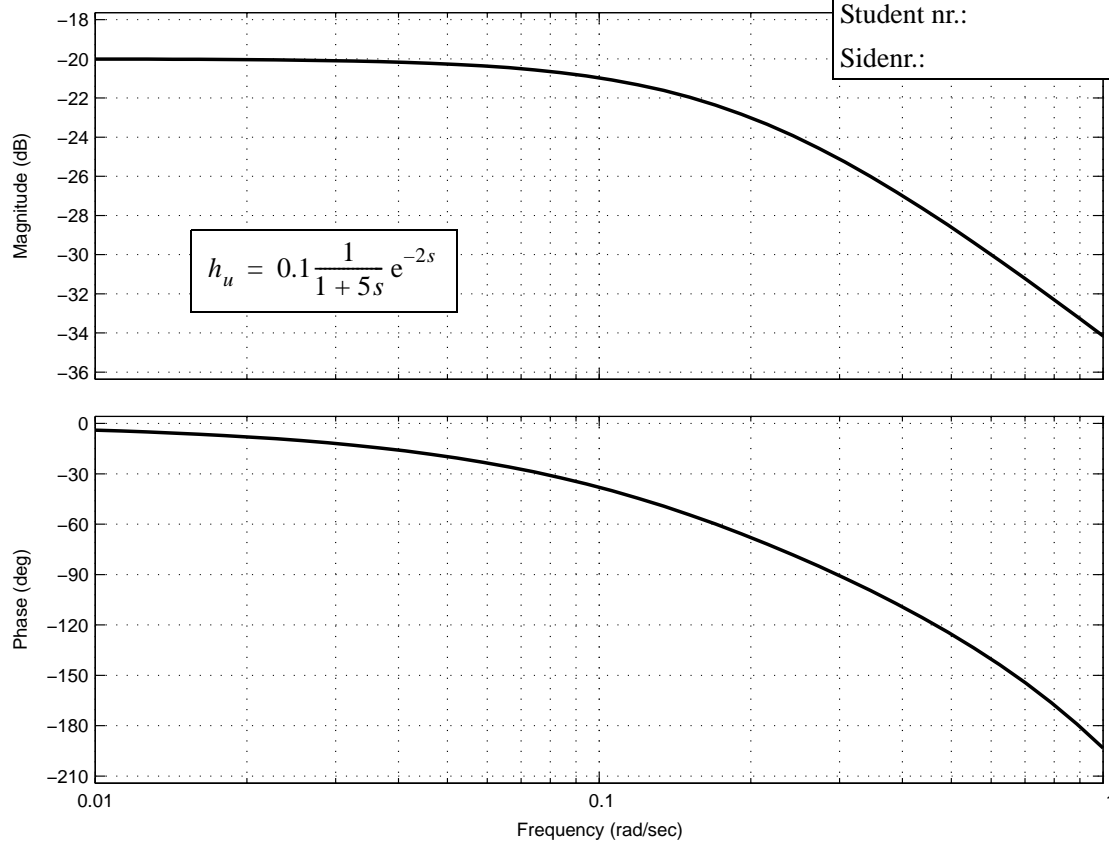
j) (8 %) Med tallverdier innsatt for et slikt system, blir Bode-diagrammet for h_u som vist i figur 1 på neste side. Finn verdier for K_p og T_i i en PI-regulator ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode (se tabell i formelsamling). Legg ved Bode-diagrammet med påtegninger, for å vise hvordan du har kommet fram til svaret!

Fag nr.: SIE3005

Dato: 15. august 2003

Student nr.:

Sidenr.:

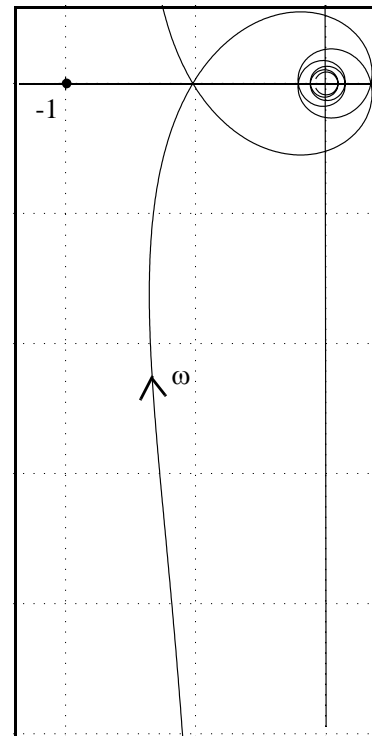


figur 1.2

- k) (7 %) Med ferdig innstilt PI-regulator blir Nyquistkurven for $h_0 = h_r h_u$ som vist i figur 1.3 . Forklar hvordan du kan se av Nyquistkurven at det er integralvirkning i regulatoren! Hvordan kan du se av kurven at det er en tidsforsinkelse i h_0 ?

Finn forsterkningsmarginen ΔK fra figuren. Er den akseptabel? Vis også i figuren hvordan du kan avlese fasemarginen ψ , men du trenger ikke finne den.

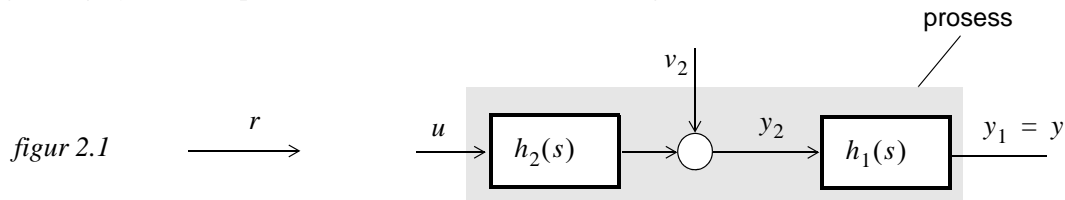
figur 1.3



- l) (4 %) Vi skal til slutt forutsette en annen driftssituasjon, nå med stort variasjonsområde for referansetemperaturen r . Da blir en lineær prosessmodell utilstrekkelig. Du skal identifisere, og kort forklare om, én ulinearitet i prosessen som man da må ta hensyn til! (Tips: Det er flere ulineariteter.)

Oppgave 2 (12 %)

En prosess kan deles opp i to delsystemer i serie slik som vist i figur 2.1. En forstyrrelse angriper ved inngangen til det høyre delsystemet. Man velger kompensasjon ved intern tilbakekopling (kaskade-reguleringssystem) for prosessen. Referansen som y skal følge, er r .



- a) (6 %) Kall regulatorene for h_{r1} og h_{r2} , og tegn blokkdiagram for prosessen med kompensasjon ved intern tilbakekopling.
- b) (6 %) Forklar hvorfor reguleringsegenskapene – både når det gjelder å undertrykke forstyrrelsen og når det gjelder å følge referansen – kan gjøres bedre med bruk av kompensasjon ved intern tilbakekopling, sammenliknet med bruk av vanlig seriekompensasjon.

Oppgave 3 (8%)

Det skal lages en diskret PI-regulator. Tastetida (“samplingstida”) er $T = 0.5$.

Regulatorparametrene er $K_p = 2$ og $T_i = 10$.

Svaret skal uttrykkes som en rekursiv formel, hvor du skal finne de tre koeffisientene f_1, g_0, g_1 :

$$u[k+1] = f_1 u[k] + g_0 e[k+1] + g_1 e[k] \quad (3.1)$$

Oppgave 4 (2 %)

Når trengs anti-overlading (“anti-windup”)? Kort verbalt svar!

Oppgave 5 (10 %)

Gitt prosessen beskrevet av $\ddot{y} + \omega^2 y = u + \beta \dot{u}$, der ω^2, β er konstanter > 0 . (5.1)

a) (2 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s)$

b) (4 %) Vi søker $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ i en tilstandsrommodell som representerer systemet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad \text{Vis at en slik } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Finn de tilhørende } \mathbf{b} \text{ og } \mathbf{c}^T. \quad (5.2)$$

c) (2 %) Finn egenverdiene og en egenvektormatrise \mathbf{M} .

d) (2 %) Hva betyr koeffisienten β for prosessens stabilitet? Er prosessen asymptotisk stabil, marginalt stabil eller ustabil? Begrunn svaret!

Løsningsforslag i SIE3005 reguleringssteknikk,
eksamen 15/8 - 03

Oppgave 1a) Fra fig. 1.1. ser vi at volumet mellom varmeelement og temp.-måling er $A \cdot l = V$.

∴ løpet av τ tidseenheter fylles dette volumet med ny luft $\Rightarrow q \cdot \tau = V = A \cdot l \Rightarrow \tau = \underline{\underline{A \cdot l / q}}$

1b) Effektbalansie rundt varmeelementet:

$$C \overset{\circ}{x}_1 = -g(x_1 - x_2) + G \cdot u \quad (1)$$

(akkumulert) (bortledet) (tilført)

Dessuten: All varme som strømmer ut fra elementet tas opp av forblisstrømmende luft:

$$g(x_1 - x_2) = \beta p q (x_2 - v) \quad (2)$$

Løser (2) m.h.p x_1 og bruker $\beta = \beta p q$:

$$x_1 = \frac{g + \beta}{g} x_2 - \frac{\beta}{g} v \quad (3)$$

Setter (3) inn i (1) og Laplacetransformerer:

$$C \frac{g + \beta}{g} s \cdot x_2 - C \frac{\beta}{g} s \cdot v = -g \left(\frac{g + \beta}{g} x_2 - \frac{\beta}{g} v - x_2 \right) + G \cdot u \quad (4)$$

$$\Rightarrow C \frac{g + \beta}{g} s x_2 + \beta x_2 = \left(\beta + C \frac{\beta}{g} s \right) v + G \cdot u \quad (5)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{G}{C \frac{g + \beta}{g} s + \beta} \cdot u + \frac{\beta (1 + C/g s)}{C \frac{g + \beta}{g} s + \beta} \cdot v$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{G/\beta}{C \frac{g + \beta}{g\beta} s + 1} \cdot u + \frac{1 + C/g \cdot s}{C \frac{g + \beta}{g\beta} s + 1} \cdot v$$

⇒ $T_1 = \underline{\underline{C \frac{g + \beta}{g\beta}}}$, $K_u = \underline{\underline{G/\beta}}$, $T_2 = \underline{\underline{C/g}}$

{ Med $y = e^{-\tau s} \cdot x_2$, følger (1,1)

1c) Nei, den inneholder en tidsforinkelse.
 Alternativt: Tidsforinkelsen e^{-Ts} kan tilnærmes med et rasjant uttrykk i s. Da går det.

1d) $x_{20} = y_0$ fordi tidsforinkelsen ikke spiller noen rolle når de variable er konstante.

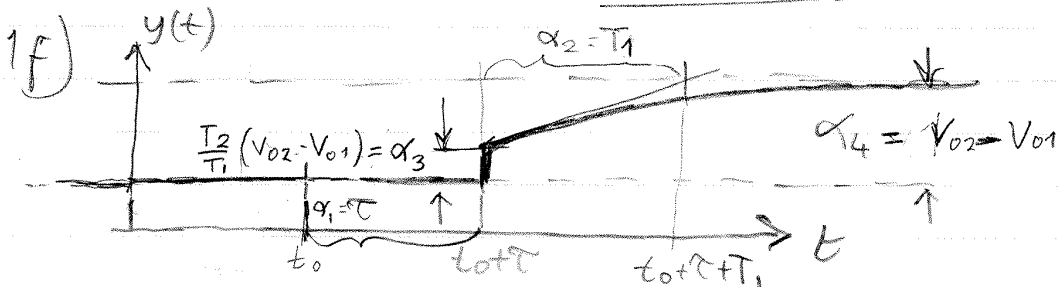
Da blir $x_{20} = h_u(s)|_{s=0} \cdot u_0 + h_v(s)|_{s=0} \cdot v_0 = \underline{K_u \cdot u_0 + V_0}$

Vi setter $u_0 = 0$ (superposisjonsprinsippet gjelder):
 Ingen effekt på systemet og konstant temperatur v_0 inn. Da må $x_{20} = y_0$ være $= v_0 \Rightarrow K_v = 1$.

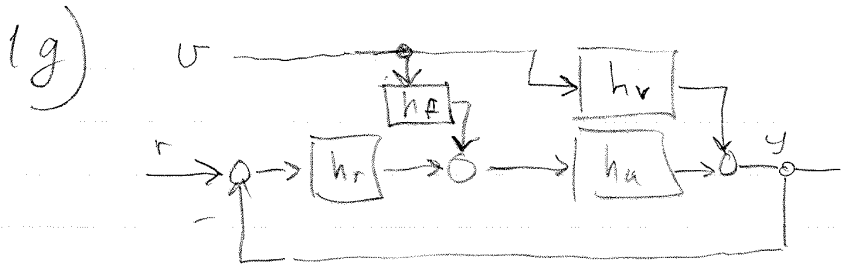
1e) Vi har fra (3) at

$$x_1 = \frac{g+\beta}{g} x_2 - \frac{\beta}{g} v \Rightarrow x_{10} = \frac{g+\beta}{g} \left(\frac{G}{\beta} u_0 + v_0 \right) - \frac{\beta}{g} v_0$$

$$= \underline{\frac{g+\beta}{\beta g} G u_0 + v_0}$$



Vi setter $u = 0$, og bruker $h_v' = K_v \frac{1+T_2 s}{1+T_1 s}$ (uten tidsforsinkelse).
 Begynnelsesteoremet: $\lim_{s \rightarrow \infty} x_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s h_v'(s) \frac{V_{02} - V_{01}}{s} = \frac{T_2}{T_1} (V_{02} - V_{01}) = \alpha_3$



1h) Vi krever $h_f h_u + h_v = 0 \Rightarrow h_f = -\frac{h_v}{h_u} = \underline{\underline{\frac{-1}{K_u} (1+T_2 s)}}$

1h) (forts.) Mer realistisk: $-\frac{1}{k_u} \frac{1+T_2s}{1+\alpha T_2s}$, $0 < \alpha < 1$

Ingen inverkan på systemets stabilitet.

1j) Slutvärdssteomet: $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} S(-h_v N) \cdot \frac{1}{s}$

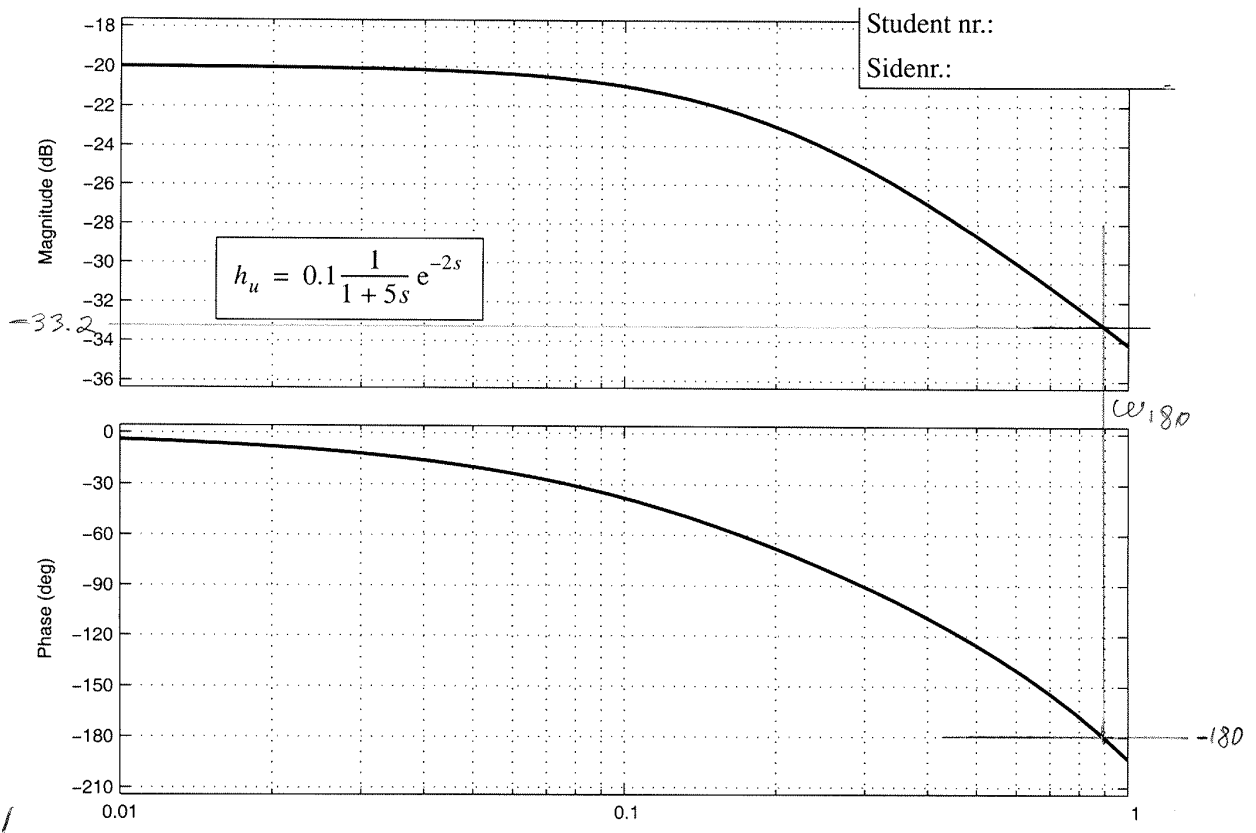
$$= -\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1+T_2s}{1+T_1s} e^{-Ts} \cdot \frac{1}{1+h_0(s)} \right) = -\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \frac{n_0(s)}{n_0(s)+t_0(s)} \right) =$$

$$= -\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1+T_1s}{(1+T_1s) + k_p k_u e^{-Ts}} \right) = -\frac{1}{1+k_p k_u}$$

Med integralvirkning (PI-regulator) blir siste mellomtrinnet derfor:

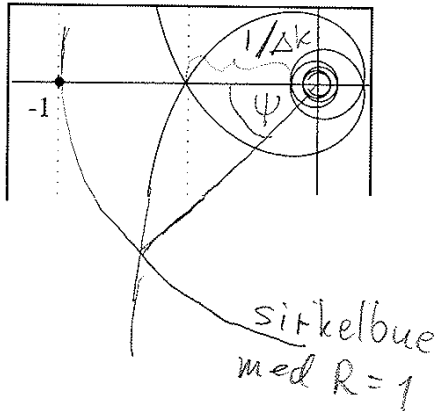
$$= -\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{T_i s (1+T_1s)}{T_i s (1+T_1s) + k_p (1+T_1s) k_u e^{-Ts}} \right) = \underline{\underline{0}}$$

1j)



$K_{pk} = 33.2$ [dB] gir stående svingning, $\omega_{180} = 0.9$
 \Rightarrow PI-reg. for $k_{pl} = \underline{\underline{26.3 \text{ dB} = 20.6}}$, $T_i = \frac{2\pi}{1.2 \cdot \omega_{180}} = \underline{\underline{5.82}}$
 (= $0.45 \cdot K_{pk}$)

1k) $|h_o(j\omega)| \rightarrow \infty$ når $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow$ det må være en integrasjon i h_o . Siden det ikke er noen i h_u , må den være i h_r .
Tidsforinkledsen sees av spiralformen nær origo.



$$1/\Delta k \approx 0.5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta k = 2 = 6 \text{ dB}}}$$

Dette er akseptabel Δk .

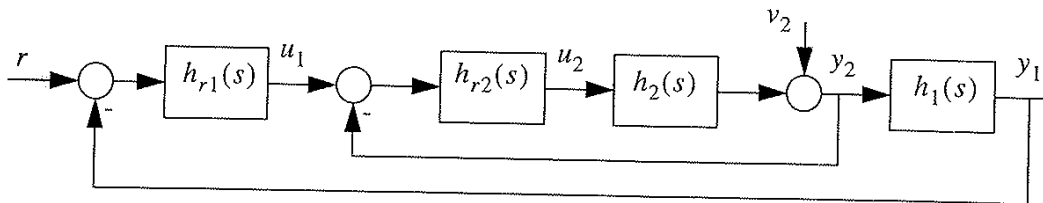
Hvordan finne ψ sees av figur til venstre.

1l) To ulineariteter skal nevnes her:

(i) Effekten er proporsjonal med spenningen kvadrert, dvs. $P = \frac{u^2}{R} \Rightarrow$ ulineart ledd i potenset

(ii) Hvis $x_2 \gg v$, dvs. kraftig oppvarming, vil lufta utvide seg merkbart etter varmeelementet. Dette betyr at tidsforinkledsen τ blir en funksjon av $x_2 \Rightarrow$ ulinearitet.

2a)



b) Ved riktig valg av $h_{r2}(s)$ kan man oppnå en reguleringsgrad $N_2(s) = \frac{1}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \ll 1$ for den indre sløyfen, noe som undertrykker forstyrrelsen kraftig før den virker på den ytre sløyfen. Riktig $h_{r2}(s)$ gir også $M_2(s) = \frac{h_2(s)h_{r2}(s)}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \approx 1$ med stor båndbredde, noe som bedrer egenskapene til den ytre sløyfen. Dermed: Høyere båndbredde, bedre stabilitets-egenskaper for det samlede system. (og/eller)

Oppgave 3) Se læreboka eksempel 11.6: Alle s

i PI-reg. erstattes med $\frac{2z-1}{Tz+1}$: $u[k] = K_p \frac{1 + T_i \left(\frac{2z-1}{Tz+1} \right)}{T_i \left(\frac{2z-1}{Tz+1} \right)} e[k]$

Vi multipliserer med $T(z+1)$ i teller og nevner, og får

$$u[k] = K_p \frac{T(z+1) + 2T_i(z-1)}{2T_i(z-1)} e[k]$$

Dette gir

$$2T_i(z-1)u[k] = K_p(T(z+1) + 2T_i(z-1)) e[k] \Leftrightarrow$$

$$u[k+1] - u[k] = \frac{K_p}{2T_i}(Te[k+1] + Te[k] + 2T_i e[k+1] - 2T_i e[k]) \Leftrightarrow$$

$$u[k+1] = u[k] + K_p \left(\left(1 + \frac{T}{2T_i}\right) e[k+1] - \left(1 - \frac{T}{2T_i}\right) e[k] \right)$$

Innsatt tallverdier $\Rightarrow \underline{f_1 = 1, g_0 = 2.05, g_1 = -1.95}$

Oppgave 4) Anti-overlading trengs når det er integralvirkning i regulatoren og det er metning i pådraget.

Oppgave 5)

a) Laplacetransformerer på begge sider av (5.1):

$$s^2 y + \omega_0^2 y = u + \beta s \cdot u \Rightarrow \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{1 + \beta s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (1)$$

b) Bruker fasevariabel form, (V.14) og (1) med $\alpha_0 = \omega_0^2$:

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

c) Egenverdier er gittene i (1): $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$

$$A \underline{m}_1 = \lambda_{1,2} \underline{m}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = +j\omega_0 \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j\omega_0 \end{bmatrix}, \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j\omega_0 & -j\omega_0 \end{bmatrix}$$

d) To distinkte pder på im -akse \Rightarrow marginalt stabil.
Kan også sees ut fra imp. respons $h(t)$, fordi $0 < h(\infty) < \infty$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0945 - 1015 og ca. kl. 1115 - 1145

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

tirsdag 24. mai 2005

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelse teller 70% på karakteren

Sensur vil foreligge innen tre uker. Følg med på fagets nettsted for mulig tidligere resultat.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

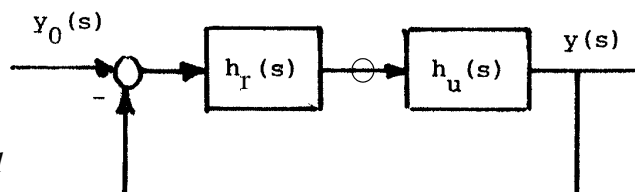
Oppgave 1 (46 %)

Figur 1.2 viser frekvensresponsen i Bodediagram for en prosess $h_u(s)$, med heltrukken linje.

- a) (5 %) Du skal foreslå en transferfunksjon for $h_u(s)$. Det oppgis at den inneholder tre ledd med tidskonstanter T_1, T_2, T_3 og en forsterkning K .
Angi en tallverdi for K . Tidskonstantene trenger du ikke angi tallverdier for, men du skal oppgi hvilken som er minst, middels og størst. (Tips: Det er to første ordens ledd i nevner, og ett i teller, dessuten er $h_u(s)$ ikke-minimum-fase.)
NB: Du kan løse resten av oppgave 1 sjøl om du ikke greier dette punktet. :-)

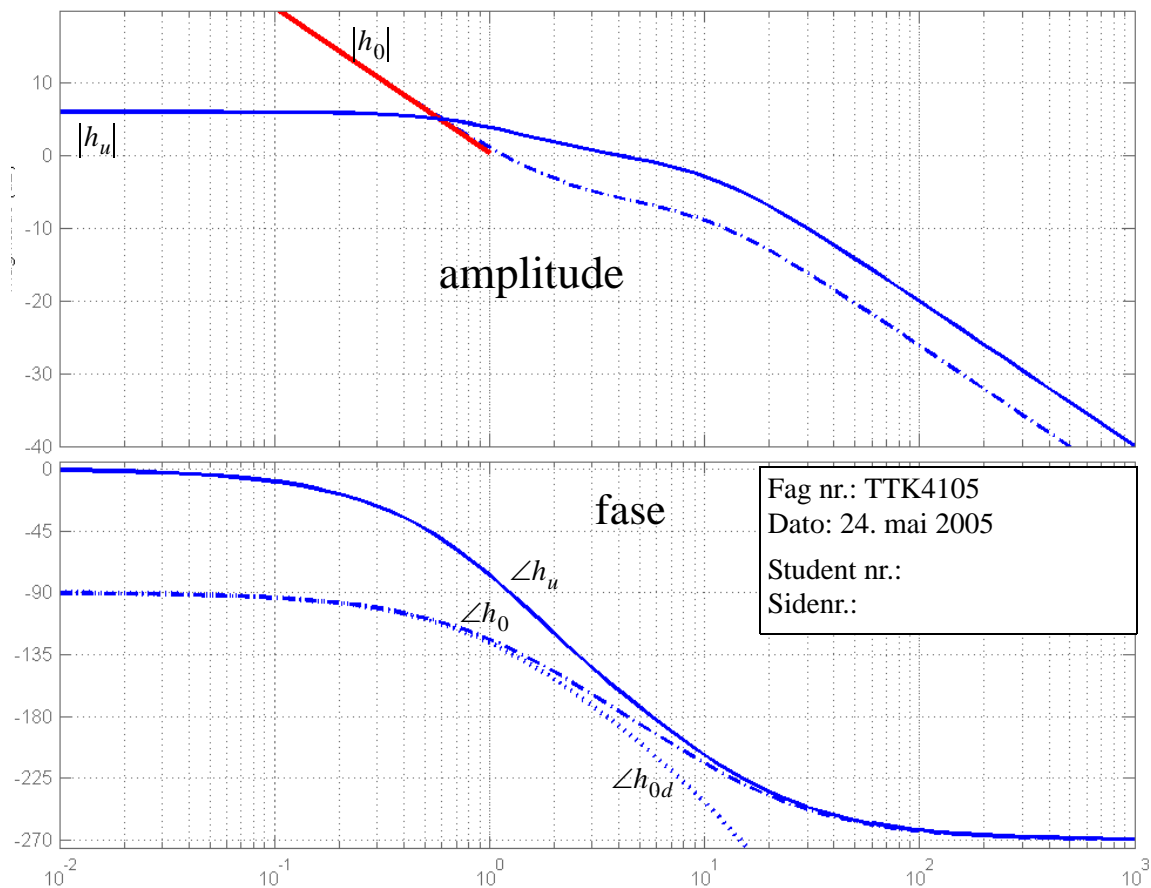
Prosessens ønskes regulert med seriekompensasjon som vist i figur 1.1 .
(Ignorer inntil videre summasjonspunktet som er antydnet foran $h_u(s)$.)

figur 1.1



- b) (2 %) Man prøver seg med en proporsjonalregulator $h_r(s) = K_p$, og setter $K_p = 1$. Hva er den viktigste grunn til at verdien $K_p = 1$ er helt uakseptabel? Begrunnet, kort og verbalt svar, som kan finnes ved å studere figur 1.2!

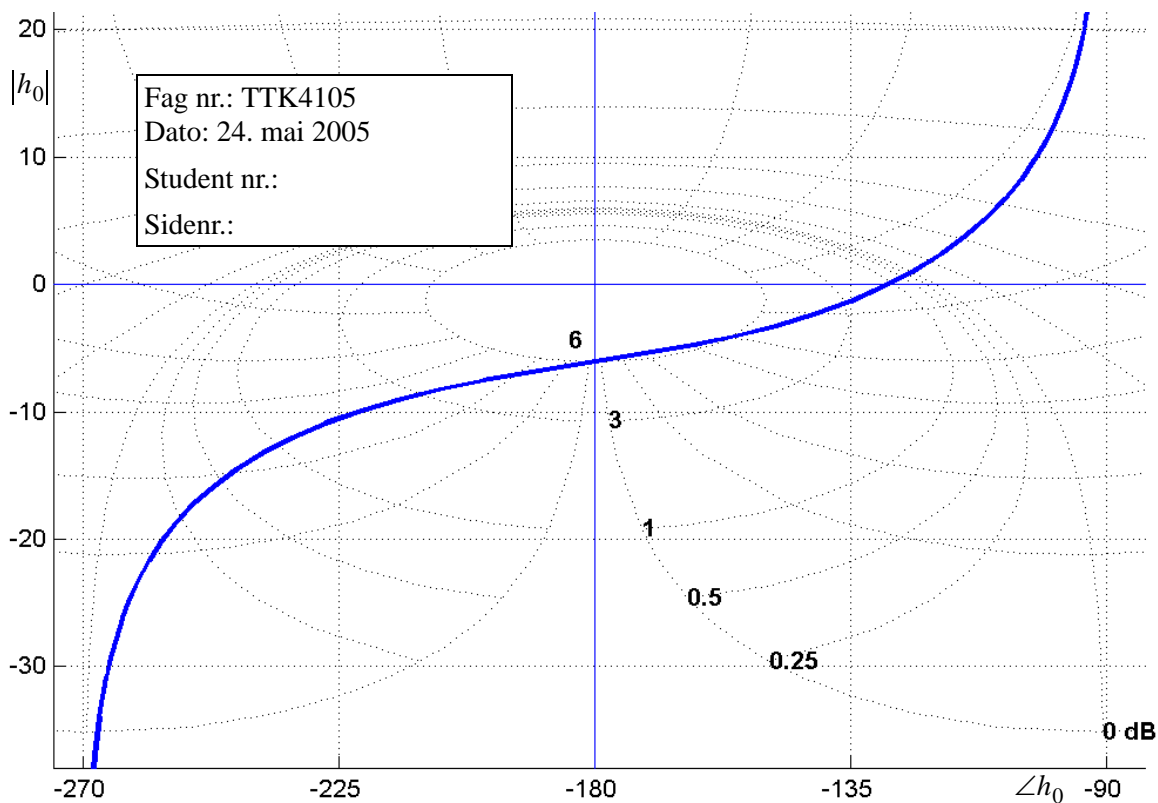
- c) (5 %) Det velges en PI-regulator $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$. Forklar kort prosedyren for å finne K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' regler. Finn så K_p og T_i .



figur 1.2

- d) (4 %) De stiplede linjene viser Bodediagram for $h_0 = h_r h_u$, med parametre valgt i følge punkt c) ovenfor. Hva blir forsterknings- og fasemargin ΔK og ψ for reguleringsystemet? ΔK skal oppgis i [dB].
- e) (4 %) Forklar hvorfor $\angle h_0$ har 90° dårligere faseforløp enn $\angle h_u$ ved lave frekvenser. Forklar hvorfor $\angle h_0$ og $\angle h_u$ faller sammen ved høye frekvenser.
- f) (4 %) Den venstre del av asymptoten for $|h_0|$ er vist i figur 1.2. Finn frekvensen hvor denne skjærer 0-dB-linja, uttrykt ved K_p , T_i , og K . (Den skal altså ikke leses av numerisk.)
- g) (4 %) Tegn inn i figur 1.2 asymptoten for forløpet til $|N(j\omega)|$ ved frekvenser noe mindre enn h_0 's kryssfrekvens ω_c . (Tips: $N = 1/(1 + h_0)$.) Tegn inn asymptoten for frekvenser noe over ω_c . Levér dette påtegnede ark som en del av besvarelsen.

- h) (6 %) Se Nichols-diagrammet med h_0 inntegnet, i figur 1.3. Markér hva som er forsterknings- og fasemargin ΔK og ψ . Levér også dette påtegnede ark som en del av besvarelsen. Hva blir maksimalverdien av $|N(j\omega)|$? Er dette en rimelig verdi? Markér verdien, og ved hvilken frekvens den inntreffer, med et tydelig punkt i Bodediagrammet i figur 1.2. Skissér inn $|N(j\omega)|$ grovt i figur 1.2 basert på dette og asymptotene fra punkt g) ovenfor.



figur 1.3

- i) (4 %) **(Generelt spørsmål, ikke knyttet spesielt til denne oppgaven:)**
 N har to forskjellige tolkninger: *Reguleringsgrad* og *avviksforhold*. Forklar begge begrep. Det kan f.eks. gjøres med utgangspunkt i et enkelt blokkdiagram som inneholder tre blokker, kalt h_r , h_u og h_v .
- j) (4 %) PI-regulatoren skal implementeres diskret. Den prikkede grafen i figur 1.2 viser det nye faseforløpet $\angle h_{0d}$ når virkninga av holdelementet er tatt med (tips: virkninga svarer omtrent til en tidsforsinkelse lik halve tastetida). Er tastetida akseptabelt liten? Finn ved hjelp av de oppgitte grafer for $\angle h_0$ og $\angle h_{0d}$, tastetida T for den diskrete regulatoren. (Tips: det er enklest å måle den størrelsen du trenger ved frekvensen 10.)
- k) (4 %) Anta at det kommer inn en målbar forstyrrelse v i summasjonspunktet som er antydnet i figur 1.1. Hva blir den ideelle forverkopling h_{fi} ? (Tips: svaret er ytterst enkelt, og kan finnes meget raskt ...)

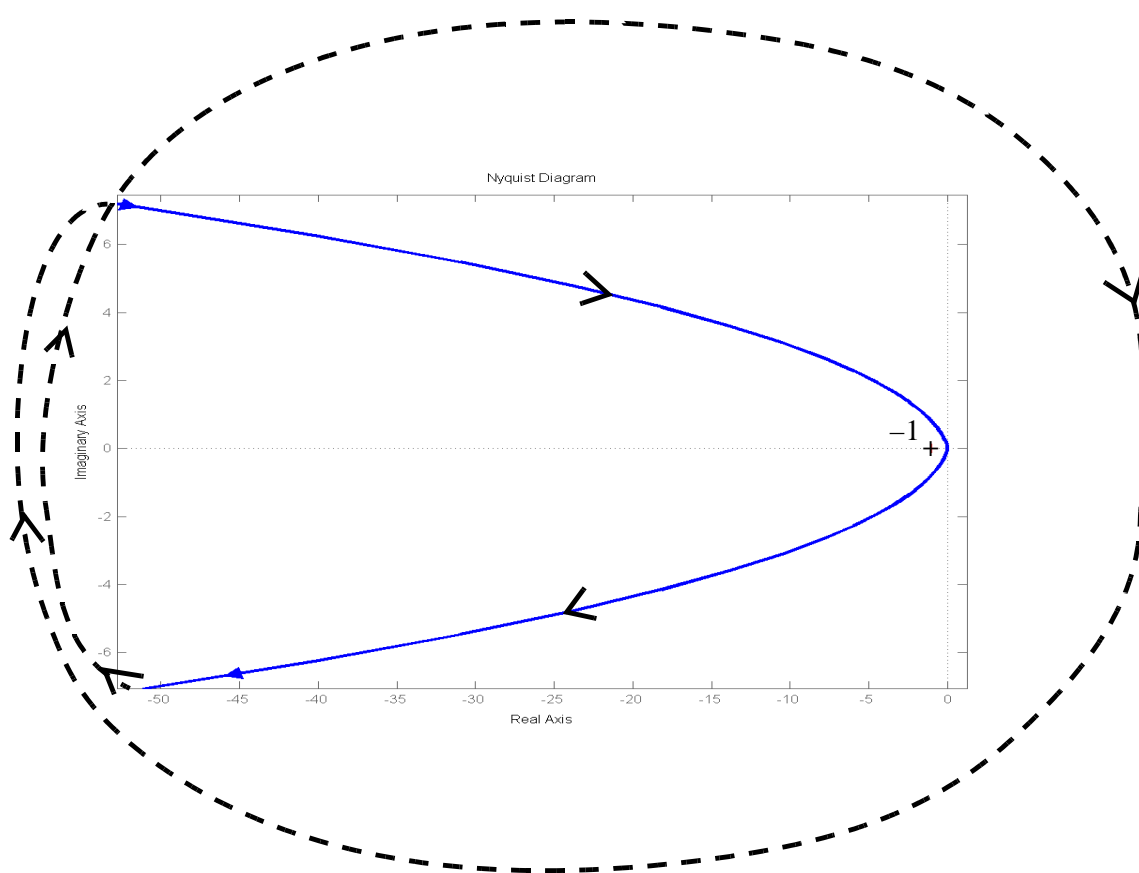
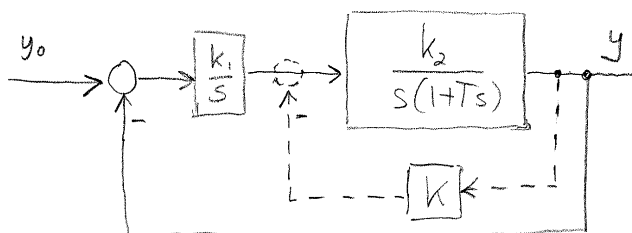
Oppgave 2 (24 %)

Gitt systemet i figur 2.1. Ignorer den stiplede tilbakekoplinga inntil videre. Konstantene k_1 , k_2 og T er alle positive.

Vi har

$$h_0(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2(1 + Ts)}$$

figur 2.1



figur 2.2

- a) (5 %) Figur 2.2 viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for h_0 , for ett sett av parametre k_1 , k_2 og T . Grafen vil ha samme kvalitative forløp for alle k_1 , k_2 og $T > 0$. Den stiplede delen av grafen indikerer en uendelig stor "sirkel". Forklar hvorfor det lukkede system i figur 2.1 er ustabil. Hvor mange poler har det lukkede system i høyre halvplan!
- b) (5 %) Systemet kan stabiliseres ved å innføre en indre tilbakekopling som er indikert stiplet i figur 2.1. Finn ved hjelp av Rouths kriterium for hvilke K det blir stabilt! (Tips: Det blir stabilt bare K er stor nok!)

- c) (5 %) Anta at K er slik at systemet er stabilt. Referansen er en rampefunksjon med Laplacetransform $y_0(s) = 1/s^2$. Finn det stasjonære avviket $e(t = \infty)$.
- d) (5 %) Med $K > 0$, skal du formulere systemet i figur 2.1 på tilstandsromform. Finn A , \underline{b} , \underline{c}^T i

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}y_0, \quad y = \underline{c}^T \underline{x}. \quad (2.1)$$

- e) (4 %) Anta at blokka med K modifiseres slik at utgangen på blokka blir $Ky|y|$, ikke Ky som til nå. Reguleringsystemet er nå ulineært. På referansen settes signalet $y_0(t) = \delta(t)$ (en impuls). Vil systemet noensinne komme til ro i $y = 0$? Vil y svinge seg ut mot uendelig amplitude? (Du skal gjøre enkle verbale betraktninger her, uten linearisering. Se dette punktet i sammenheng med punkt b) ovenfor).

Løsningsforslag eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk, 24. mai 2005

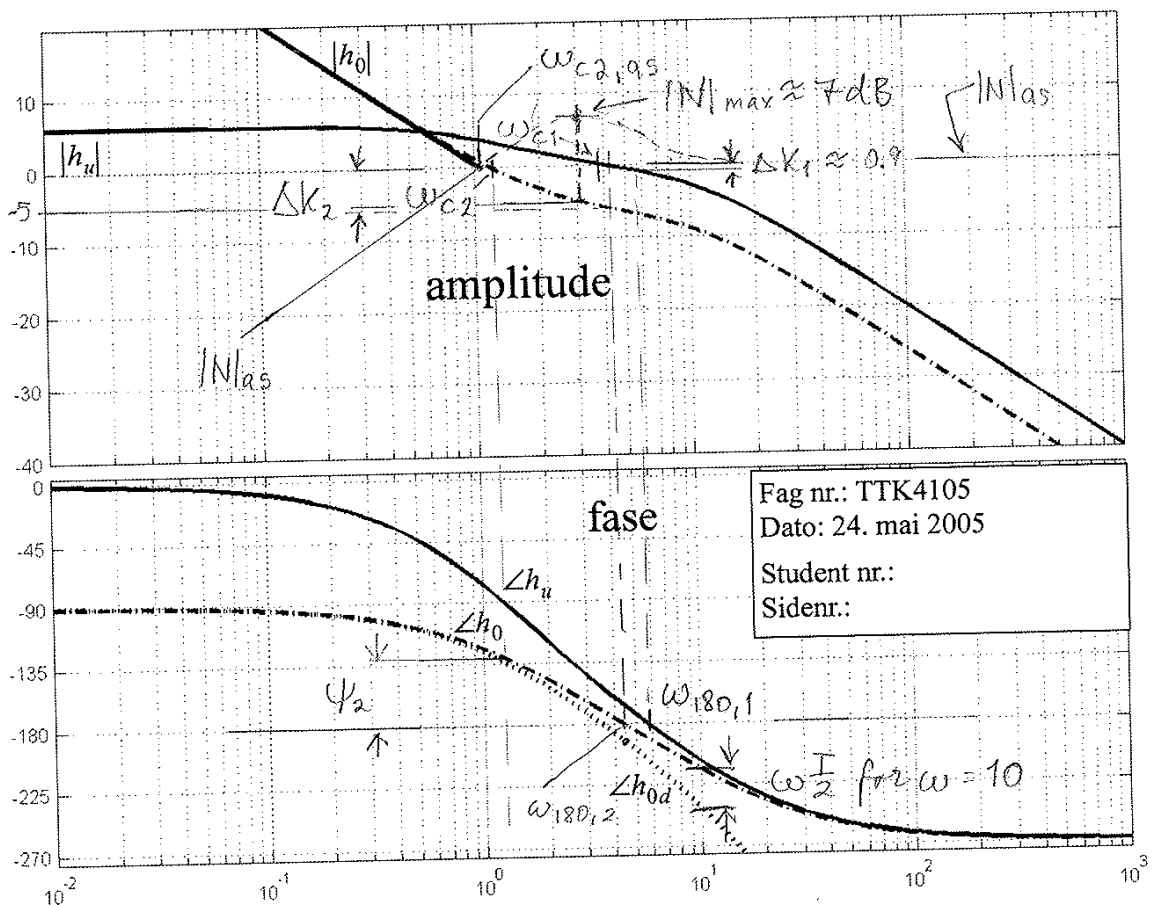
1a) Amplituden knekker opp mens fasen fortsetter å falle rundt $\omega \approx 3$: Vi har et ledd av typen $1-T_2s$ i teller.

Prøver $h_u = K \frac{1-T_2s}{(1+T_1s)(1+T_3s)}$, med $T_1 > T_2 > T_3$.

$\angle h_u(0) = 0$, $\angle h_u(j\infty) = -270^\circ$, stemmer med grafen!

$|h_u(0)| = 6 \text{ dB} \Rightarrow K = \underline{2}$. $|h_u(j\omega)|_{\omega \gg 1}$ faller med (-1) , stemmer også med grafen!

1b) ω_{c1} er for nær $\omega_{180,1}$. Forsterkningsmargin ΔK_1 blir for liten. Systemet er nesten ustabilit.



1c) Start systemet med P-regulator og liten K_p .
Øk K_p gradvis til systemet kommer i en stærke
svingning. Vi finner $\omega_{180} \approx 5.7$. Tabell V.12
gitt da $T_i = T_k / 1.2 = \frac{2\pi}{\omega_{180}} / 1.2 = \frac{2\pi}{5.7} / 1.2 = \underline{\underline{0.92}}$
 $K_p = 0.45 K_{p.krit} = 0.45 \cdot 10^{\frac{\Delta K_1}{20}} = 0.45 \cdot 10^{0.92} = \underline{\underline{0.495 \approx 0.5}}$

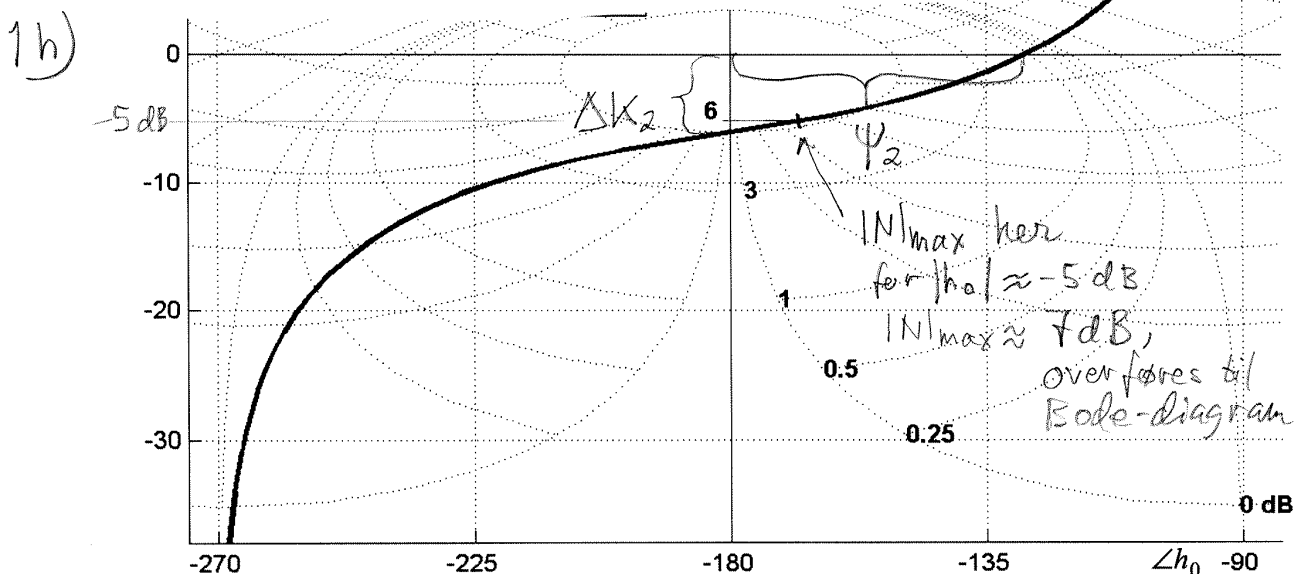
(Grafene er basert på $T_i = 0.85 \cdot T_k \approx T_k / 1.2$; jeg brukte
tilfeldigvis denne varianten da jeg laget grafene. Dette
har minimal betydning).

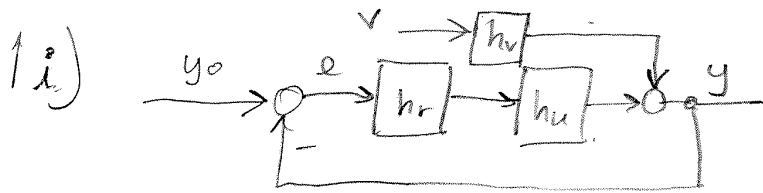
1d) Fra grafen: $\Delta K_2 \approx \underline{\underline{6dB}}$, $\psi_2 \approx \underline{\underline{51^\circ}}$

1e) $\angle h_o(0) = \angle h_u(0) - 90^\circ$, fordi $\angle h_r(0) = -90^\circ$
p-g-a integratoren i nevneren. $\angle h_o(j\infty) = \angle h_u(j\infty)$ fordi
PI-regulatoren $\rightarrow K_p$ når $\omega \rightarrow \infty$.

1f) $|h_o(j\omega)|_{as, \omega \ll 1} = \frac{K_p K}{T_i \omega} \Rightarrow \omega_{ca, as} = \underline{\underline{\frac{K_p K}{T_i}}}$

1g) se figur forrige side.





overføringsforhold = $\frac{e}{y_0} = N = \frac{1}{1+h_r+h_u} = \frac{1}{1+h_0}$

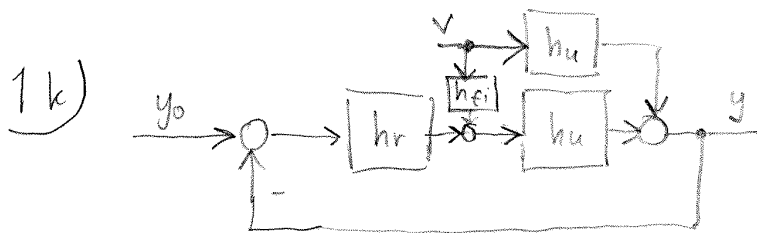
reguleringsgrad: $y_{uten} = h_v \cdot v$, $y_{med} = h_v \cdot N \cdot v$

$\frac{y_{med}}{y_{uten}} = N$. "Med" refererer sig her til "ved til-
bagekopling."

1 j) Vi har allerede, for diskret regulering,

$\Delta k_2 = 6 \text{ dB}$, $\psi_2 = 51^\circ$, $|N|_{max} = 7 \text{ dB}$. Av grafen ser vi at $\angle h_{od}$ er merkbart mer negativ nær $\omega_{180,2}$ (dvs. for $\angle h_0$). Siden Δk_2 er på grense for det vi vil akseptere og $|N|_{max}$ er noe over allerede, bør vi gå noe ned med testetida for ω° . På $\angle h_{od} \approx \angle h_0$ i dette området.

Leser av $\omega \frac{T}{2}$ for $\omega = 10$: $\frac{10T}{2} \approx 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{\underline{T \approx 0.1}}$



Vi krever $h_{fi} h_u + h_u = 0 \Rightarrow \underline{\underline{h_{fi} = -1}}$

2a) Grafen avslutter det kritiske punktet

$$2 \text{ ganger } \overset{\text{med urviseren}}{V}; \Delta \angle(1+h_0) = -4\pi$$

Vi har ingen poler i h.k.p. for $h_0 \Rightarrow N_p = 0$

$$(V.9) \text{ gir oss } \Delta \angle(1+h_0) = -2\pi(N_n - N_p)$$

$$\text{Setter inn: } -4\pi = -2\pi(N_n - 0)$$

$\Rightarrow N_n = 2$. Systemet er ustabilisert med to poler i h.k.p. for det lukkede system.

2b) Reduserer den indre sløyfa først

$$h_1 = \frac{\frac{k_2}{s(1+Ts)}}{1 + \frac{Kk_2}{s(1+Ts)}} = \frac{k_2}{Ts^2 + s + Kk_2}$$

$$h_0 \text{ blir nå: } h_0 = \frac{k_1 k_2}{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s} = \frac{t_0}{n_0}$$

Det karakteristiske polynom = nevneren i $\frac{y}{y_0}(s) =$

$$n_0 + t_0 = Ts^3 + s^2 + Kk_2 s + k_1 k_2$$

Rouths tabell blir da:

$$T \quad Kk_2$$

$$1 \quad k_1 k_2$$

$$Kk_2 - Tk_1 k_2 \Rightarrow \underline{\underline{K > k_1 T}}$$

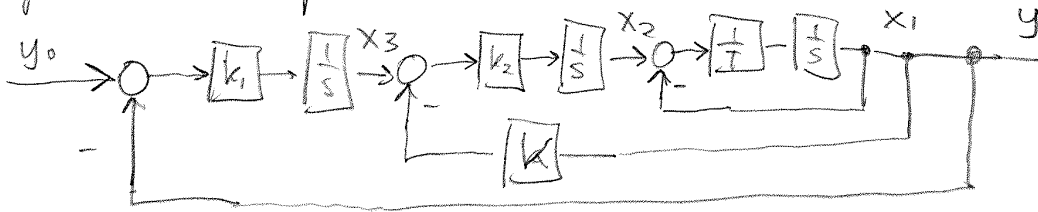
$$k_1 k_2$$

2c) Vi har en integrator i h_0 . Vi kan forvente $0 < e(\infty) < \infty$. Regner ut:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\underbrace{\frac{n_0}{n_0 + t_0}}_N \cdot y_0(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s}{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s + k_1 k_2} \cdot \frac{1}{s^2} \right) = \underline{\underline{K/k_1}}$$

- side 5 -

2d) Figur 2.1 omformet:



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & \frac{1}{T} & 0 \\ -k_2 k_1 & 0 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1 \ 0 \ 0]$$

fasevariabel form er også en metode som aksepteres her: Fra b) kan vi

$$\frac{y}{y_0}(s) = \frac{t_0}{n_0 + t_0} = \frac{k_1 k_2}{T s^3 + s^2 + K k_2 s + k_1 k_2} \cdot \text{v.13 gir da}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 k_2}{T} & -\frac{k_1 k_2}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \left[\frac{k_1 k_2}{T} \ 0 \ 0 \right]$$

2e) For små y forsvinner virkninga av tilbakekoplinga via k . Da er systemet ustabilit \Rightarrow Systemet kan ikke komme til ro i $y=0$. På den andre sida vil stor y svare til en kraftig tilbakekopling via k , da er systemet stabilt og vil ikke svinge seg ut mot uendelig amplitude: $0 < y(t) < \infty$!



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0945 - 1015 og ca. kl. 1115 - 1145

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

tirsdag 9. august 2005

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelse teller 100% på karakteren – midtsemesterprøven teller ikke

Sensur vil foreligge innen tre uker. Følg med på fagets nettsted for mulig tidligere resultat.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

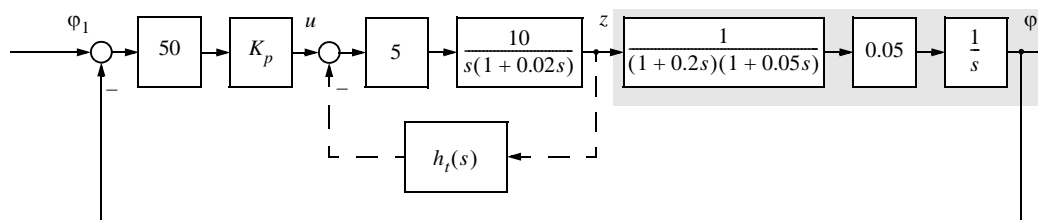
Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (18 %)

Figur 1.1 viser blokkdiagrammet for et forholdsvis komplisert elektro-hydraulisk system for dreining i horisontalplanet av ei jordbasert antenne som skal følge en satellitt over himmelen.

Referansevinkelen φ_1 er en rampefunksjon (= øker lineært med tida), og φ_2 er antennes vinkelposisjon. Se inntil videre bort fra den interne tilbakekoplinga $h_t(s)$ som er antydnet i figuren.



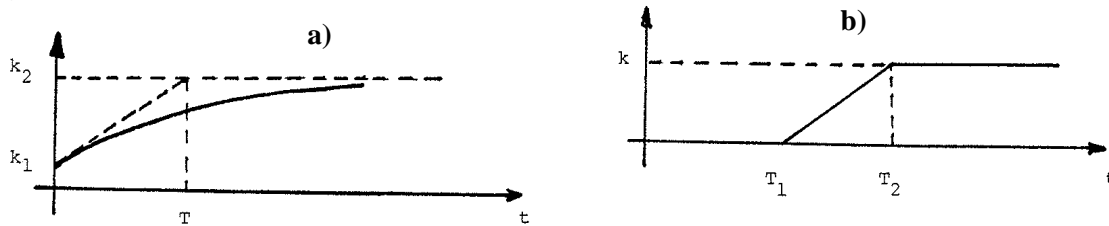
figur 1.1

- a) (8 %) Vi betrakter en del av den uregulerte (= åpne) prosessen fra z til utgangen φ_2 (det skraverte området). Sett $\varphi_2 = y$ og finn matriser A , \underline{b} , \underline{c}^T i en tilstandsrommodell

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}z, y = \underline{c}^T \underline{x}. \quad (1.1)$$

- b) (5 %) En kollega foreslår å bruke rein proporsjonalregulering K_p , uten intern tilbakekopling. Du bør svare at dette ikke er akseptabelt, uansett verdi av K_p . Forklar!
- c) (5 %) Hvis man innfører en intern tilbakekopling som en rein forsterkning: $h_t = K_t$, vil det for en passende verdi av K_t (som du ikke trenger å regne på for å besvare dette spørsmålet) løse problemet fra punkt b). Forklar!
Men en viktig egenskap med dette servosystemet vil da samtidig gå tapt. Forklar!
(En mer komplisert intern tilbakekopling vil løse begge problemer, men det er ikke tema i dette eksamenssettet ... ;-)).

Oppgave 2 (15 %)



figur 2.1

Finn rimelige transferfunksjoner som svarer til sprangresponsene i figur 2.1.

Poeng gis som følger: a) (5 %), b) (6 %).

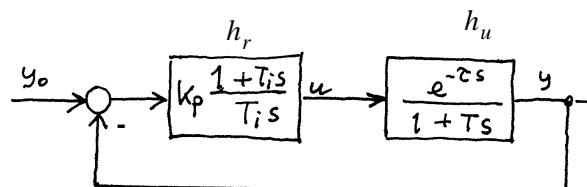
(Tips: Begge svar kan kontrolleres v.h.a. sluttverditheoremet, men dette kreves ikke. På spørsmål a) kan begynnelsesverditheoremet komme til nytte, men du kan også klare deg uten.)

- c) (4 %) Hvilke av disse transferfunksjonene svarer til systemer som er asymptotisk stabile?
Begrunnet, kort svar!

Oppgave 3 (41 %)

En prosess h_u skal reguleres med en PI-regulator h_r , som vist i figur 3.1.
En mulig framgangsmåte i dette tilfelle er å begynne med å velge $T_i = T$, og så bestemme en K_p som er akseptabel.

figur 3.1

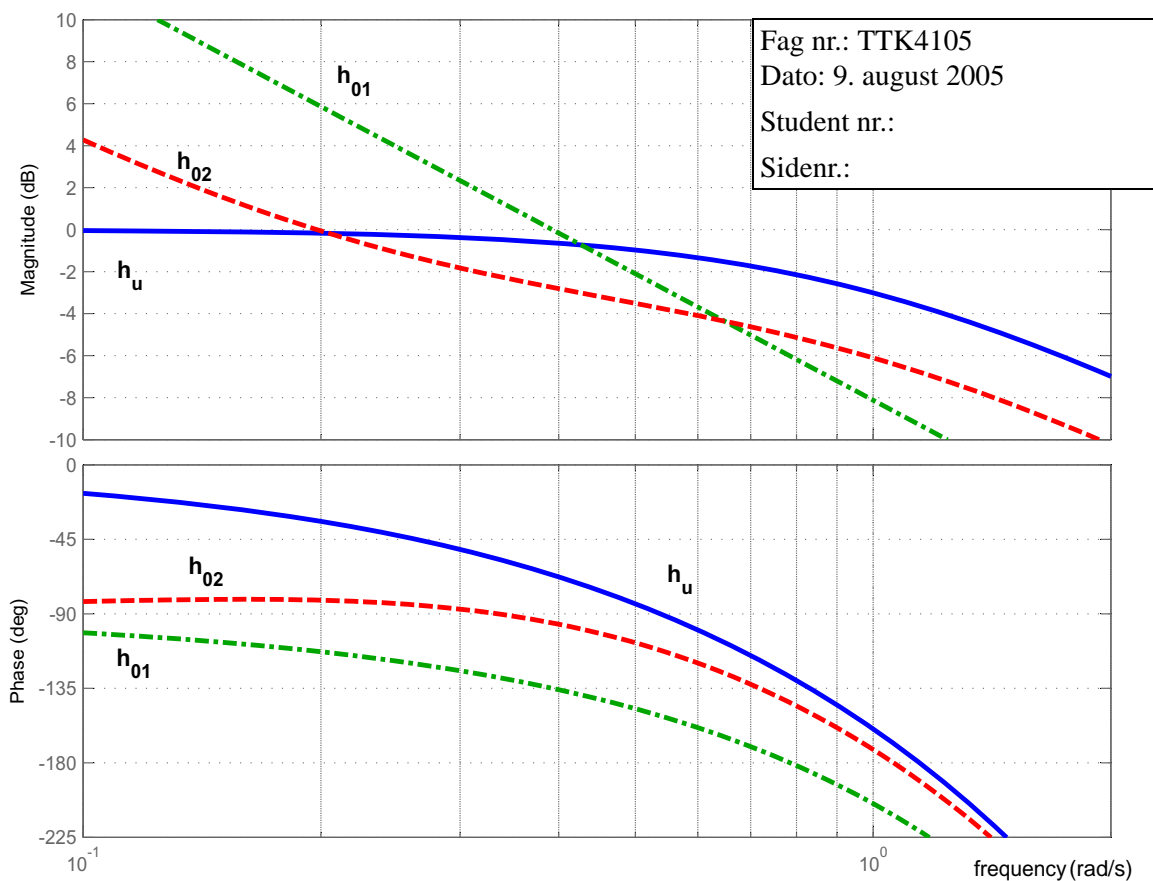


- a) (6 %) Finn den K_p som bringer systemet på stabilitetsgrensa. I dette spesielle tilfellet kan denne lett beregnes algebraisk – vi trenger ikke bruke Bode-diagram.
Er resultatet rimelig (begrunn svaret)?
(To tips: Svaret blir et uttrykk som inneholder T og τ . Et nyttig mellomresultat er at $\omega_{180} = \pi/(2\tau)$, dvs. ω_{180} er uavhengig av K_p).
- b) (6 %) Vi forlanger størst mulig båndbredde på betingelse av at forsterkningsmargin og fasemargin skal tilfredsstille henholdsvis $\Delta K \geq 6$ dB og $\psi \geq 45^\circ$. Hva blir da K_p ?
(Igjen skal du finne et algebraisk uttrykk).

Vi betegner resultatet av syntesen ovenfor med $h_{01} = h_r h_u$.

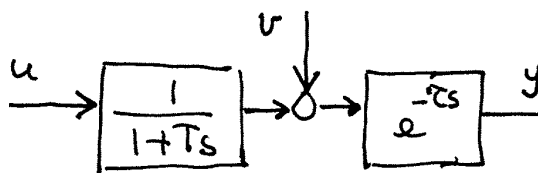
En alternativ framgangsmåte er å bruke Ziegler-Nichols' metode for å fastlegge *begge* parametre i PI-regulatoren. Regulatoren du da finner, kaller du h_{r2} .

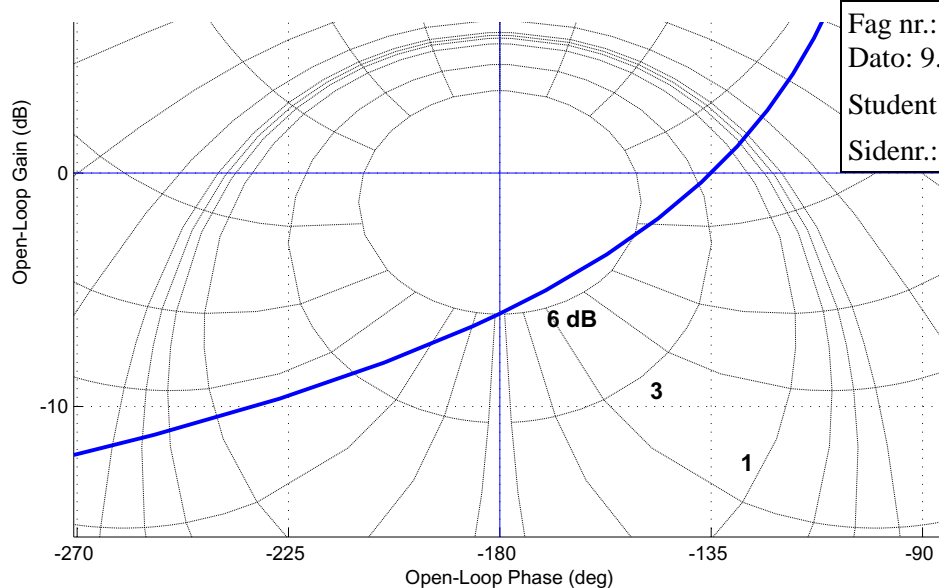
Sett fra nå av $T = 1$ og $\tau = 2$. Figur 3.2 med Bodediagrammer skal brukes i det følgende:



figur 3.2

- c) (5 %) Finn K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols metode brukt på Bodediagrammet av prosessen h_u .
- d) (4 %) I figur 3.2 er også Bodediagrammet for $h_{02} = h_{r2}h_u$, og $h_{01} = h_{r1}h_u$ fra den første metoden (med $T = 1$ og $\tau = 2$). Hvilken metode ga best resultat? Begrunnet svar!
- e) (7 %) I Nichols-diagrammet i figur 3.3 neste side er grafen for h_{01} vist. Finn maksimalverdien av $|N_1(j\omega)|$! Er den akseptabel? Hva bør eventuelt justeres noe? Finn ut ved hvilken frekvens maksimalverdien inntreffer! Skisser $|N_1(j\omega)|$ grovt i Bodediagrammet, og lever det påtegnede ark som del av besvarelsen!
- f) (5 %) En forstyrrelse v angriper inne i prosessen, som vist til høyre. Tegn blokkdiagram for reguleringsystemet med en foroverkoplingsblokk h_f lagt til i strukturen. Bruk bare symbolet h_r for regulator-blokka.





Fag nr.: TTK4105
 Dato: 9. august 2005
 Student nr.:
 Sidenr.:

figur 3.3

- g) (4 %) Finn et algebraisk uttrykk for den ideelle forkopling $h_{fi}(s)$. Finn en mer realistisk foroverkopling. (Tips: Bortsett fra fortegnet, har denne samme struktur som en begrenset PD-regulator.)
- h) (4 %) Du skal nå drøfte hva som skjer for forskjellige verdier av T og τ , og betrakter forholdet T/τ . Hvis denne brøken er liten, er foroverkoplinga mer verdifull, og omvendt. Forklar! (Dette kan gjøres verbalt uten regning – ved betraktninger på blokkdiagrammet med foroverkopling.)

Oppgave 4 (8 %)

Du skal lage en diskret PI-regulator basert på den kontinuerlige, $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Tastetida er T . Regulatoralgoritmen får formen

$$u[k] = u[k-1] + g_0 e[k] + g_1 e[k-1], \text{ der } e \text{ er avvik og } u \text{ er pådrag} \quad (4.1)$$

Finn uttrykkene for koeffisientene g_0 og g_1 .

Oppgave 5 (18 %)

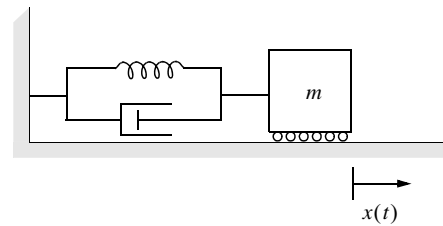
Gitt Van der Pols ligning:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \alpha > 0 \quad (5.1)$$

- a) (6 %) Definér tilstander $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$. Skriv opp ligningssettet $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$.

b) (5 %) Finn matrisa A i en linearisert modell $\Delta\dot{x} = A\Delta x$ for et vilkårlig arbeidspunkt $x^p = \begin{bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{bmatrix}$ der Δx representerer små variasjoner rundt x^p slik at $x = x^p + \Delta x$.

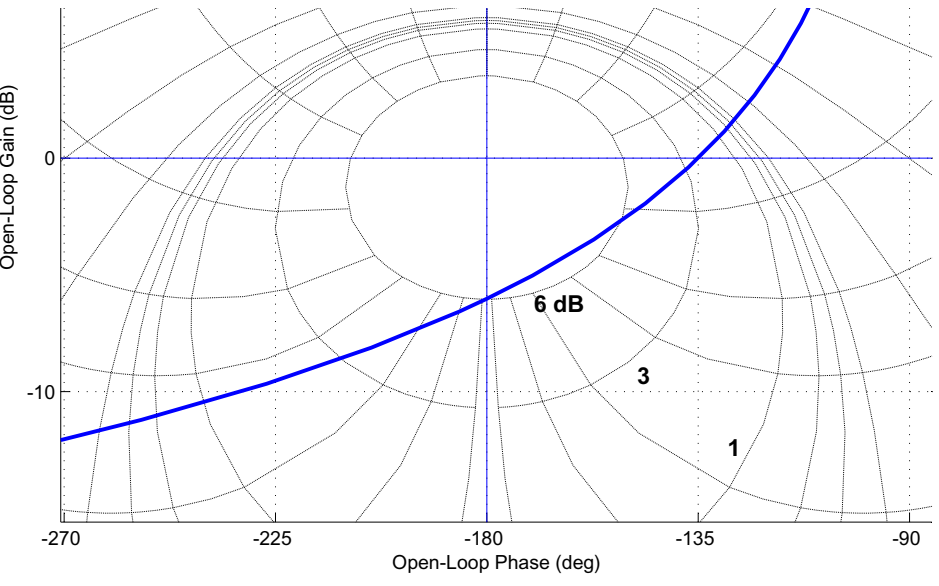
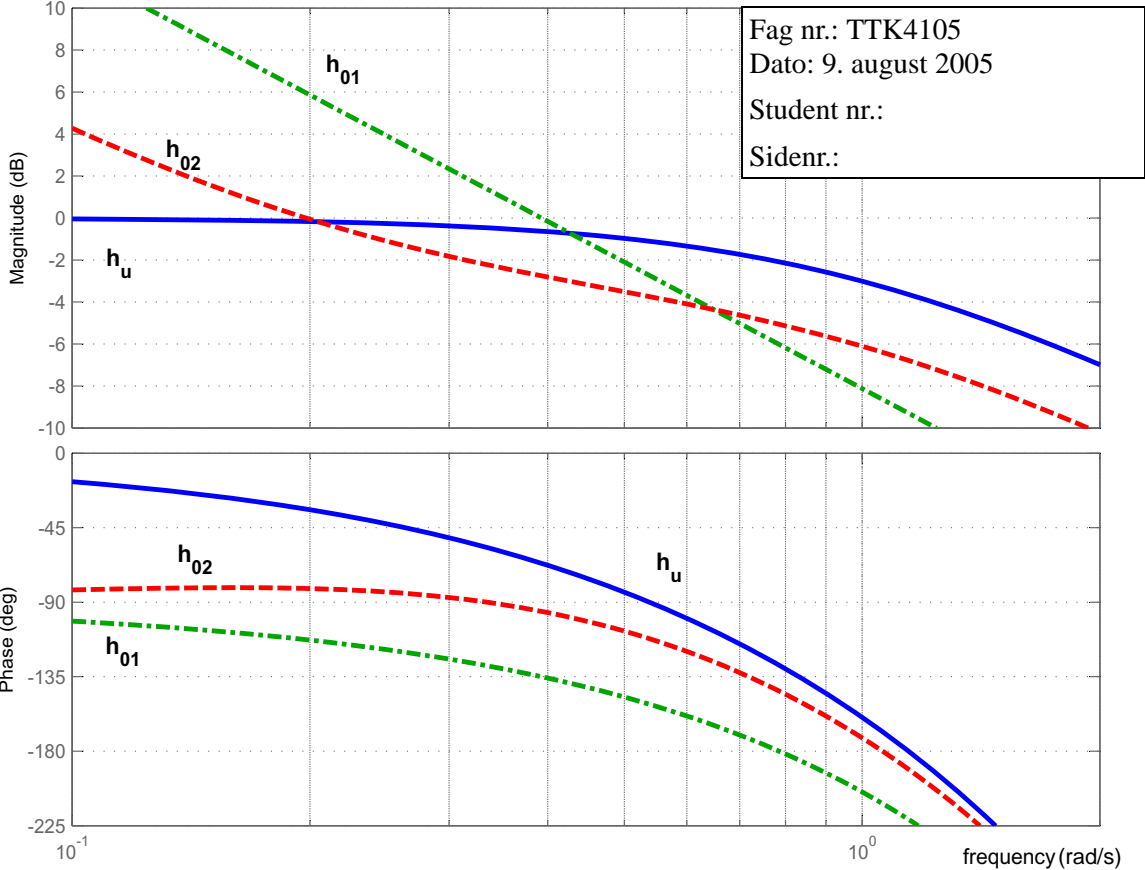
c) (7 %) Ligning (5.1) kan representere et ulineært masse-fjær-demper-system på vannrett, friksjonsløst underlag, hvor den ene av tre parametre: m = masse, f = dempekonstant, k = fjærkonstant – endrer seg avhengig av massens posisjon, mens de to andre er konstante.



Finn m , f og k for systemet gitt ved ligning (5.1).

Hvorfor vil aldri dette (merkelige) masse-fjær-demper-systemet kunne komme til ro?

Et ekstra ark, om du skulle trenge det....



Løsningsforslag TTK 4105 reguleringssteknikk

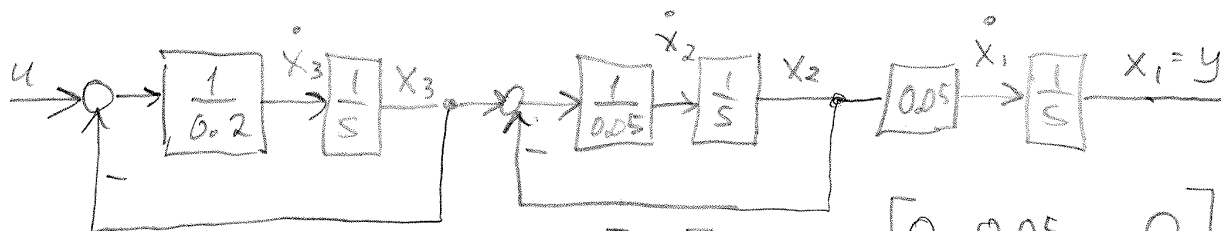
9. august 2005 (T.A.)

1a) $h_{uz} = \frac{0.05}{s(1+0.2s)(1+0.05s)} = \frac{5}{s^3 + 25s^2 + 100s}$

Metode I: fasevariabel form, (V.13):

$$\underline{c}^T = [5 \ 0 \ 0], \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -100 & -25 \end{bmatrix}$$

Metode II: davne elementært blokdiagram:



$$\Rightarrow \underline{c}^T = [1 \ 0 \ 0], \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Begge svar godtas!

1b) h_0 med bare K_p får to reelle integrasjoner i serie med tre 1.-ordersledd. $\angle h_0$ vil da $\angle -180^\circ \forall K_p$. Systemet vil være ustabil $\forall K_p$.

1c) $h_t = K_t$ endrer h_{uz} til $h_{uz}^{(2)} = \frac{50}{s(1+0.02s)}$
 $\Rightarrow h_{uz}^{(2)} = \frac{50}{0.02s^2 + s + 50K_t} \Rightarrow \angle h_{uz}^{(2)} = 0$ for lave frekvenser, og kan holdes nær 0 til høy båndbredde ved å velge K_t stor. Men $\angle h_{uz}$ starter med -90° ved lav frekvens, og faller mot -180° for $\omega > 50$. $\Rightarrow h_{uz}^{(2)}$ gjør stabilt system mulig! MEN:

Samtidig forsvinner den ene av to rene integra-
sjoner i h_0 . Dermed minsker systemet enen til å
følge referansen uten stasjonært avvik.

2a) Sprangresponsen kan betraktes som en
sum av to responser: $k_1 u_1(t) + (k_2 - k_1)(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

Laplace transformert er dette $\frac{k_1}{s} + (k_2 - k_1) \frac{1}{s(1+Ts)} = h(s) \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow h(s) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{1+Ts} = \frac{k_1 + k_2 Ts + k_2 - k_1}{1+Ts} = k_2 \frac{1 + \frac{k_1}{k_2} Ts}{1+Ts}$$

2b) Deler problemet i to. Setter først $T_1 = 0$ og finner
en transferfunksjon $h'(s)$. Responsen kan spaltes
opp i komponenter som vi ser her:



$$y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t)$$

$$y'(s) = y_1'(s) + y_2'(s) = \frac{k}{T_2-T_1} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{k}{T_2-T_1} \frac{1}{s} e^{-(T_2-T_1)s} = h'(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow h'(s) = \frac{k}{T_2-T_1} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-(T_2-T_1)s})$$

Siden den egentlige responsen er forskyvet T_1 til høyre, blir
da $h(s) = h'(s) e^{-T_1 s} = \frac{k}{T_2-T_1} \cdot \frac{1}{s} (e^{-T_1 s} - e^{-T_2 s})$

2c) Begge er a.s.!
- For impuls-
responsene $\rightarrow 0$ når
sprangresponsene \rightarrow konst.

$$3a) h_0 = K_p \frac{1+T_1 s}{T_1 s} \cdot \frac{e^{-T_1 s}}{1+Ts} = \frac{K_p}{T_1} e^{-T_1 s} \text{ når } T_1 = T.$$

$\angle h_0 = -90^\circ - \omega\tau$, spesielt er $-180^\circ = -90^\circ - \omega_{180}\tau \Rightarrow \omega_{180} = \frac{180}{2\tau}$
eller $\frac{\pi}{2\tau}$ i radianer, som brukes fra nå av (dette mellomres-
ultatet var jo oppgitt.)

$$|h_0| = \frac{K_p}{T\omega} \Rightarrow \frac{K_{p,krit}}{T\omega_{180}} = 1, \text{ da er } \omega_c = \omega_{180}, \text{ og vi er på stab.grensa.}$$

$$\text{Dette gir } K_{p,krit} = \omega_{180} \cdot T = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{\tau}$$

$$3b) \Delta K = 6 \text{ dB betyr at } K_p = 0.5 \cdot K_{p,krit} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{T}{\tau}$$

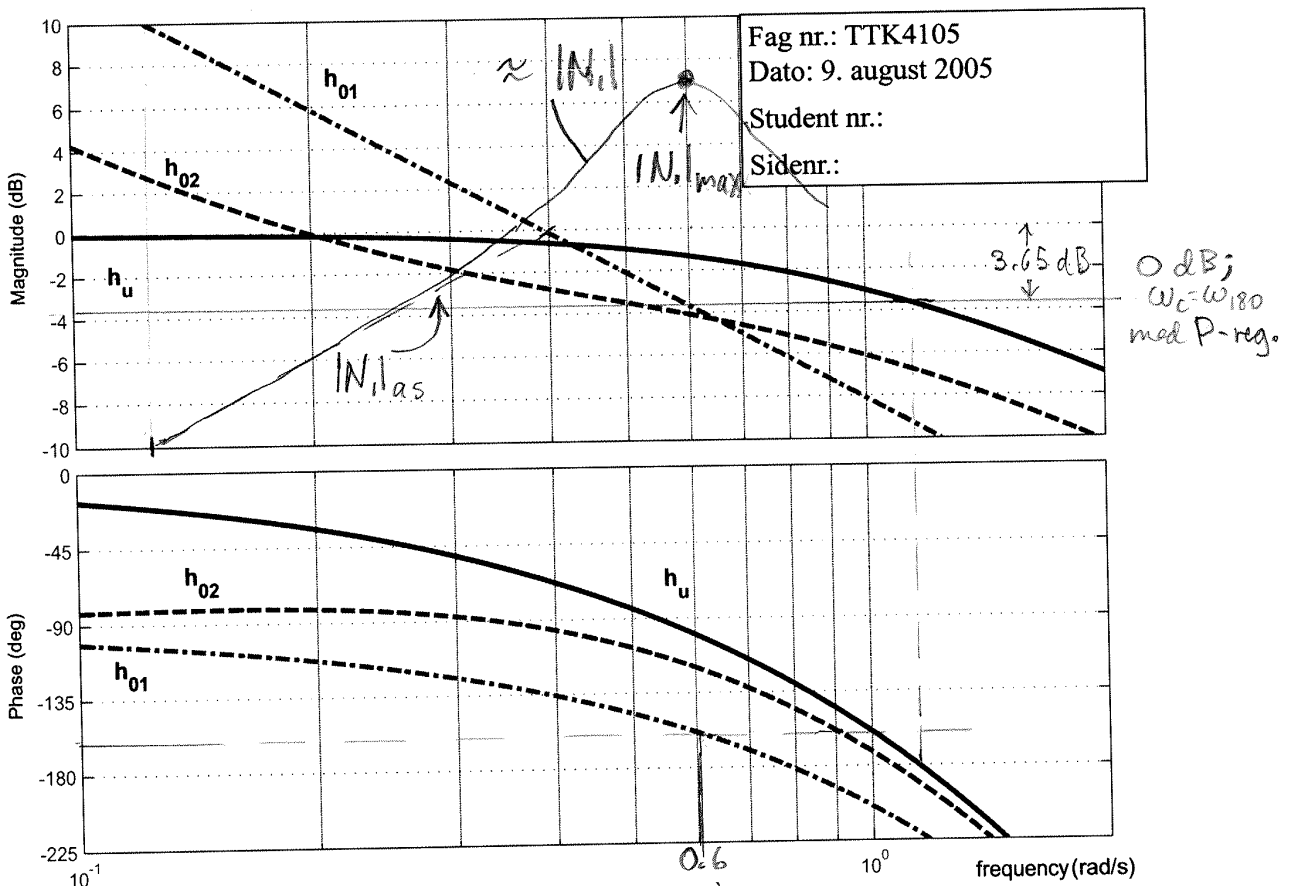
Vi må sjekke hva slags ψ dette innebærer: Kryssfrekvensen ω_c
gis av $|h_0(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{K_p}{T\omega_c} = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{K_p}{T} = \frac{\pi}{4\tau}$

$$\psi = \angle h_o(j\omega_c) - \angle h_o(j\omega_{180}) = -\frac{\pi}{2} - \omega_c \tau - (-\pi)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\tau} \cdot \tau = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$
 Med andre ord innfrin den initielt valgte k_p også alikeinrat kravet til ψ , noe som er urvanlig, og som vi måtte sjekke. Vi står derfor fast ved $k_p = \frac{\pi T}{4\tau}$.

3c) Fra h_u i Bodediagrammet: 0-dB linje kan flyttes ≈ 3.65 dB ned. Dette svarer til at $k_{p,krit.} = k_{pk} = 10$ (3.65/20)
 $= 1.92$. Fra tabell (V.12): $k_p = 0.45 k_{pk} = \underline{0.685}$

Vi leser av ω_{180} i Bode diagrammet: $\omega_{180} \approx 1.14$
 Fra tabell (V.12): $T_i = T_k / 1.2 = \frac{2\pi}{\omega_{180} \cdot 1.2} = \frac{2\pi}{1.14 \cdot 1.2} = \underline{4.6}$

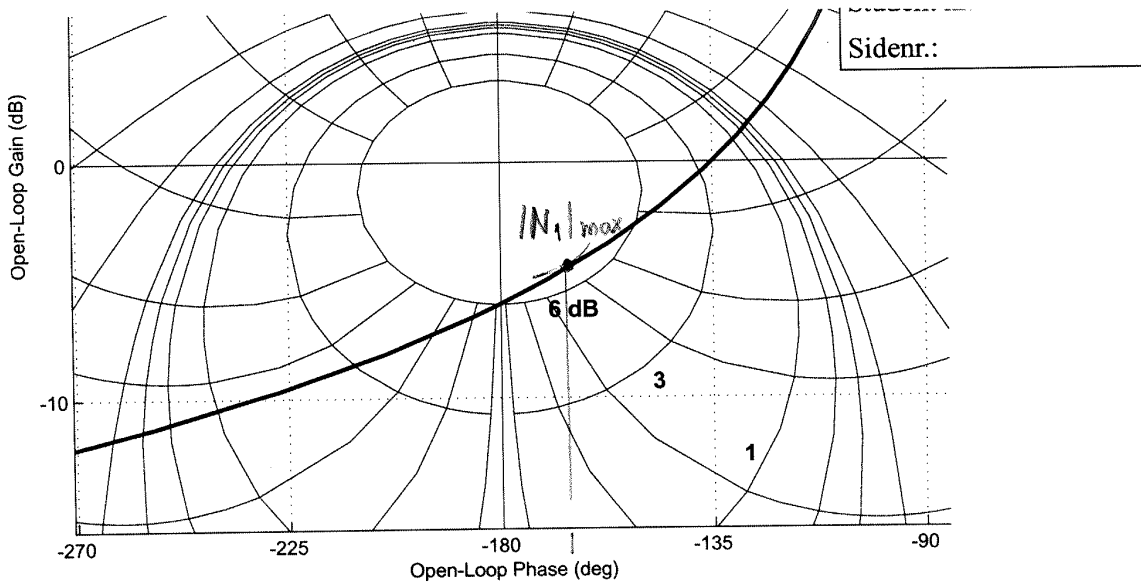


figur 3.2

$\omega \approx 0.6$ ved IN, max
 eller litt større

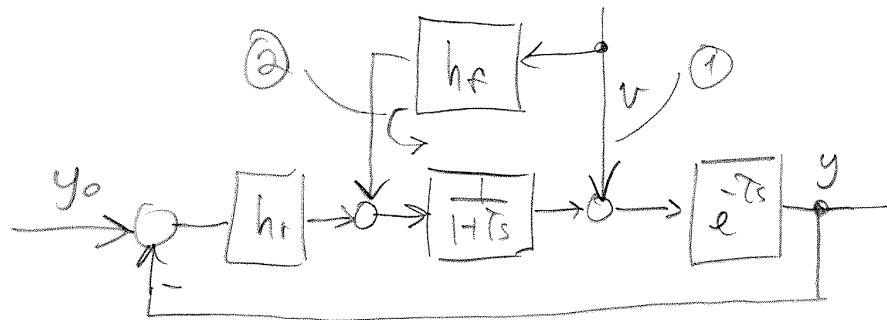
3d)

h_{02} har betydelig lavere kryssfrequens enn h_{01} , \Rightarrow h_{r2} gir langsommere regulering enn h_{r1} . Samtidig oppfyller h_{r1} kravene til ΔK og ψ , jfr. a). (uten at dette kreves, så kan man avlere en umålbart stor faremargin for $h_{02} \approx 100^\circ$!). Vi velger derfor h_{r1} , altså den første metoden!



3e) $|N_1|_{max}$ avleses til ca. 7 dB. Litt høy. K_p i h_{r1} kan reduseres litt, eller T_i kan økes litt, slik at $|N_1|_{max} < 6$ dB. Viser at $\angle h_{01} \approx -167^\circ$ ved $|N_1|_{max}$. Fra Bode-diagrammet gir dette at ω er ca. 0.6 ved $|N_1|_{max}$ (tilsvarende kunne vi ha brutt $|h_{01}|$ godtas også!) Se grov skisse av $|N_1|$ i Bodediagram forrige side.

3 f)



3g) For fullstendig kansellering av v 's virkning:

$$h_{fi} \cdot \frac{1}{1+Ts} + 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -(1+Ts)$$

Erstattes med mer realistisk $h_f = -\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$, $0 < \alpha < 1$
som ikke har $h_f(j\infty) = \infty$.

3h) Fra blokkdiagrammet i 3f): Liten T gjør den parallelle greina ② merken like raske som greina ①. Stor τ gjør at virkninga av v tas hånd om av h_i mye senere, og h_f blir dermed relativt viktigere. $\frac{1}{\tau}$ bør derfor være minst mulig for å få størst effekt av h_f .

4) Se læreboka, eksempel 11.6

Oppgave 5 a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \alpha(x_1^2 - 1)x_2 \end{cases} = \underline{f}(\underline{x})$$

5b)

Bruker (V.8): $A = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\alpha x_1^p x_2^p & -\alpha(x_1^{p^2} - 1) \end{bmatrix}$

5c)

Newtons 2. lov for lineært m-f-d-system

$$F = ma \Leftrightarrow -kx - f\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

Sammenholdes dette med (4.1), får vi $\begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ f = \alpha(x^2 - 1) \end{cases}$

Eigenverdier fra 5b) gir av

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha(x_1^p)^2 - 1 \lambda + (1 - 2\alpha x_1^p x_2^p)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha(x_1^p)^2 - 1 \pm \sqrt{(\alpha^2(x_1^p)^2 - 1)^2 - 4(1 - 2\alpha x_1^p x_2^p)}}{2}$$

Hvis $|x_1^p| \ll 1$, ser vi at $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ når $\alpha > 0$; systemet er ustabilit. Dermed kan systemet aldri komme til ro i det eneste mulige likevektspunktet $\underline{x} = \underline{0}$.

Alternativt, enklere og mer "fysisk":

"Dempningskonstanten" f blir < 0 for små x . Systemet blir da ustabilit.



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

torsdag 8. juni 2006

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelse teller 100% på karakteren.

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (34 %)

En data/video-prosjektor har ei pære med veldig høy temperatur. Temperaturen i glødetråden er x_2 . Temperaturen i glasset i pæra er x_1 . I drift er pæra kjølt av ei vifte, som blåser luft forbi den med omgivelsestemperaturen v . Effekten som leveres til glødetråden er u . En enkel lineær modell er

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dx_1}{dt} &= g_2(x_2 - x_1) - g_1(x_1 - v) \\ C_2 \frac{dx_2}{dt} &= u - g_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

der C_i, g_i er konstante koeffisienter.

a) (6 %) Finn elementene i $A, \underline{b}, \underline{e}$ i en tilstandsrommodell av systemet,

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u + \underline{e}v \tag{1.2}$$

(Merk: \underline{e} er her en vektor med konstante elementer, og har ingen ting å gjøre med symbolet e som brukes i andre sammenhenger for avvik!)

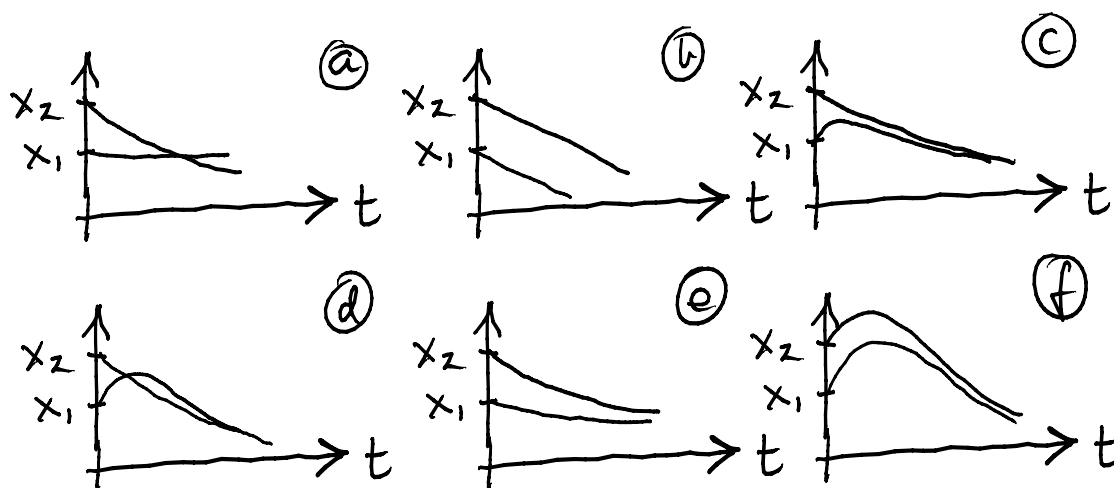
- b) (6 %) Projektoren slås av. Det er ganske opplagt hva x_1 og x_2 går mot da. Men vis hvordan dette framgår av (1.1)!
- c) (9 %) Jo større effekt u , jo større temperatur i glødetråden, x_2 . Finn transferfunksjonen $h(s)$ fra u til x_2 !
 Tips: Dette kan gjøres på flere måter. For å lette regnearbeidet oppgis følgende om $h(s)$:

$$h(s) = \frac{? \cdot s + (g_1 + g_2)}{? \cdot s^2 + [C_2(g_1 + g_2) + ?]s + g_1 g_2} \quad (1.3)$$

Du skal altså finne ut hva som skal stå der det er spørsmålstegn. Men du kommer videre på underoppgavene nedenfor sjøl om du ikke greier rett svar her.

- d) (7 %) Anta konstant effekt u_0 . Finn den stasjonære temperaturen i glødetråden x_{20} ved hjelp av sluttverdi-teoremet, når vi for enkelhets skyld setter romtemperaturen v konstant = 0 grader. Deretter: hva blir x_{20} hvis romtemperaturen er 20 grader?

Figur 1.1 viser noen mulige og umulige alternative tidsforløp når projektoren slås av.

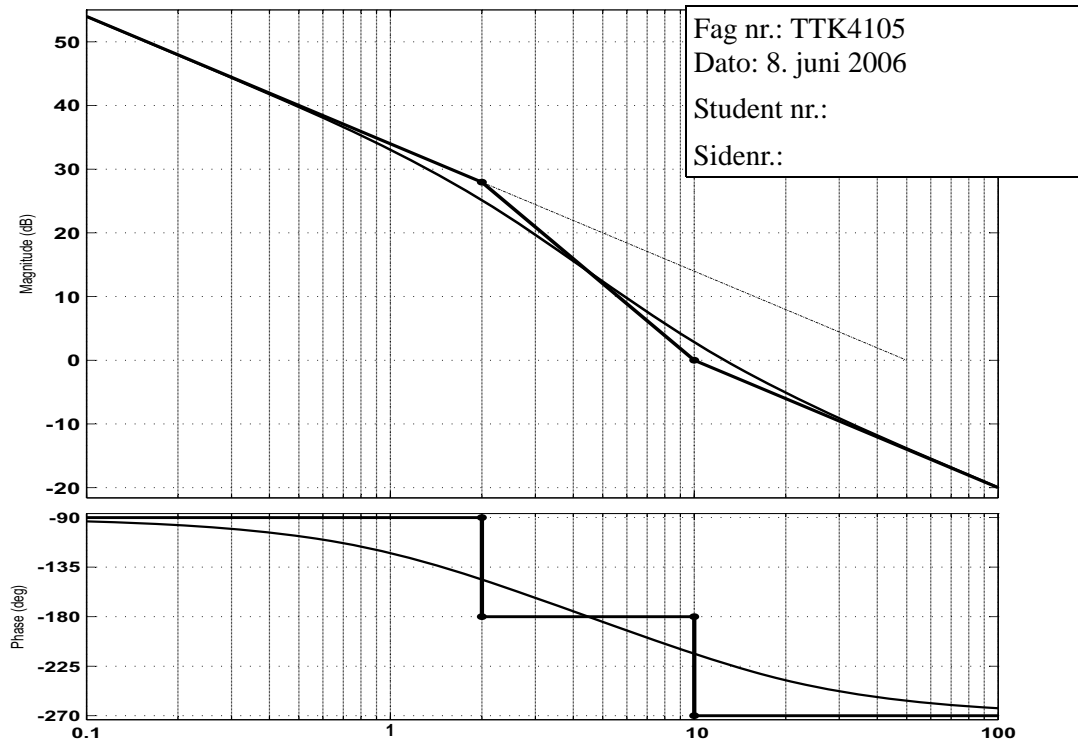


figur 1.1

- e) (3 %) Projektoren slås av på korrekt vis: da går vifta en god stund etter at at pæra er slukket. Hvilket forløp i figur 1.1 beskriver det som da skjer? Du trenger ikke begrunne ditt valg. Regning kreves ikke.
- f) (3 %) Projektoren slås av på ukorrekt vis: du drar ut støpselet og både pæra og vifte mister dermed strømmen samtidig. Hvilket forløp i figur 1.1 beskriver det som da skjer? Du trenger heller ikke her begrunne ditt valg, og regning er ikke nødvendig.

Oppgave 2 (33 %)

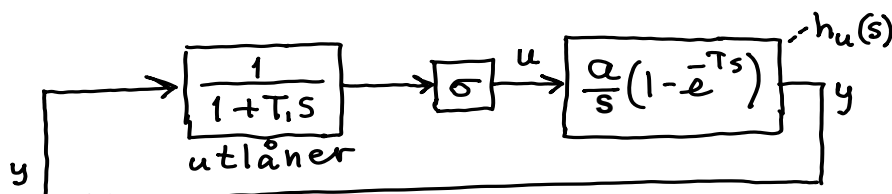
Bodediagrammet i figur 2.1 viser frekvensresponsen inklusive asymptoter til en åpent stabil prosess $h_u(s)$. Det er også tegnet inn en tynn "hjelpelinje" som du kan bruke i punkt a) nedenfor.



figur 2.1

- a) (9 %) Finn $h_u(s)$! (- Men hvis du ikke greier det, kan du likevel løse resten av oppgave 2.)
- b) (8 %) Anta at $h_u(s)$ skal reguleres med proporsjonalregulator $h_r = K_p$. Finn den K_p som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6\text{dB}$! Hva blir da fasemarginen ψ ? Tegn i Bodediagrammet, og lever det påtegnede ark som del av besvarelsen!
- c) (6 %) Ved nærmere ettertanke ønsker du integralvirkning i regulatoren, fordi du vil at reguleringsssystemet skal følge et referansesignal med null stasjonært avvik. Hvilke referansesignal (sprang, rampe og/eller parabel) vil systemet da kunne følge med null stasjonært avvik? Kort verbalt svar er tilstrekkelig, men du kan regne hvis du vil. (Tips: hvis du vil regne, kan det være nyttig å skrive $h_0 = h_r h_u$ som $h_0 = \frac{t_0}{s^2 n_0}$, der n_0 ikke har noen integrasjoner.)
- d) (6 %) Det viser seg at du for denne prosessen ikke kan bruke en PI-regulator hvis du vil ha integralvirkning. Du må da også legge inn derivatvirkning, altså bruke en PID-regulator. Forklar hvorfor!
- e) (4 %) Regulatoren skal implementeres diskret, med tastetid $T = 0.02$. Dette gir et ekstra negativt fasebidrag. Hvor stort er dette bidraget ved $\omega = 3$, i grader?

Oppgave 3 (18 %)



figur 3.1

Figur 3.1 viser blokkdiagrammet for en prosess hvor en pengeutlåner søker å øke sin inntektsstrøm y [kr./år] fra sine eksisterende utlån, ved å låne ut på nytt (re-investere) en andel $0 < \sigma < 1$ av den mottatte inntektsstrøm. Pengestrømmen av nye utlån er u [kr./år].

T [år] er lånenes nedbetalingstid.

a [1/år] er en konstant bestemt av renta r [1/år] og nedbetalingstid T . Til seinere bruk oppgis at

$$a = \frac{r}{1 - e^{-rT}} \quad (\text{merk at } r \text{ er definert slik at f.eks. } 6\% \text{ rente her blir } 0.06) \quad (3.1)$$

(For spesielt interesserte: blokka h_u beskriver et såkalt annuitetslån, i kontinuerlig-tid-versjon. *Men du trenger ikke vite noe "faglig" om økonomi for å løse denne oppgaven.*)

Utlåneren låner ikke ut sin inntektsstrøm det øyeblikk han mottar den – denne tregheten er modellert som ei 1.-ordens blokk med tidskonstant T_1 .

- a) (4 %) Kan systemet beskrives på tilstandsromform? Kort, begrunnet, verbalt svar!
- b) (6 %) Betrakt delprosessen h_u isolert (ingen tilbakekopling). Skissér impulsresponsen til h_u (bare velg og merk av en vilkårlig a og T for skisseringas del)!
- c) (8 %) Systemet har en sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = -\frac{\sigma a(1 - e^{-Ts})}{s(1 + T_1 s)} \quad (3.2)$$

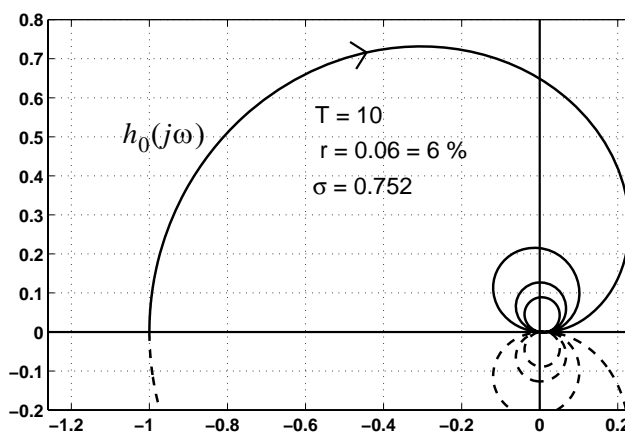
Hvorfor negativt fortegn?

Figuren til høyre viser polar(Nyquist-)diagrammet for $h_0(j\omega)$ for et sett av verdier for σ , r og T . Det oppgis at $h_0(j\omega)$ har sin mest negative realverdi for $\omega = 0$.

Bruk dette og Nyquists stabilitetskriterium til å vise at utlånerens inntektsstrøm y vil vokse hvis

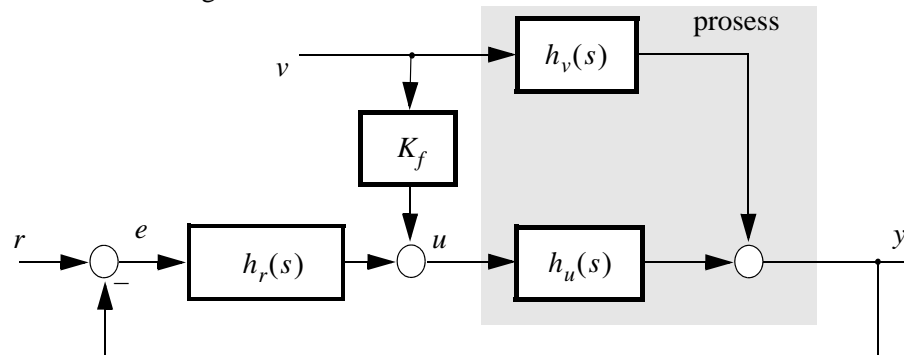
$$\sigma r T > 1 - e^{-rT} \quad !$$

(Tips: du trenger her (3.1)).



Oppgave 4 (7 %)

Gitt en reguleringsstruktur som vist i figur 4.1:



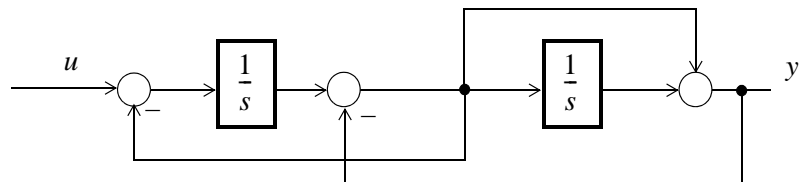
figur 4.1

Her er $h_u(s) = \frac{1}{(s+a)^2} e^{-\tau s}$ og $h_v(s) = \frac{K}{1+Ts}$.

Du skal finne en *statisk foroverkopling* (som er en konstant forsterkning, kall den K_f). K_f fjerner stasjonært avvik p.g.a. forstyrrelsen v , når v er et sprang. Finn K_f !

Oppgave 5 (8 %)

Du skal redusere blokkdiagrammet i figur 5.1, det vil si å finne transferfunksjonen fra u til y .



figur 5.1

Løsningsforslag eksamen i regulerings- teknikk 8. juni 2006, T.A.

Oppg. 1a)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{g_1+g_2}{C_1} & \frac{g_2}{C_1} \\ \frac{g_2}{C_2} & -\frac{g_2}{C_2} \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \underline{e} = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $x_1 \rightarrow v, x_2 \rightarrow v$. Benytter at \dot{x}_1 og $\dot{x}_2 = 0$
når $t = \infty$: (1.1) blir da:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= g_2(x_2 - x_1) - g_1(x_1 - v) \\ 0 &= 0 - g_2(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = v$$

c) En metode er å beregne $h(s) =$

$$[0 \ 1] \cdot (sI - A)^{-1} \cdot \underline{b}, \text{ hvor } A \text{ og } \underline{b} \text{ er gitt ovenfor.}$$

En annen er å Laplacetransformere (1.1),
eliminere x_1 og løse m.h.p. x_2/u :

$$C_1 s x_1 = g_2(x_2 - x_1) + g_1(x_1 - 0) \quad (1)$$

$$C_2 s x_2 = u - g_2(x_2 - x_1) \quad (2)$$

$$(1) \text{ gir } x_1 = \frac{g_2 x_2}{C_1 s + (g_1 + g_2)} \quad (3)$$

Setter (3) inn i (2) og multipliserer ut:

$$C_1 C_2 s^2 x_2 + C_2 (g_1 + g_2) s x_2 = [C_1 s + (g_1 + g_2)] (u - g_2 x_2) + g_2^2 x_2$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{u}(s) = h(s) = \frac{C_1 s + (g_1 + g_2)}{C_1 C_2 s^2 + [C_2 (g_1 + g_2) + g_2 C_1] s + g_1 g_2}$$

d) $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{u_0}{s}$ (sprang). $x_{20} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x_2(s) =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{x_2}{u} \cdot \frac{u_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x_2}{u}(s) \cdot u_0 = u_0 h(s) \Big|_{s=0} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 g_2} u_0$$

x_{20} øker også med 20 grader når $v = 20$.

e) Forløp ② er korrekt. [Begge temperaturer faller nær eksponentielt.]

f) Forløp ③. [I en startfase vil glasset bli varmere fordi varmen fra glødebråden akkumuleres i glasset i stedet for å bli ledet bort av kjølelufta. Dette kan skade pøra og er årsaken til at vifta går en stund etter at pøra er slått av.]

Oppgave 2 a) $|h(j\omega)| = \frac{K}{\omega} =$ rett hjelpelinje

i figur 2.1. $\frac{K}{\omega} = 1$ for $\omega = 50 \Rightarrow K = 50$.

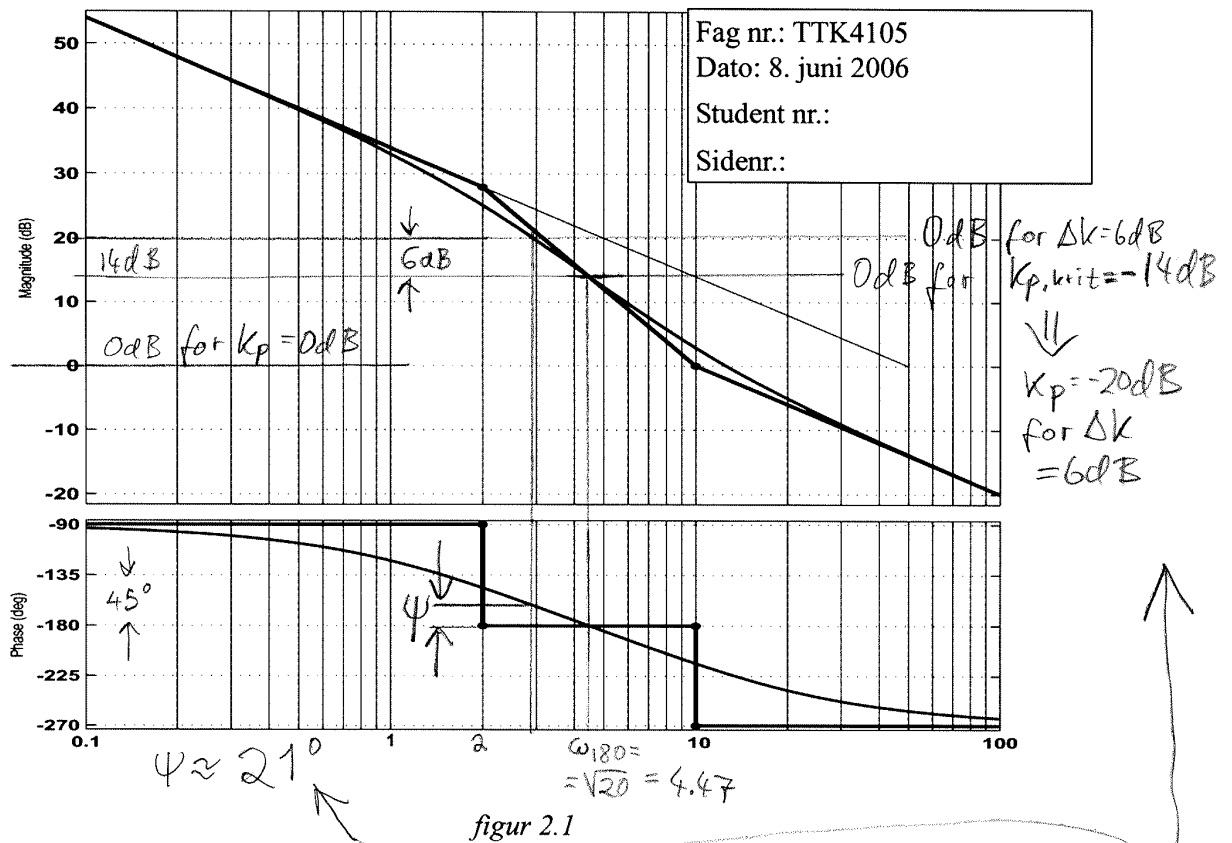
Knekk ned ved $\omega = 2$ gir tidskonstant $T_1 = 0.5$ i nevner. Knekk opp ved $\omega = 10$ gir $T_2 = 0.1$ i teller. Men telleren blir $(1 - 0.1s)$ fordi fasen knekkes ned, ikke opp. Av alt dette $\Rightarrow \underline{\underline{h_u(s) = 50 \frac{1 - 0.1s}{s(1 + 0.5s)}}$

b) Se neste side.

c) Sprang og rampe, fordi det da er to integratorer mellom referanse og utgang. Se lærebok side 307-308.

d) Med PI-regulator vil $\angle h_o(j\omega) < -180^\circ$ for $\omega \ll 1$, og bli enda mer negativ når ω øker \Rightarrow det lukkede system er ustabil. Fasen må derfor løftes over -180° nær ω_c , derfor langs derivatvirkning.

e) Tidsforsinkelser p.g.a holdedementet i den diskrete regulator er tilnærma $\frac{T}{2}$. Fasebidraget $= -\omega \frac{T}{2} = 3 \cdot 0.01 = 0.03$ rad $= 0.03 \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{1.72^\circ}}$ [= ubetydelig]



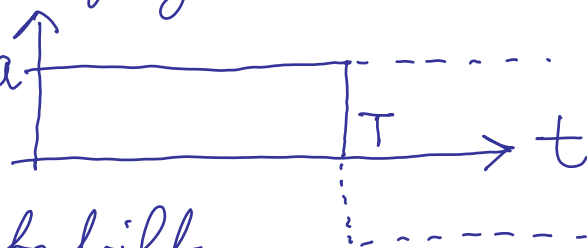
~~a) (%) Finn $h_u(s)$! (Men hvis du ikke gies 1, kan du likevel løse resten av oppgave 2.)~~

- b) (%) Anta at $h_u(s)$ skal reguleres med proporsjonalregulator $h_r = K_p$. Finn den K_p som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6\text{dB}$! Hva blir da fasemarginen ψ ? Tegn i Bodediagrammet, og lever det påtegnede ark som del av besvarelsen!

Oppgave 3a)

Kan ikke beskrives på t -form fordi det inneholder en tidsforsinkelse. Alternativt, e^{-Ts} må approksimeres med et rasjonalt uttrykk i s .

b) $h_u(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} \Rightarrow$ impulsresponsen blir summen av et sprang og et negativt og forsinket sprang:



c) Systemet er åpent stabilt, så vi må bare sjekke at $h_o(j\omega)$ går på venstre side av $-1 \Rightarrow$ ustabilitet \Leftrightarrow velut. Det er oppgitt at $h_o(j\omega)$ er mest negativ for $\omega=0$. Da blir kravet $h_o(j0) < -1$. Vi har

$$h_o(j0) = h_o(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{\sigma a}{s} \cdot \frac{(1 - [1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2!} + \dots])}{1 + Ts} \right]$$

$-\sigma a T$ (kunne også brukt L'Hopital)

$$-\sigma \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-rT}} \cdot T < -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma r T > 1 - e^{-rT}}}$$

Oppgave 4)

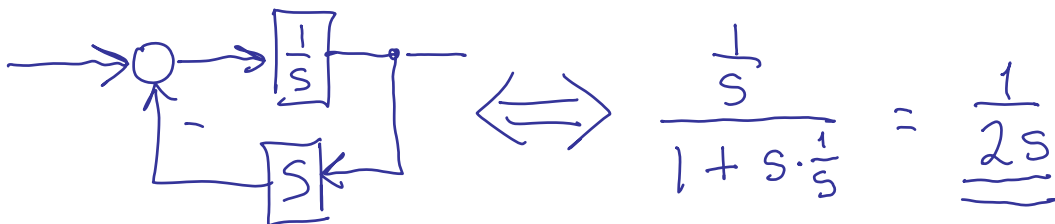
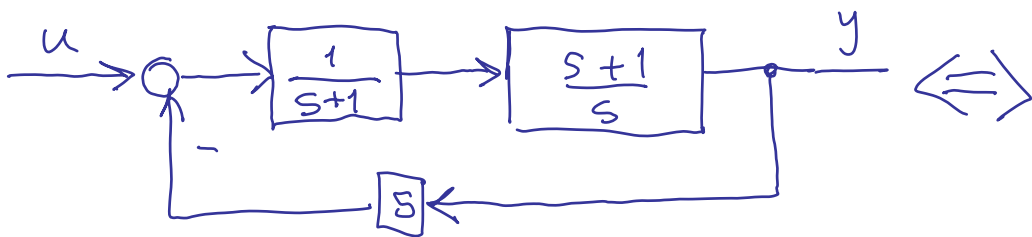
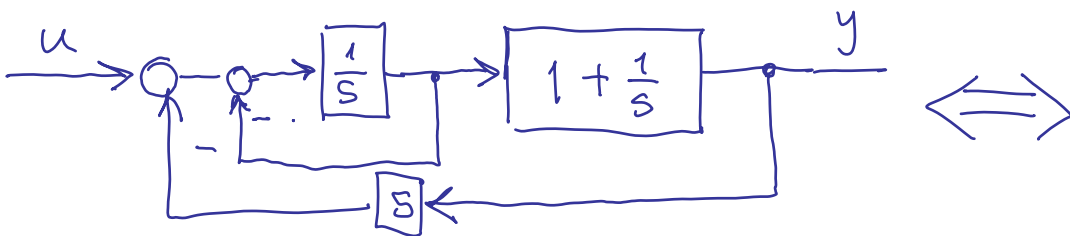
Den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$

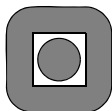
gir $h_{fi} h_u + h_v = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{h_v}{h_u}$

Den statiske foroverkopling er

$$K_f = h_{fi}(s) \Big|_{s=0} = \frac{-\frac{k}{1+Ts}}{\frac{1}{(s+a)^2} e^{-Ts}} \Big|_{s=0} = \underline{\underline{-ka^2}}$$

Oppgave 5)





Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 4. juni 2007

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelse teller 100% på karakteren.

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der **kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.** Oppgavesettet har dobbelt sett med sider der hvor det er slike figurer.

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (32 %) (Tips: det er ikke noe krevende regnearbeid i denne oppgaven)

Gitt prosessen
$$h_0(s) = h_r h_u(s) = K_p \frac{1 - Ts}{1 + Ts} e^{-\tau s}, T \text{ og } \tau > 0 \quad (1.1)$$

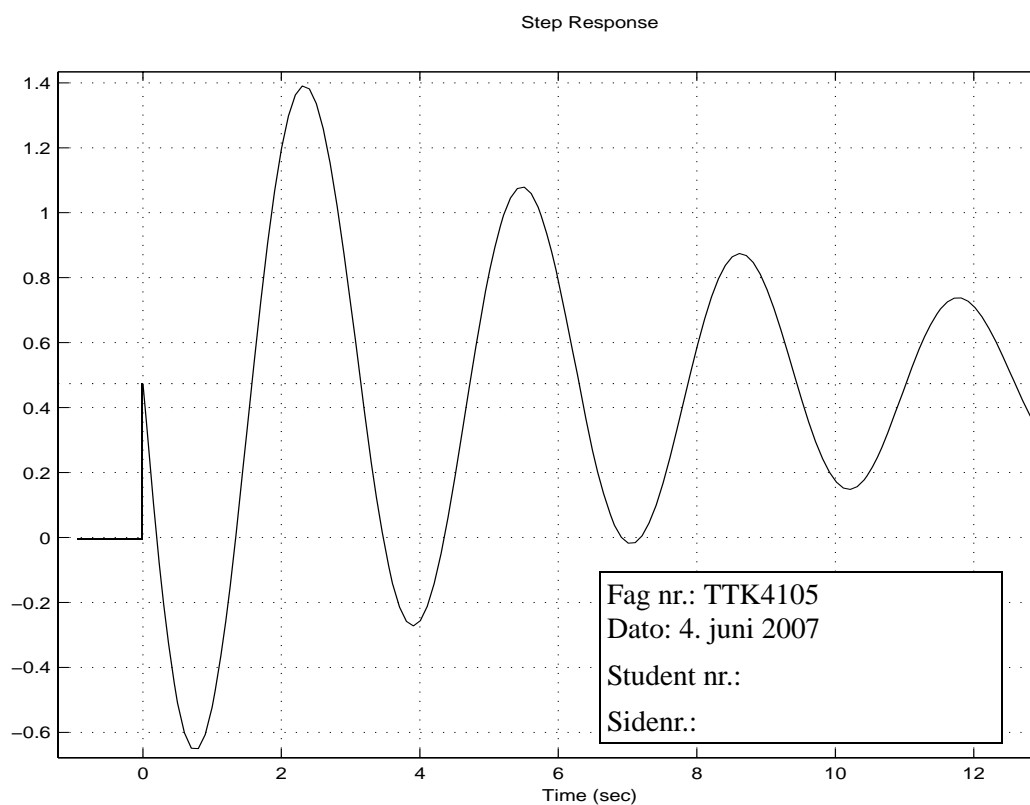
- a) (5 %) Skissér grovt enhetssprangresponsen til h_0 . Men indiker K_p , T og τ i skissen. Er systemet åpent stabilt?
- b) (3 %) Sett $K_p = 0.25$. Skissér Nyquist(= polar)diagrammet til h_0 .
(Tips: Diagrammet blir uhyre enkelt og ser likedan ut for alle verdier av T og $\tau > 0$).
- c) (5 %) Bruk nå Nyquist-diagrammet:
Hva blir den øvre verdi K_{pk} ($= K_{p, \text{kritisk}}$) når det lukkede system (altså med enhetstilbakekopling) er på stabilitetsgrensa?
Hva blir forsterkningsmarginen ΔK (i [dB]) når $K_p = 0.25$?
 K_p kan i dette tilfellet også være noe negativ før det lukkede system blir ustabil. Finn den nedre grensa $K_{pkn} < 0$, hvor det lukkede system blir ustabil!

- d) (4 %) Det benyttes *fra nå av og i resten av oppgaven* en rasjonal approksimasjon for $e^{-\tau s}$. Det oppgis at det lukkede system $h(s)$ da blir

$$h(s) = \frac{K_p(1 - Ts)\left(1 - \frac{\tau}{2}s\right)}{(1 + Ts)\left(1 + \frac{\tau}{2}s\right) + K_p(1 - Ts)\left(1 - \frac{\tau}{2}s\right)} \quad (1.2)$$

Hvilken rasjonal approksimasjon for $e^{-\tau s}$ er det som er benyttet?

- e) (4 %) Finn K_{pk} og K_{pkn} ved hjelp av Rouths kriterium. Sammenlign med resultatene fra punkt c).
- f) (4 %) For $K_p > K_{pk}$ blir det lukkede system ustabil. Det får N_n poler i høyre halvplan. Finn N_n ved hjelp av Nyquists kriterium!
(NB: husk at ω gjennomløper $-\infty$ til $+\infty$, ikke 0 til $+\infty$.)
Alternativt kan du finne N_n ved hjelp av Rouths kriterium.
Det gis poeng bare for ett alternativ, så du trenger ikke gjøre begge deler.
- g) (7 %) Vi setter $K_p = 0.9$, $T = 1$, $\tau = 0.5$. Inngangssignalet til $h(s)$ er et enhetsprang. Regn ut ω_0 (tips: rundt tall!). Responsen til $y(t)$ blir som vist i figur 1.1. Finn ω_0 med utgangspunkt i målinger på grafen!
(Tegn i diagrammet og lever det som del av besvarelsen.)

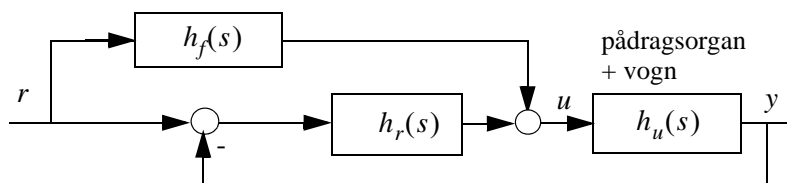


figur 1.1

Oppgave 2 (21 %)

Figur 2.1 viser en struktur med enhetstilbakekopling og foroverkopling fra referansen.

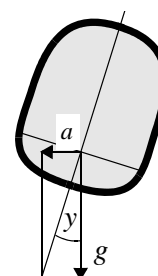
figur 2.1



a) (5 %) (Se i dette punktet bort fra figurteksten “pådragsorgan + vogn”.)

Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{r}(s)$. Finn den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$.

Vi skal nå anvende dette på et *krengetog*. Vognene skal krenge i svingene slik at vektorsummen av gravitasjon og sidekraft peker mest mulig vinkelrett mot golvet. Vi forenkler problemet til følgende: Betrakt ei enkelt vogn (figur 2.2) med treghetsmoment J [kgm²] rundt lengdeaksen. Vogna tenkes å være opplagret i sitt tyngdepunkt. Vi har med andre ord ingen pendelvirkning – i den grad vogna dreier seg rundt sin lengdeakse, er det fordi den påsettes et ytre dreiemoment d [Nm] fra togets reguleringssystem. Pådragsorganet har en viss treghet, og må derfor trekkes inn i prosessmodellen $h_u(s)$. Dreiemomentet d følger differensialligninga



figur 2.2

$$\dot{d} = \frac{1}{T}(-d + Ku) \quad (2.1)$$

I dette tilfellet er u signalet *inn* på pådragsorganet. Vinkelposisjonen y til vogna betraktes som systemutgang. Parameteren g er tyngdens akselerasjon, og sentripetalakselerasjonen kalles a . $a(t)$ måles, og omregnes løpende til en ekvivalent referansevinkel $r(t)$ for vogna, $r = \arctg(a/g)$ (men du trenger ikke denne formelen til spørsmålene i denne oppgaven, så dette var bare for å bidra til å forklare systemets virkemåte.)

b) (7 %) Vis at den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$ fra r til u i dette tilfellet blir

$$h_{fi}(s) = \frac{J}{K}(s^2 + Ts^3). \quad (2.2)$$

Foreslå en mer realistisk foroverkopling $h_f(s)$ som har den egenskap at dens amplitude \rightarrow konst. når $\omega \rightarrow \infty$! Hva betyr denne forverkoplinga for systemets stabilitet?

c) (4 %) Hvorfor må du ha derivatvirkning i regulatoren $h_r(s)$ for dette systemet? Verbalt svar er tilstrekkelig.

d) (5 %) Anta at vi ønsker null stasjonært avvik når referansen er en rampefunksjon; $r(t) = at, t > 0$. Trengs det integralsvirkning i regulatoren? Ut fra c) og d): Hva slags regulator ender vi da opp med? Verbale svar er tilstrekkelige.

Oppgave 3 (21 %) (diverse)

- a) (5 %) Du skal svare på om følgende systemer er asymptotisk stabile, marginalt stabile eller ustabile. De er gitt ved sine transferfunksjoner:

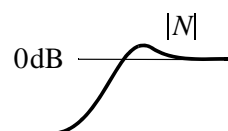
$$\frac{1}{s^2}, \frac{1-Ts}{1+Ts}, \frac{1+Ts}{1-Ts}, \frac{1}{(1+Ts)(1-Ts)}, \frac{e^{-\tau s}}{1+s^2} \quad (3.1)$$

Svar ved å angi bokstavene A, M, U i samme rekkefølge som transferfunksjonene er listet opp. For at gjetting ikke skal premieres, gis det minus ett poeng for feil svar. Sett derfor X hvis du er usikker.

- b) (2 %) Hvilke to stabile systemer i (3.1) er av ikke-minimum-fase type? Angi dem med nummer ut fra rekkefølgen i (3.1).

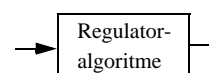
- c) (4 %) Skissen til høyre viser et typisk amplitudeforløp for et avviksforshold

$$|N(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+h_0(j\omega)} \right|, \quad h_0 = h_r h_u$$

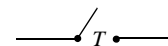


Hvilke to kvalitative endringer skjer med grafen hvis forsterkningen i regulatoren h_r økes?

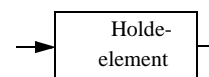
- d) (5 %) Tegn blokkdiagram hvor en generell kontinuerlig monovariabel prosess $\frac{y}{u}(s) = h_u(s)$ inngår i et diskret reguleringsystem.



(Tips: diagrammet skal bl.a. inneholde de tre elementer som er vist til høyre.) Indikér hvor $r[k]$, $y[k]$, $u[k]$, $u(t)$, $y(t)$ er i diagrammet



- e) (5 %) Hvordan går du fram hvis du vil lage en diskret regulator med utgangspunkt i en kontinuerlig regulator? Hvordan kan du ta hensyn til virkninga av tastetida T , i de tilfeller at denne er så stor at dens virkning ikke kan ignoreres?



Oppgave 4 (10 %)

Gitt en prosess $\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ (4.1)

- a) (5 %) Vis at denne kan representeres ved tilstandsromformen

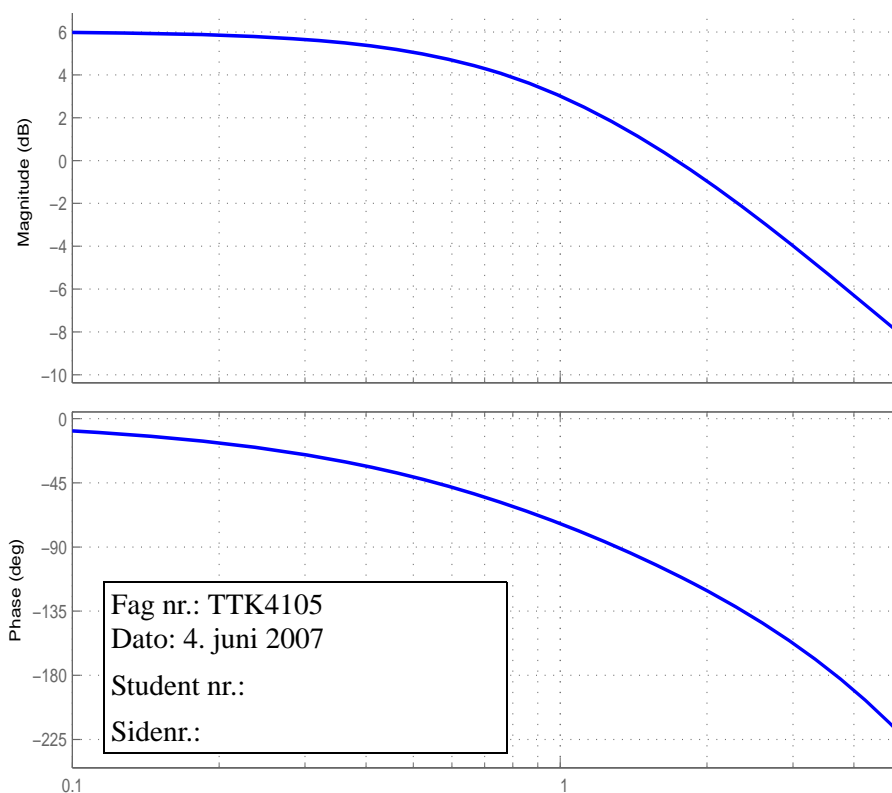
$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u, \quad y = \underline{c}^T \underline{x}, \quad \text{der } A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- b) (5 %) Finn transisjonsmatrisa $\Phi(t)$!

Anta $u(t) = \mu_1(t)$ (enhetssprang), og $\underline{x}(0) = \underline{0}$. Vis at $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$!

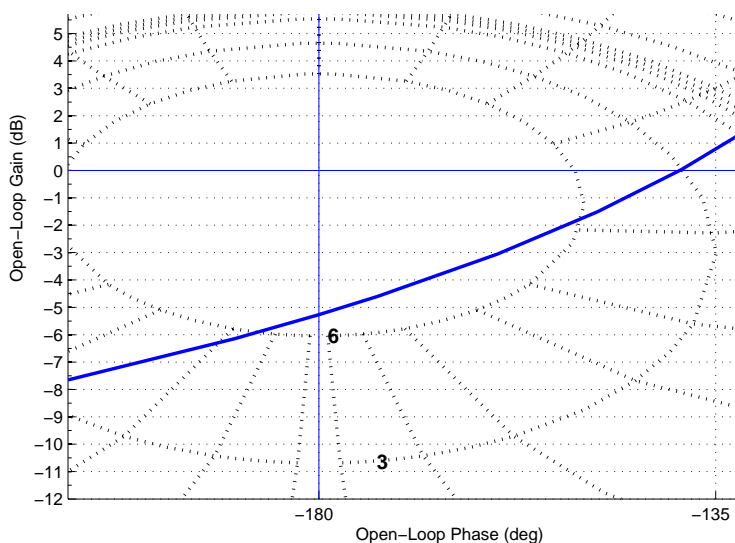
Oppgave 5 (16 %)

Figur 5.1 viser frekvensresponsen til en $h_0 = h_r h_u$ med proporsjonalregulator; $K_p = 0.1$.



figur 5.1

- a) (4 %) Er det lukkede system stabilt for denne verdien av K_p ? Begrunnet svar!
- b) (6 %) Det skal brukes PI-regulator på systemet. Finn verdier for K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode!
- c) (3 %) Med parametre valgt i følge pkt. b), blir frekvensgangen til den åpne sløyfes transferfunksjon som vist i Nichols-diagrammet til høyre. Kommentér!
- d) (3 %) Hvor mye ville du eventuelt ha endret K_p ? (Tegn i diagrammet og lever denne sida som del av besvarelsen!)

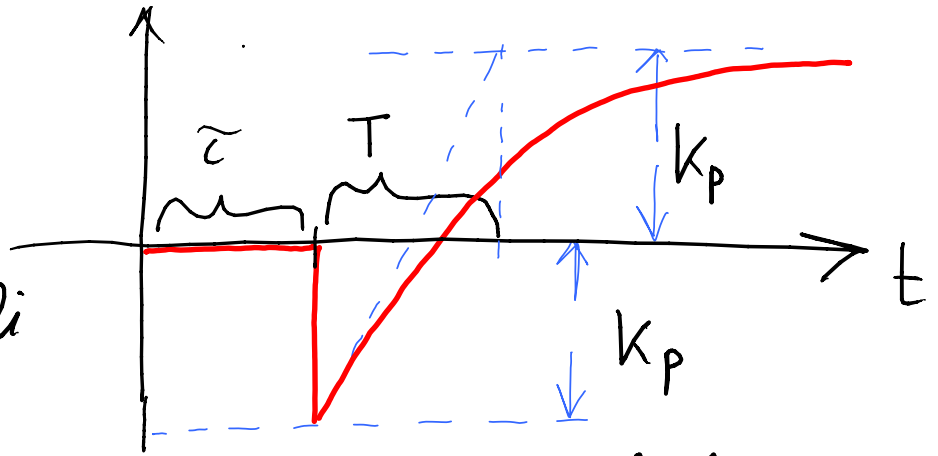


Løsningsforslag eksamen i regulerings- teknikk 4/6-2007

Oppg. 1a)

Kan finnes
v.h.a. beg. verdi
og sluttverdi,

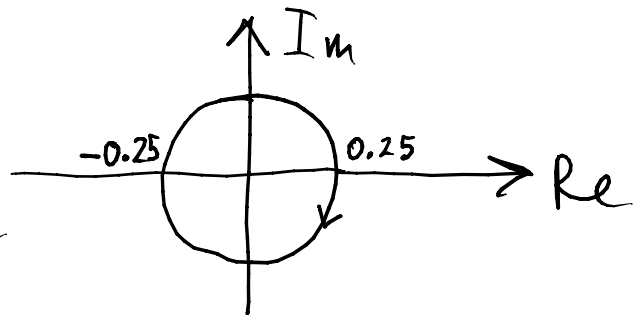
og/eller 1. linje s. 11 i oppgavesettet



1b)

$$|h_0| = 0.25 \frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \cdot 1 = 0.25$$

= sirkel



1c)

Systemet er åpent stabilt.

Da skal ikke Nyquistkurven omslutte -1. Sirkelen
har radius = K_p . Da blir $K_p K_u = 1$. $\Delta K = 4 = 12 \text{ dB}$.

$|h_0|$ for $K_p < 0$ blir $|K_p|$. Sirkelen har også nå
radius $|K_p| \Rightarrow K_p K_u = -1$.

1d)

$$h = \frac{t_0/n_0}{1+t_0/n_0} = \frac{t_0}{n_0+t_0} \Rightarrow \frac{t_0}{n_0} = K_p \frac{1-Ts}{1+Ts} \cdot \frac{(1-\frac{T}{2}s)}{(1+\frac{T}{2}s)}$$

$\Rightarrow e^{-\tau s}$ approksimeres med $\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$

1e)

Nevenner polynomiet i $h =$

$$(1+K_p) \frac{T}{2} s^2 + (T + \frac{\tau}{2})(1-K_p)s + (1+K_p)$$

1e, forts) Rouths tabell blir da:

$$\begin{array}{r|l} (1+k_p) \frac{T_c}{2} & 1+k_p \\ \hline (1-k_p)(T+\frac{T_c}{2}) & 0 \\ \hline 1+k_p & \end{array}$$

Vi krever ingen fortegnsskift $\Leftrightarrow -1 < k_p < 1$
 Stemmer med resultatet fra c).
 (Ellers gjelder det for et 2. ordens system at venstre kolonne blir identisk med polynomets koeffisienter. Det er da tilstrekkelig å sjekke om disse har samme fortegn.)

1f) Nyquist: $\Delta \angle(1+h_0) = -4\pi = -2\pi (N_n - 0) \Rightarrow \underline{N_n = 2}$
 Routh: $k_p > 1 \Rightarrow$ to fortegnsskift $\Rightarrow \underline{N_n = 2}$
 $k_p < -1 \Rightarrow$ ——— || ——— ——— || ———

1g) Fra 1e): $n_0 + t_0 = (1+k_p) \frac{T_c}{2} s^2 + (T + \frac{T_c}{2})(1-k_p)s + (1+k_p)$
 $\Rightarrow s^2 + \frac{1-k_p}{1+k_p} \cdot \frac{T+\frac{T_c}{2}}{T_c} s + \frac{2}{T_c} = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{T_c}} = \underline{2}$

Måler over tre perioder, $t_2 - t_1 \approx 9.45$

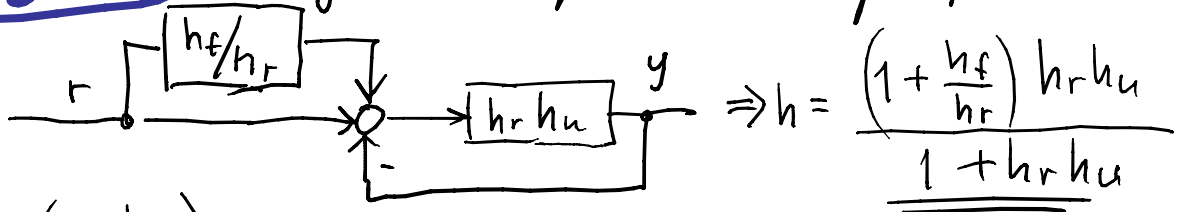
Da er $\beta = \frac{2\pi}{9.45/3} = \frac{6\pi}{9.45} = 1.9947$

Ved t_2 til t_1 er amplituden h.h.v. 5.05 cm og 1.45 cm. Vi har da $e^{-\alpha \cdot 9.45} = \frac{1.45}{5.05} \Rightarrow$

$\alpha = \frac{1}{9.45} \ln\left(\frac{5.05}{1.45}\right) = 0.1320$

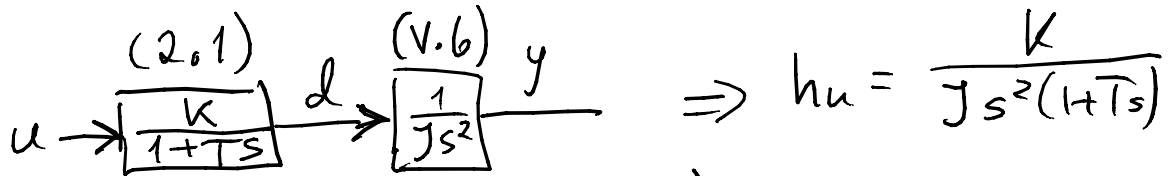
$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1.9947^2 + 0.1320^2} = \underline{1.9991 \approx 2}$

Oppg. 2a) Flytter høyre summeringspunkt:



Hvis $(1 + \frac{h_f}{h_r}) h_r h_u = 1 + h_r h_u$ blir $h \equiv 1$. Dette oppnås med $h_f = \frac{1}{h_u} = \underline{\underline{h_{fi}}}$

2b)



$$\Rightarrow h_{fi} = 1/h_u = \underline{\underline{\frac{J}{K} (s^2 + Ts^3)}}$$

Velger h_f slik at $|h_f(j\omega)| \rightarrow \text{konst.}$ når $\omega \rightarrow \infty$:

$$h_f = \underline{\underline{\frac{J}{K} \cdot \frac{s^2 + Ts^3}{(1+\alpha Ts)^3}}}, \quad 0 < \alpha \ll 1$$

Foroverkopling betyr ingenting for systemets stabilitet!

2c)

$\angle h_o(j\omega) < -180^\circ \forall \omega$. For å få stabilt lukket system må $\angle h_o$ løftes over -180° . Det krever derivatvirkning.

2d)

Kravet oppfylles hvis to integrasjoner i h_o fra r til y . h_u inneholder to integrasjoner. Da forsvinner det ingen i h_r . Dermed gir 2c) og 2d) som resultat: (begrenset) PD-regulator

Oppg. 3a)

-4-

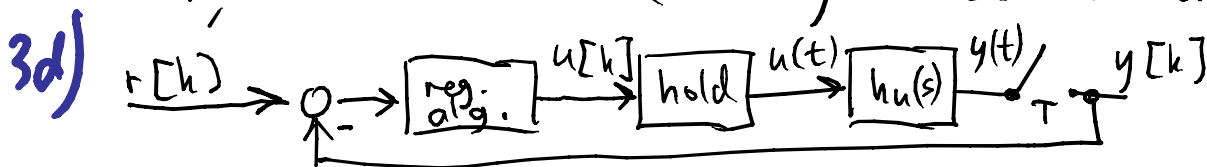
UAUUM

3b) 2, 5

3c) Stiplet graf indikerer endringa:



- kryssfrekvensen øker (bra)
- resonans toppen blir høyere (dårlig: mindre stabilitet)



3e) Antar at regulatoren er kontinuerlig, og bestemmer parametre på det grunnlaget. Så erstattes alle s 'ene i $h_r(s)$ med $\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$.

Dette gir en rekursiv formel for den diskrete regulator.

Hvis T er "stor", kan man gjøre som ovenfor, man må bare først putte inn en tidsforsinkelse $e^{-\frac{T}{2}s}$ i h_o .

Oppg. 4a)

Gjør dette ved å vise at (4.2) gir (4.1). Vi har $h(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} =$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2(s+2) - (s+3)}{(s+3)(s+2)} = \underline{\underline{\frac{s+1}{s^2+5s+6}}}$$

4b) $\phi(t) = e^{At} = (\text{i dette tilfellet}) = e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

4b forts.)

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \cdot 1 \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = - \int_{\alpha=t}^0 \begin{bmatrix} e^{-3\alpha} \\ e^{-2\alpha} \end{bmatrix} d\alpha = \int_0^t \dots = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppg. 5a) Se neste side.

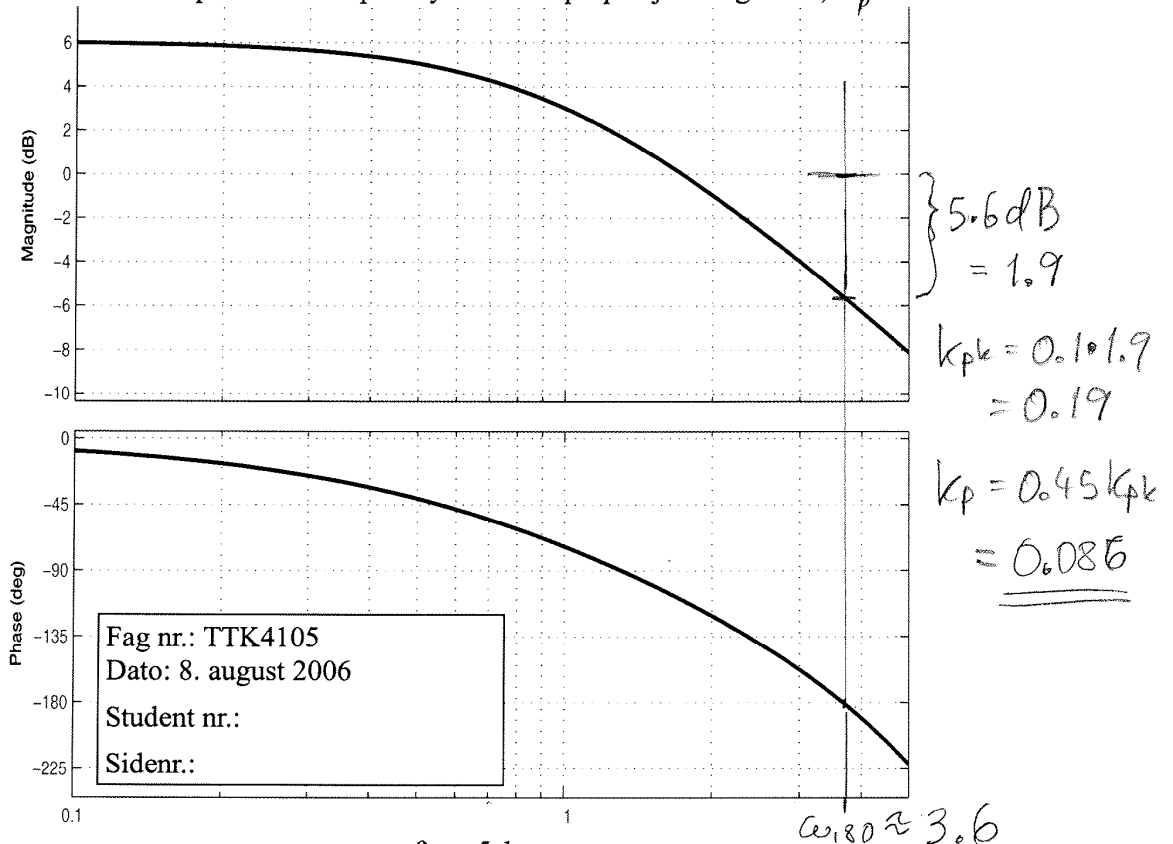
5b) 

5c) Resonansstopper i $|N(j\omega)|$ blir mye over 6dB. Dette indikerer for dårlig stabilitet. K_p må reduseres, eller T_i kan økes.

5d) Se neste side.

Oppgave 5

Figur 5.1 viser frekvensresponsen til et åpent system med proporsjonalregulator; $K_p = 0.1$.

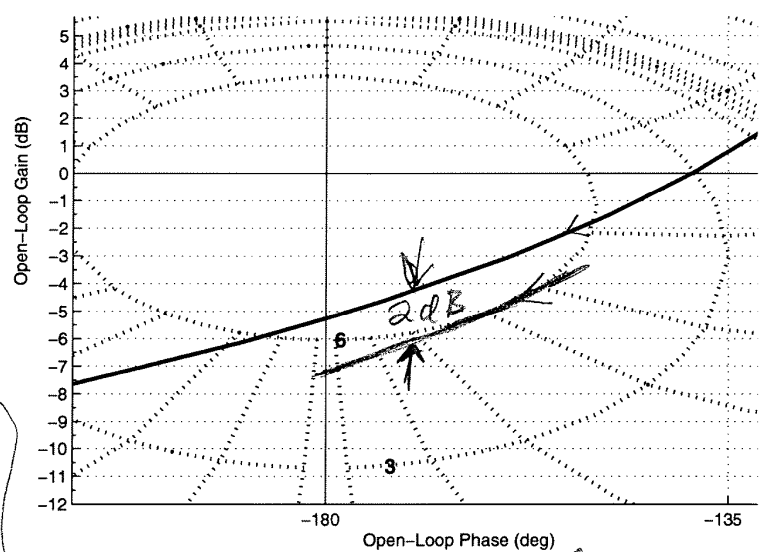


Fag nr.: TTK4105
 Dato: 8. august 2006
 Student nr.:
 Sidenr.:

figur 5.1

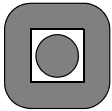
- a) (%) Er det lukkede system stabilt for denne verdien av K_p ? Begrunnet svar! $T_k = \frac{2\pi}{3.6} = 1.74$
- b) (%) Det skal brukes PI-regulator på systemet. Finn verdier for K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode! $T_i = \frac{T_k}{1.2} = 1.45$

- c) (%) Med parametre valgt i følge pkt. b), blir frekvensgangen til den åpne sløyfes transferfunksjon som vist i Nichols-diagrammet til høyre
 Kommentér!



- d) (%) Hvor mye ville du eventuelt ha endret K_p ? (Tegn i diagrammet og lever denne sida som del av besvarelsen!)

→ K_p bør reduseres med $\approx 2 \text{ dB}$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 25. mai 2009

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

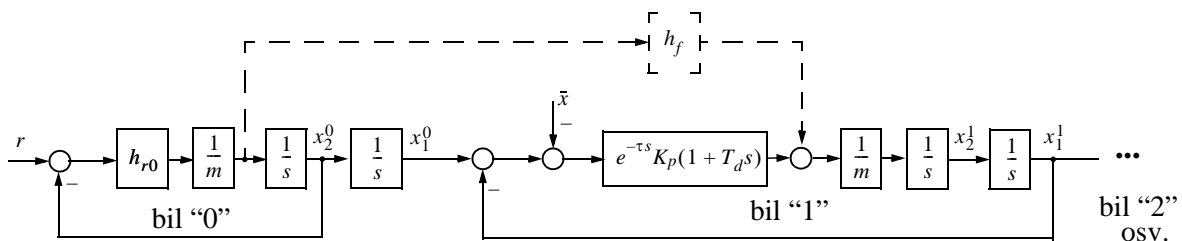
Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.

Oppgave 1 (40 %)

I en bilkø forplantes hastighetssvingninger bakover i køen. Vi skal blant annet se på dette fenomenet. For enkelhets skyld antar vi at farten er så lav at vi kan se bort fra luftmotstand og annen friksjon, og at alle biler er av samme type og har avstandsregulering, unntatt den første (bil nr. "0"), som følger en hastighetsreferanse. Hver bil har masse m . Avstanden mellom bil n og bil $n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, skal holdes mest mulig konstant $= \bar{x}$. Avstandsregulatorene er identiske og antas som

$$h_r(s) = e^{-\tau s} K_p (1 + T_d s) \tag{1.1}$$

I regulatoren inngår sjåførens oppførsel, og τ er reaksjonstida. Motor og gasspedal er også med i regulatoren. Pådraget fra regulatoren er motorens skyvekraft på bilen. Vi viser systemet bare med bil nr. "0" og "1" i køen, men flere biler er antydnet:

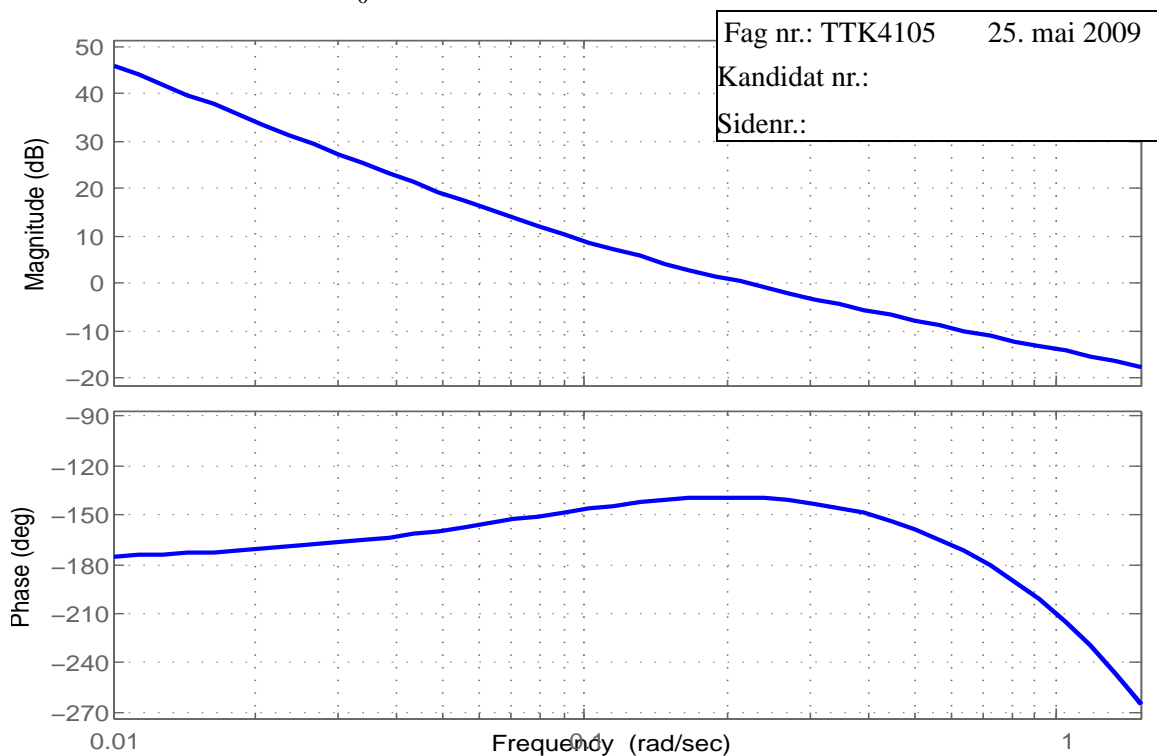


figur 1.1

I figur 1.1 er r en konstant hastighetsreferanse for bil nr. 0. h_{r0} er en hastighetsregulator, som vi ikke skal studere i detalj. x_2^0 [m/s] og x_1^0 [m] er hastighet og posisjon for bil "0".

Se inntil videre bort fra den stiplede delen av figuren. I hele denne oppgaven kan du se bort fra \bar{x} .

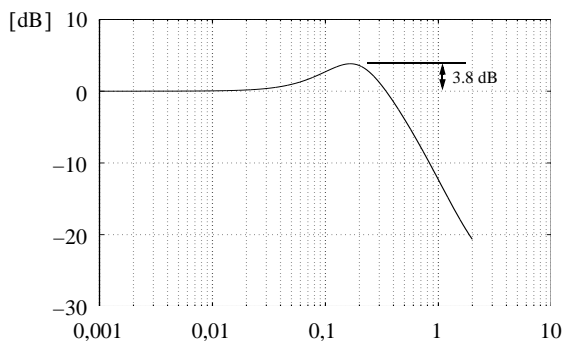
- a) (5 %) Vi krever at det ikke skal være noe stasjonært hastighetsavvik for bil "0". Trengs det en integrator i $h_{r0}(s)$? Svaret må begrunnes, verbalt eller ved hjelp av sluttverditteoremet!
- b) (7 %) Figur 1.2 viser Bodediagram for $h_0 = h_r/(ms^2)$ for et sett parameterverdier: $K_p/m = 0.02$, $\tau = 2$, $T_d = 10$. Du skal tegne inn asymptoter i figuren og levere det påtegnede arket. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å "smyge dem" inntil grafen på øyemål. Asymptotene for $\angle h_0$ har i dette tilfelle gyldighet bare for en del av h_0 . Forklar!



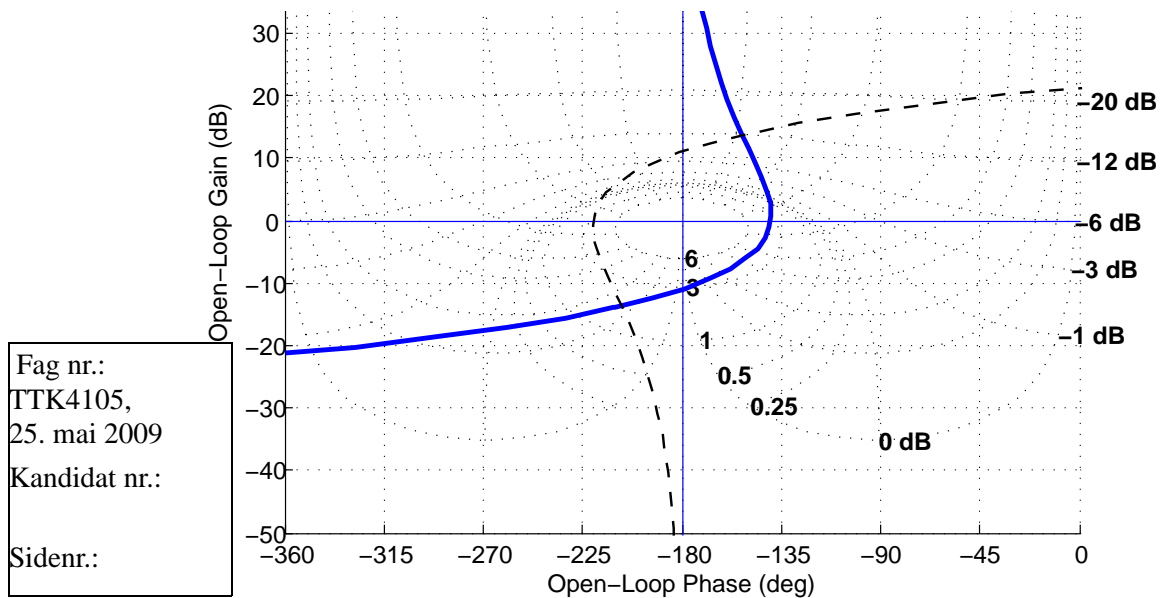
figur 1.2

- c) (5 %) Bil "1" (og de øvrige etter denne) må ha derivatvirkning i regulatoren, slik det er vist i (1.1). Hvorfor? (1.1) er en enkel, men litt for optimistisk regulatormodell. Hvorfor?
- d) (3 %) Les av fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK i diagrammet. Er disse akseptable?
- e) (4 %) Finn følgeforholdet fra hastighet inn til hastighet ut: $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s)$.

- f) (4 %) Figuren til høyre viser $|M(j\omega)|$. Anta at bil nr. "0" kjører i 8 [m/s], men varierer sin hastighet sinusformet rundt denne med amplitude 0.5 [m/s] og frekvens 0.17 [rad/s]. Dette fører til forsterkede svingninger for bilene bak. Vis at amplituden på hastighetsvariasjonen til bil nr. 5 blir 4.45 [m/s].



- g) (4 %) Figur 1.3 viser et Nichols-diagram, hvor man med utgangspunkt i grafen for h_0 kan lese av både $|N|$ og $|M|$. Sjekk fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK , og sammenlign med resultatet fra d). Markér det punkt hvor du kan avlese resonanstoppen til $|M|$ (NB: ikke $|N|$!). Levér det påtegnede arket som del av besvarelsen.

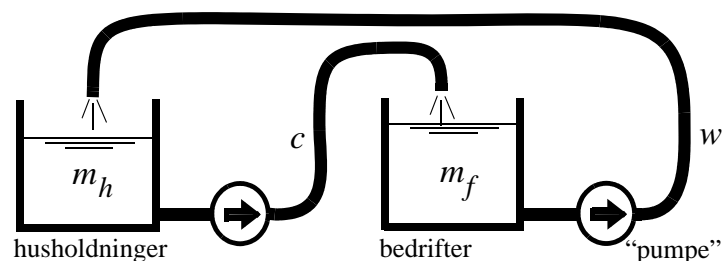


figur 1.3

- h) (4 %) Vi skal nå ta med den stiplede foroverkoplinga i figur 1.1. (Den realiseres reint praktisk ved at hver bil måler egen akselerasjon og sender målinga trådløst til etterfølgende bil.) Med litt manipulering ser man at dette svarer til en foroverkopling fra referanse. Finn hva som skal stå i blokka h_f (tips: i dette tilfelle blir det en konstant!).
- i) (4 %) Med denne foroverkoplinga: Hva blir nå $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^n - 1}(s)$? (Tips: svaret er veldig enkelt.) Hva kan vi si om oppførselen til en bilkø med slik foroverkopling mellom bilene?

Oppgave 2 (27 %)

Gitt en meget enkel samfunnsøkonomisk modell (*du trenger ikke kunne noe økonomi for å løse denne oppgaven*). Modellen består av to "kar" som det sirkulerer "væske" imellom, se figur til høyre. "Væsken" i dette systemet er penger. Vi har:



- m_h, m_f = pengebeholdning hos henholdsvis husholdninger og bedrifter (= "firms" = f) [kr.]
- w = pengestrøm fra bedriftene til husholdningene, dvs. lønn (w = "wages") [kr./ år]
- c = pengestrøm fra husholdningene til bedriftene, dvs. privat kjøp av varer og tjenester (c = "consumption" = forbruk) [kr./ år]

Alle disse størrelser er variable i tida t . Det forutsettes at strømmene c og w fra hver sektor “pumpes ut” proporsjonalt med pengebeholdningene der, slik at vi har

$$c = m_h/T_h \text{ og } w = m_f/T_f, \text{ der } T_h \text{ og } T_f \text{ er konstanter [år]} \quad (2.1)$$

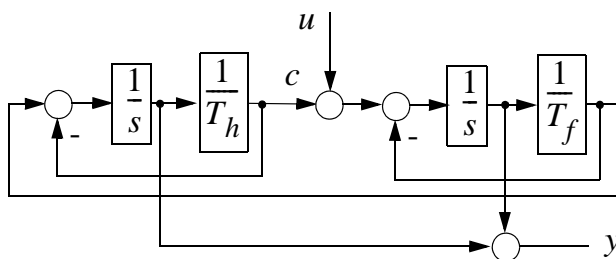
a) (6 %) Finn en tilstandsrommodell for systemet, med $x_1 = m_f$ og $x_2 = m_h$. Er dette et *autonomt* system? (Begrunnet svar!)

b) (12 %) Ved tida $t = 0$ har vi startverdier m_{f0} og m_{h0} . Vis at tidsforløpet $m_f(t)$ er

$$m_f(t) = m_{f0}e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h}(1 - e^{-\alpha t}), \text{ der } \alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h} \text{ og } m = m_{f0} + m_{h0}$$

Finn $\frac{m_f}{m_h}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_f(t)}{m_h(t)}$. Kommentér resultatet: Er det rimelig? (2.2)

c) (4 %) Vi innfører nå en pengestrøm u som representerer det offentlige kjøp av varer og tjenester. Den er et pådrag i vår modell, som adderes til privat forbruk c . Den samlede pengemengde i systemet er $y = m_f + m_h$. Se blokkdiagram til høyre.



Finn A, b, c^T i tilstandsrommodellen $\dot{x} = Ax + bu, y = c^T x$ (2.3)

d) (5 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s)$, v.h.a. (2.3) eller blokkdiagrammet over.

Det viser seg at transferfunksjonen kan forenkles til $h(s) = 1/s$. Dette kunne du ha funnet ut ved en verbal betraktning på systemet uten å måtte regne deg fram. Forklar!

Oppgave 3 (16 %)

a) (4 %) En prosess $h_u = \frac{1}{s+a}$, $a > 0$ skal reguleres med PI-regulator $h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Forklar hvorfor det lukkede system er stabilt for *alle* $K_p, T_i > 0$.

b) (6 %) Samme prosess skal nå reguleres med *diskret* PI-regulator. Vi velger $T_i = 1/a$. Tasterida er T . Tilnærm virkninga av holdeelementet med en transportforsinkelse, betrakt systemet som kontinuerlig, og vis ved *utregning* (ikke grafisk) at reguleringssystemet blir ustabil for $K_p > \pi/T$ (Tips: Finn først ω_{180} , som er uavhengig av K_p !).

c) (6 %) Ved å bruke et 1.ordens rasjonalt uttrykk som en tilnærmelse til $e^{-\frac{T_s}{2}}$, kan du gjøre ustabilitets-sjekken fra b) ved hjelp av Rouths kriterium. Vis at svaret blir $K_p > 4/T$. Hvorfor tillates en større K_p med denne metoden, sammenlignet med svaret fra b)?

Oppgave 4 (4 %)

Når trengs anti-overlading (anti wind-up) og hvordan virker denne? Kort, verbal forklaring!

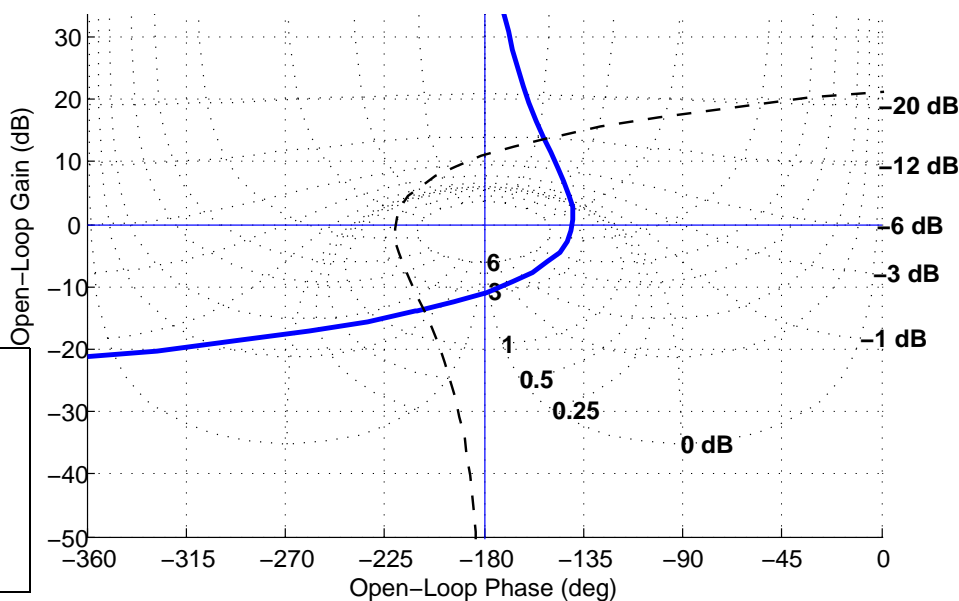
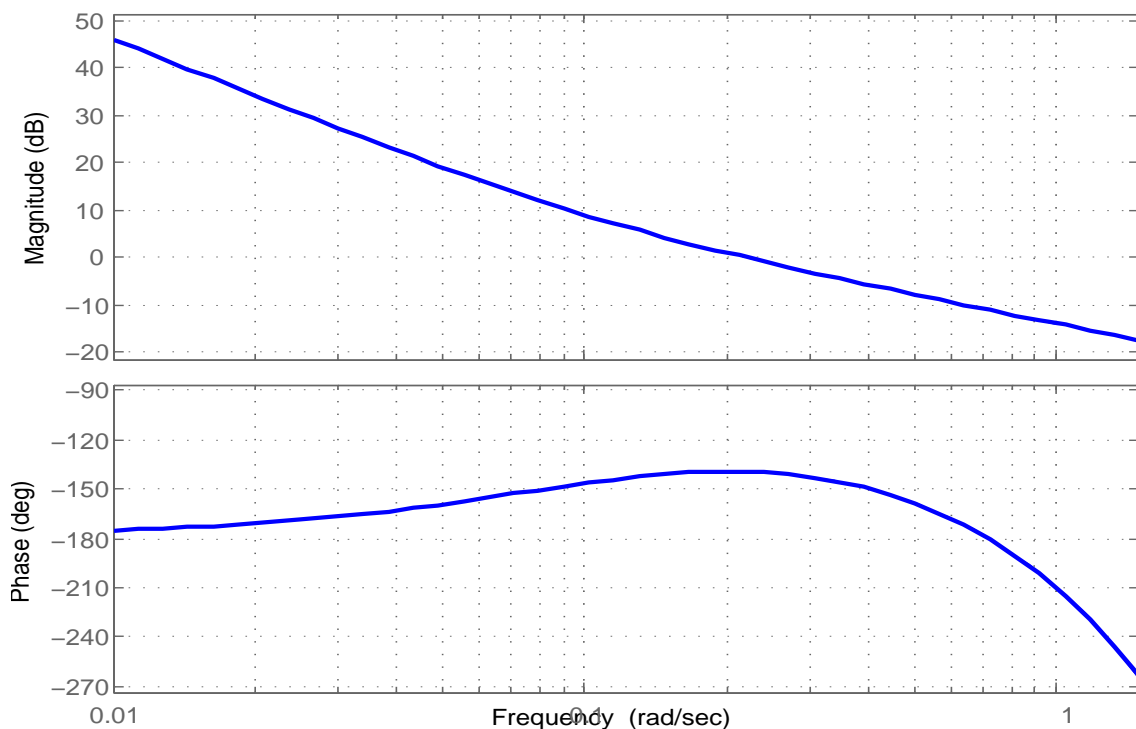
Oppgave 5 (5 %)

Når er en Otto Smith-regulator nyttig? Hva er dens største fordel? Kort, verbal forklaring!

Oppgave 6 (8 %)

Finn ny verdi for K_p/m i oppgave 1b) og figur 1.2, i følge Ziegler-Nichols regler (for alternativet proporsjonalregulering). (Denne oppgaven kan løses uavhengig av resten av oppgave 1.)

(Under er to av figurene i oppgavesettet gjentatt, så du kan bruke dem om nødvendig:)



Fag nr.:
 TTK4105,
 25. mai 2009
 Kandidat nr.:
 Sidenr.:

Løsningsforslag TTK 4105 regulerings-teknikk 25/5-09

1a) Når $r = \text{konstant}$ og det allerede er en integrator i prosessen, trengs det ingen i_{hr} . Se tabell 9.1 i læreboka med $q=0, p=1$. Slutthverditheorem, se regning side 307.

1b) Grafer neste side.

1c) Uten derivatvirkning vil $\angle h_o < -180^\circ \forall \omega$. Derfor ustabilisert uansett verdi av k_p .

Modellen burde egentlig inneholdt et ekstra ledd i $h_r: \frac{1}{1+T_1s}$ fordi pådragsorganet har en viss treghet, og dessuten kan ikke h_r ha ∞ forsterkning når $\omega \rightarrow \infty$.

1d) Se neste side. $\Delta k = 11 \text{ dB} > 6 \text{ dB}$ er bra. $\psi = 40^\circ < 45^\circ$ er litt under grensa. Men "akseptabelt" godtas også.

$$\begin{aligned} 1e) \quad \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s) &= \frac{s x_1^n}{s x_1^{n-1}}(s) = \frac{x_1^n}{x_1^{n-1}}(s) = \frac{h_o}{1+h_o} \\ &= \frac{t_o}{n_o + t_o} \left(\text{der } h_o = \frac{t_o}{n_o} \right) = \frac{k_p e^{-T_d s} (1+T_d s)}{ms^2 + k_p e^{-T_d s} (1+T_d s)} \end{aligned}$$

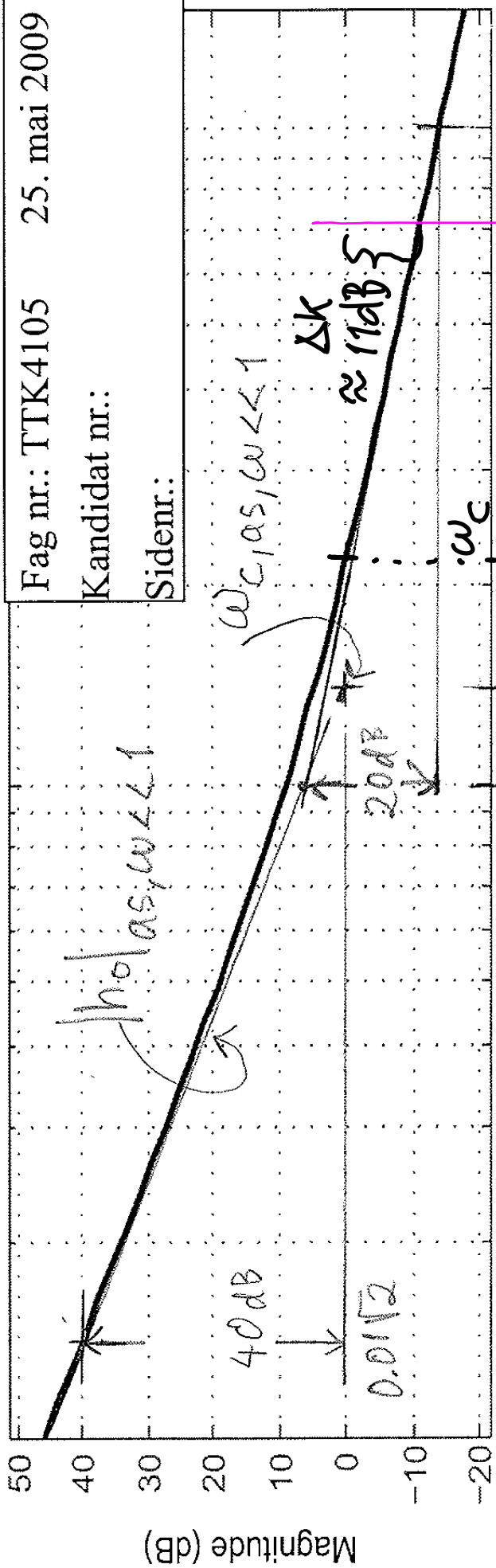
1f) Forsterkninga gjennom fem ledd ved $\omega = 0.17$:
 $\omega = 0.17$ er ved resonanstoppa til $|M(j\omega)|$ som er 3.8 dB . Fem ledds forsterkning = $5 \cdot 3.8 [\text{dB}] = 19 [\text{dB}]$. I absolutt verdi er dette $10^{\frac{19}{20}} = 8.91$. Amplituden på sinusvingning vil "5" bli da $0.5 \cdot 8.91 = \underline{4.45}$

1g) Se side 3

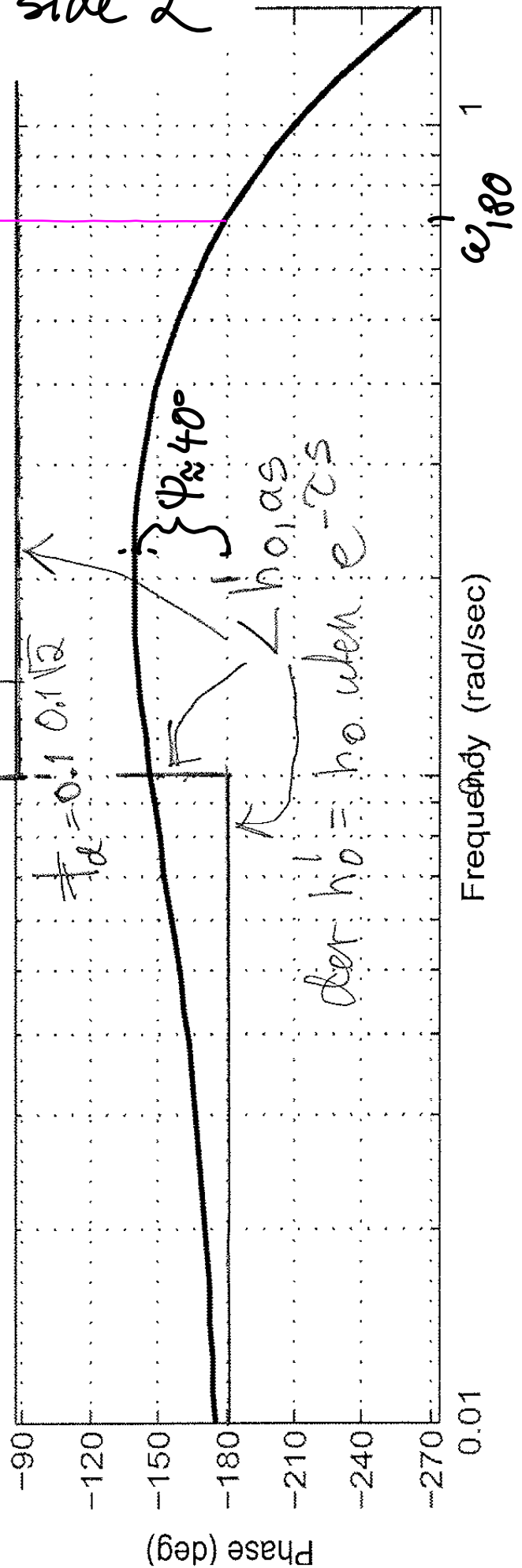
Fag nr.: TTK4105 25. mai 2009

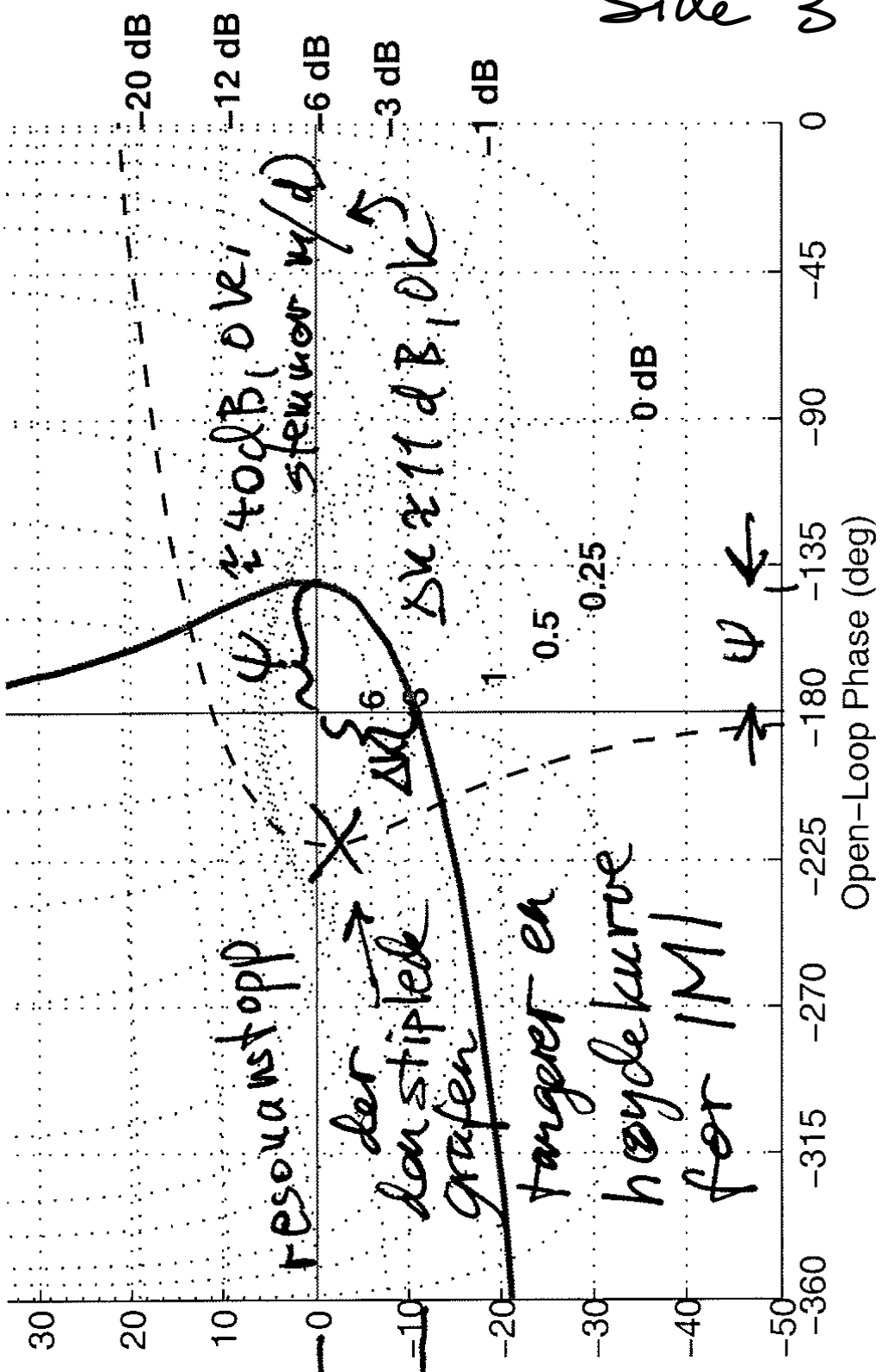
Kandidat nr.:

Sidnr.:



side 2

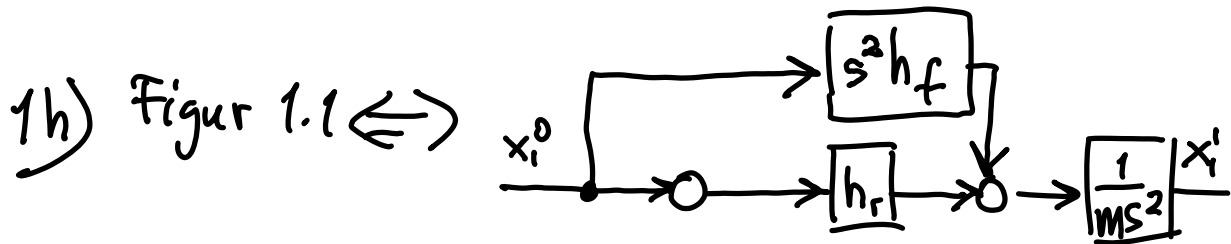




ψ
 ΔK
 \uparrow

Fag nr.:
 TTK4105,
 25. mai 2009
 Kandidat nr.:
 Sidenr.:

side 4



\Leftrightarrow foroverkopling fra referansen. Da må
 $s^2 h_f \cdot \frac{1}{ms^2} = 1 \Rightarrow h_f = \underline{\underline{m}}$

1-i) $M(s) = 1$. Alle biler følger på perfekt.

side 6

Jeg innfører $\alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}$, og får

$$x_1(s) = \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s(s + \alpha)}$$

Residuregning: $x_1(t) = \sum_i \operatorname{res} x_1(s)$

$$= \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s + \alpha} e^{ts} \Big|_{s=0} + \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s} e^{ts} \Big|_{s=-\alpha}$$

Benyttar $m = m_{f0} + m_{h0}$ og får

$$x(t) = \frac{m}{T_h \alpha} + \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \left(-\frac{1}{T_f} m_{f0} + \frac{1}{T_h} (m - m_{f0}) \right) =$$

$$x_1(t) = \frac{m}{\alpha T_h} + e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(-\alpha m_{f0} - \frac{m}{T_h} \right) = \underline{\underline{m_{f0} e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h} (1 - e^{-\alpha t})}}$$

$m_f(\infty) = x_1(\infty) = \frac{m}{\alpha T_h}$. P.g.a symmetri må $m_h(\infty)$ da være

$$m_h(\infty) = \frac{m}{\alpha T_f} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_f}{m_h}(\infty) = \frac{T_f}{T_h}}}$$

Dette kunne også finnes slik: Systemet er marginalt stabilt og uten ytre påvirkninger. Da vil $x(\infty) = \text{konst.}$

Av f. des. (3) følger da at $-\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_f(\infty)}{T_f} = \frac{m_h(\infty)}{T_h} \Rightarrow \frac{m_f}{m_h}(\infty) = \frac{T_f}{T_h}}}$$

Resultatet er rimelig. Siden pengestrømmene ut av begge "kar" nå er like, vil "varemengden" i karet bli proporsjonal med T for samme "kar".

2c)

(3) for må et ledd i tilleggs: $x_1 = \dots + u_1$
 $\Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. A er som før. $\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

fordi $y = m_f + m_h = x_1 + x_2 = \underline{c}^T \underline{x}$. Fra

formelbrønnen s. 8, ligning 7, har vi:

$$h(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}. \text{ Vi kan allerede regne ut } (sI - A)^{-1};$$

2d)

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_n} & \frac{1}{T_n} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left[\left(s + \frac{1}{T_n} \right) + \frac{1}{T_f} \right] \\ &= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left(s + \frac{1}{T_n} \right) + \frac{1}{T_f} = \frac{s + \alpha}{s(s+\alpha)} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}} \end{aligned}$$

Dette kunne vi i utgangspunktet se, fordi den ørente "strøm" inn i systemet er u , og alt akkumuleres i "kjerne". Siden u er total pengemengde, må m være integralt av u , $\Rightarrow h(s) = \frac{m}{u}(s) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

$$3a) h_o = k_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \frac{1}{s+a} ; \angle h_o = -\frac{\pi}{2} + \underbrace{\angle(1+T_i j\omega)}_{> 0 \forall \omega} - \underbrace{\angle(j\omega+a)}_{> -\frac{\pi}{2} \forall \omega}$$

$\Rightarrow \angle h_o$ vil aldri bli så negativt som $-\pi \Rightarrow$ grafen for h_o kan aldri avslutte $-1 \Rightarrow$ alltid stabilt.

$$3b) h_o \approx k_p \frac{1 + \frac{s}{a}}{\frac{s}{a}} \frac{1}{s+a} e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{k_p}{s} e^{-\frac{T}{2}s} = h_o'$$

$$\angle h_o' = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega \Rightarrow -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega_{180}$$

$$\Rightarrow \omega_{180} = \frac{\pi}{T}$$

$$|h_o| = \frac{k_p}{\omega} \Rightarrow 1 = \frac{k_p}{\omega_c} \Rightarrow k_p = \omega_c$$

Vi har ustabilit system når $\omega_c > \omega_{180} \Leftrightarrow \underline{\underline{k_p > \frac{\pi}{T}}}$

side 9

3c) Bruker $e^{-\frac{T}{2}s} \approx \frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s}$ ← merk: 4!

$$\Rightarrow h_0 = \frac{t_0}{n_0} = \frac{K_p (1 - \frac{T}{4}s)}{s(1 + \frac{T}{4}s)}$$

Sjekker det karakteristiske polynom for det lukkede system:

$$h_0 + t_0 = s(1 + \frac{T}{4}s) + K_p(1 - \frac{T}{4}s)$$

$$= \frac{T}{4}s^2 + (1 - K_p \frac{T}{4})s + K_p. \text{ For et}$$

2. ordens polynom forenkles Routh til bare å kreve samme fortegn for alle koeffisienter, (for stabilitet) \Rightarrow systemet er ustabil for $1 - K_p \frac{T}{4} < 0 \Leftrightarrow K_p > \frac{4}{T}$

K_p tillates å være større fordi approksimasjonen

$$\frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s}$$

har mindre negativ fasegang enn $e^{-\frac{T}{2}s}$. Dette gir et for optimistisk bilde.

side 10

4) Integraldelen av regulatoren kopplas ut när pådraget når en måtning.

5) När det är en tidsförsinkelse i processen. Vi kan då välja regulator som om tidsförsinkelsen inte ingår i den länkade slöyfa.

6) Vi har med utgångspunkt i

$\Delta K = 11 \text{ dB}$ som vi fant i 1d) at

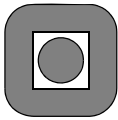
$$K_{pk} = (\text{kritisk } K_p) = K_p + 11 [\text{dB}]$$

Så skal man i følge Z.-N. redusere K_{pk} med 6 dB \Rightarrow endelig K_p blir

$$K_p = K_{pk} - 6 [\text{dB}] = \text{optimal } K_p + 5 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow \frac{K_p}{m} [\text{dB}] = 20 \log_{10}(0.02) + 5$$

$$\text{eller } \frac{K_p}{m} = 0.02 \cdot 10^{\frac{5}{20}} = \underline{\underline{0.0356}}$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

fredag 28. mai 2010

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

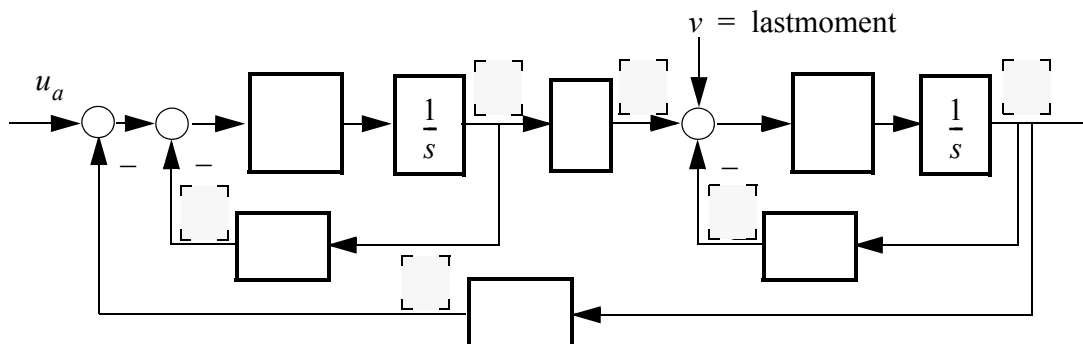
Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.

Oppgave 1 (7 %)

Gitt et blokkdiagram for en modell av en likestrømsmotor i figur 1.1:



figur 1.1

Du skal tegne inn følgende størrelser på rett sted i figuren (se antydde posisjoner til hjelp):

Vinkelhastighet ω , ankerstrøm i_a , motindusert spenning i rotor e_a , avgitt motormoment d_m , spenningsfallet over rotorens (ankerets) ohmske motstand e_R , motmoment p.g.a. friksjon i motoren d_ω , tregheitsmomentet J .

Den siste størrelsen inngår i et enkelt uttrykk som må skrives inn korrekt, inne i riktig blokk.

Du kan, om du foretrekker det, tegne i blokkdiagrammet ovenfor og levere dette arket som del av din besvarelse. Fyll da også ut rubrikken til høyre.

Fag nr.: TTK4105	28. mai 2010
Kandidat nr.:	
Side nr.:	

Oppgave 2 (5 %)

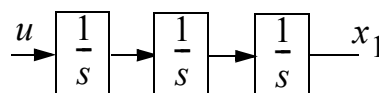
Likestrømsmotoren har transferfunksjonen

$$h_1(s) = \frac{1}{K_v \left(1 + \frac{JR_a}{K_v K_T} s + \frac{JL_a}{K_v K_T} s^2 \right)} \quad \text{fra påsatt ankerspenning til vinkelhastighet.} \quad (2.1)$$

- a) (1 %) Hva blir transferfunksjonen fra påsatt ankerspenning til vinkelposisjon?
- b) (1 %) *Modellreduksjon I:* Forenkle transferfunksjonen til en 1. ordens transferfunksjon $h_2(s)$. Hva blir tidskonstanten? Når kan vi tillate oss denne kraftige forenklingen?
- c) (3 %) *Modellreduksjon II:* Finn en transferfunksjon $h_3(s) \approx h_1(s)$ som er av 2.orden slik som $h_1(s)$, men som kan skrives som et produkt av to 1. ordens blokker. Hva blir T_m , den største tidskonstanten? (Tips: den minste blir $T_a = L_a/R_a$).

Oppgave 3 (6 %)

Gitt et system som består av tre integratorer i serie:



- a) (2 %) Hva blir matrisa A i tilstandsromformen

$$\dot{x} = Ax + bu$$

(Tips: A inneholder bare to enere, resten nuller.)

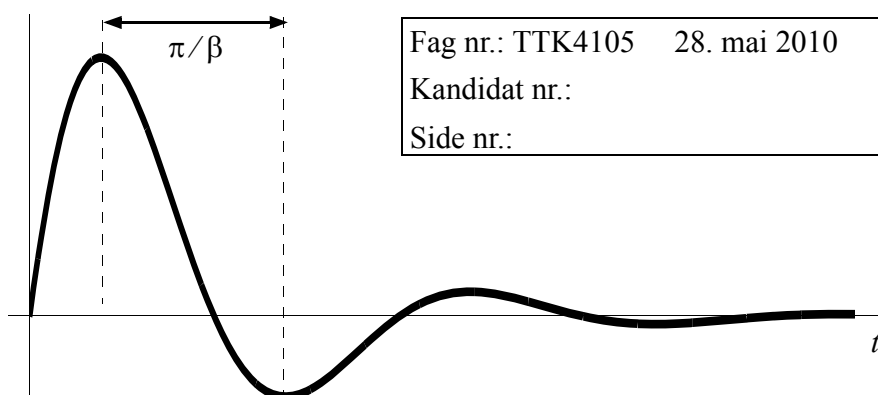
- b) (4 %) Hva blir transisjonsmatrisa $\Phi(t)$?

(Tips: Algebraisk løsning kan i dette spesielt enkle tilfellet finnes raskt ved potensrekke, fordi alle ledd blir null litt ute i rekka. Men også andre, enkle metoder fører fram. Riktig svar er ett av alternativene nedenfor. Det skal framgå hvordan du har kommet fram til svaret.)

1	$\begin{bmatrix} 1 & t^2 & 0 \\ 0 & 1 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 & t^2 & t \\ 0 & 1 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Oppgave 4 (5 %)

Gitt impulsresponsen til et 2. ordens system til høyre. Den relative dempning ζ , er én av disse størrelsene: 0.48, 0.35, 0.27, 0.20, 0.15, 0.09. Finn den riktige. Ta mål med linjal som grunnlag for utregninga. Det skal framgå hvordan du har kommet fram til svaret.



Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

(Tips: Se formelsamling bak, og oppgitt uttrykk i figuren. Du kan hvis du vil tegne i figuren og legge ved dette arket i besvarelsen.)

Oppgave 5 (21 %)

En bil beveger seg på en horisontal vei. Anta at skyvekraften fra bilens motor er proporsjonal med gasspådraget g , og at samlede friksjonskrefter (luftmotstand dominerer) er proporsjonale med kvadratet av bilens hastighet w .

a) (2 %) Vis at en differensialligning for bilens hastighet er

$$\dot{w} = C_G g - C_W w^2, \quad \text{der } C_W \text{ og } C_G \text{ er konstanter.} \quad (5.1)$$

b) (2 %) Finn bilens maksimale hastighet w_{\max} når maksimalt gasspådrag er g_{\max} .

Automatisk hastighetsregulering, også kalt "cruise-control", er populært i amerikanske biler. Man har en referansehastighet r som man ønsker bilen skal holde. Anta at det er valgt en reguleringsstrategi som følger ligningen

$$\dot{g} = K_p(r - w) \quad (5.2)$$

c) (3 %) Hva slags regulator er dette? Hva oppnår man med denne regulatoren? (Verbalt svar tilstrekkelig.)

Vi innfører nå notasjonen $\underline{x} = \begin{bmatrix} w \\ g \end{bmatrix}$, og skriver systemet (5.1), (5.2) på tilstandsromform, med r som pådrag, $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, r)$.

d) (5 %) Anta konstant hastighet w_0 og stasjonære forhold. Uttrykk g_0 ved w_0 . Du skal utlede A og \underline{b} i en linearisert modell $\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x} + \underline{b}\Delta r$ rundt denne stasjonære tilstand.

Modellen gjelder for små endringer $\Delta\underline{x}$ og Δr . For den videre regning oppgis svaret:

$$A = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e) (5 %) Finn egenverdiene til det lineariserte system. Kommentér forskjellen i stabilitet for reguleringsystemet ved lave kontra høye hastigheter.

f) (4 %) Anta fra nå av at bilen kjører svært langsomt. Hastighetsresponsen $\Delta w(t)$ fra stillstand når referansen økes som et sprang fra 0 til en liten verdi Δr , er $\Delta w(t) = \Delta r[1 - \cos(?t)]$. Hva skal stå der spørsmålstegnet er?

Oppgave 6 (4 %)

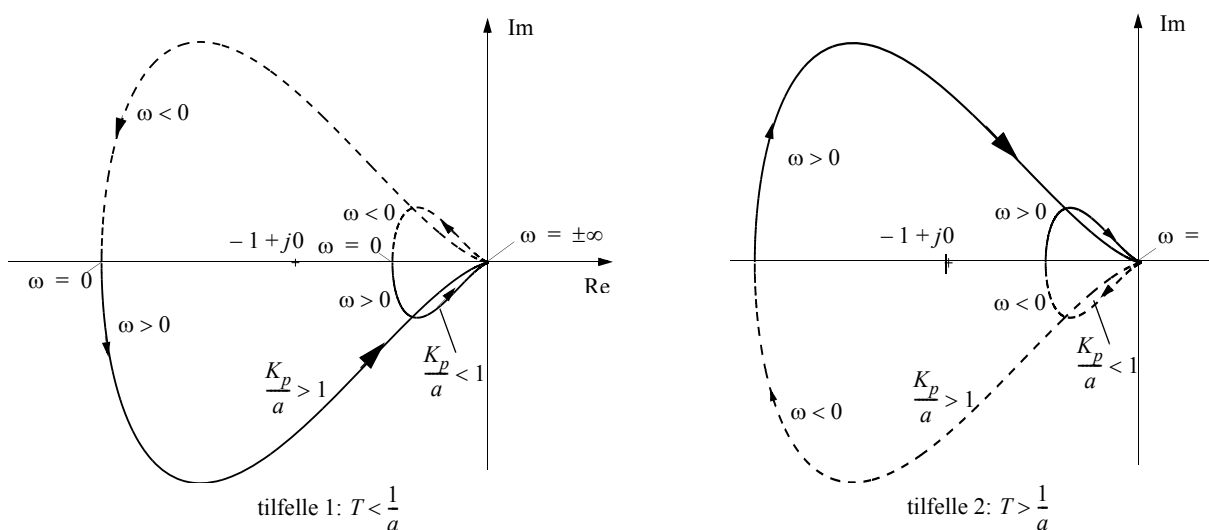
Hva er den viktigste negative bivirkning ved bruk av diskret regulator i forhold til kontinuerlig? Forklar kort hvordan du kan kompensere for dette problemet når du skal stille inn en diskret regulator!

Oppgave 7 (18 %)

Figur 7.1 viser polardiagrammer (Nyquist-diagrammer) for en prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1 + Ts)(s - a)}, \quad a > 0 \quad (7.1)$$

Polardiagrammene for $h_0(j\omega)$ er vist i to del-figurer, avhengig av innbyrdes forhold mellom prosessparametrene T og a .

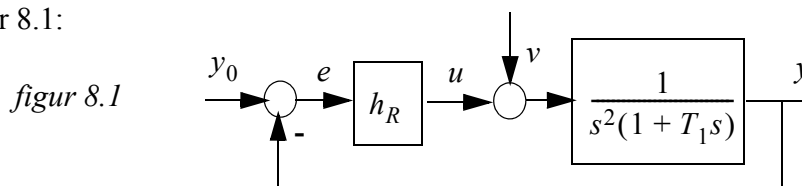


figur 7.1

- (2 %) Er denne prosessen åpent stabil (dvs. når man ikke har tilbakekopling), eller er den åpent ustabil? Begrunn svaret!
- (6 %) Finn v.h.a. Nyquists stabilitetskriterium hvilke krav som må stilles for at det lukkede systemet skal bli stabilt i tilfelle 1. Kan det lukkede system bli stabilt i tilfelle 2? Begrunn svaret!
- (5 %) Sjekk det lukkede systems stabilitet v.h.a. Rouths kriterium.
- (5 %) Finn antall poler i høyre halvplan for det lukkede system i tilfelle 2 for $K_p < a$ og $K_p > a$, og både v.h.a. Rouths kriterium og Nyquists kriterium.

Oppgave 8 (34 %)

Gitt reguleringsstrukturen i figur 8.1:



a) (4 %) Vi velger $h_R(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$, $0 < \alpha < 1$ Hva kalles en slik regulator?

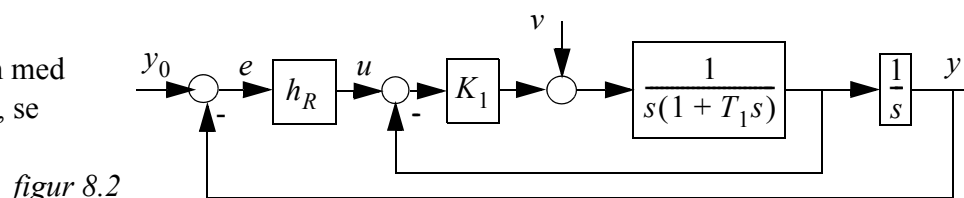
Hvorfor bør vi velge en slik i dette tilfellet?

b) (5 %) Sett $y_0 = 0$ og anta at forstyrrelsen v er et enhetsprang ($v(s) = 1/s$). Finn det stasjonære avvik $e(t \rightarrow \infty)$.

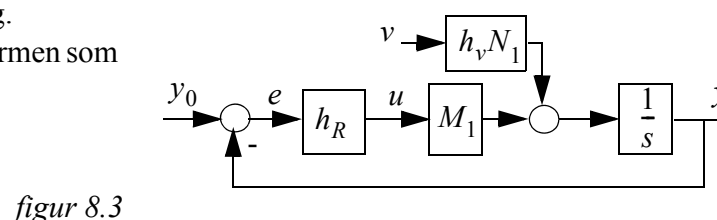
c) (7 %) Figur 8.5 viser Bode-diagram for h_0 med $T_1 = 0.02$, $T_d = 1.25$, $\alpha = 0.1$, $K_p = 0.25 = -12.04 \text{ [dB]} \approx -12 \text{ [dB]}$. Tegn inn asymptotene til $h_0(j\omega)$, amplitude og fase. Det skal framgå tydelig, om nødvendig med forklaring i tillegg til tegning, hvordan asymptotene er fastlagt – det er ikke nok å bare "smyge dem inntil" de to oppgitte grafer. Ta arket med figur 8.5 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

d) (8 %) Finn i Bode-diagrammet en ny 0-dB-linje og den tilsvarende nye verdi $K_{p1} \text{ [dB]}$, som gir størst fasemargin ψ . Videre: Bruk Nichols-diagrammet (gitt i figur 8.4 for h_0 med de samme parameterverdier som i punkt c)) til å finne den $K_{p2} \text{ [dB]}$, som gir resonanstopp 6 dB i avviksforholdet N . Og hvordan finner du $K_{p1} \text{ [dB]}$ ut fra Nichols-diagrammet? (Tips: $K_{p2} > K_{p1}$.) Tegn inn, og ta arket med figur 8.4 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

Vi modifierer nå reguleringsstrukturen med intern tilbakekopling, se figur 8.2.

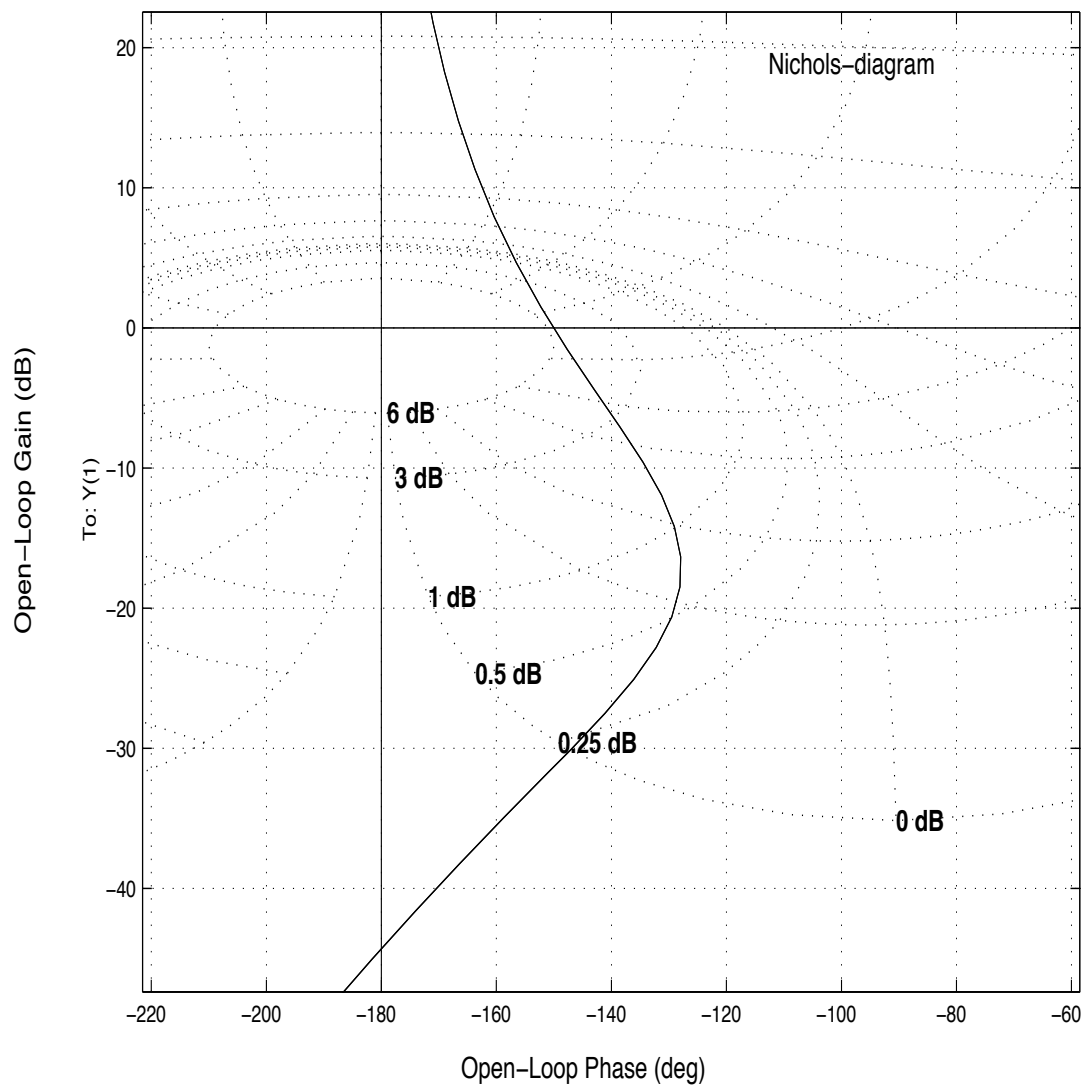


K_1 er nå en "stor" konstant forsterkning. Diagrammet i figur 8.2 kan bringes på formen som er vist i figur 8.3:



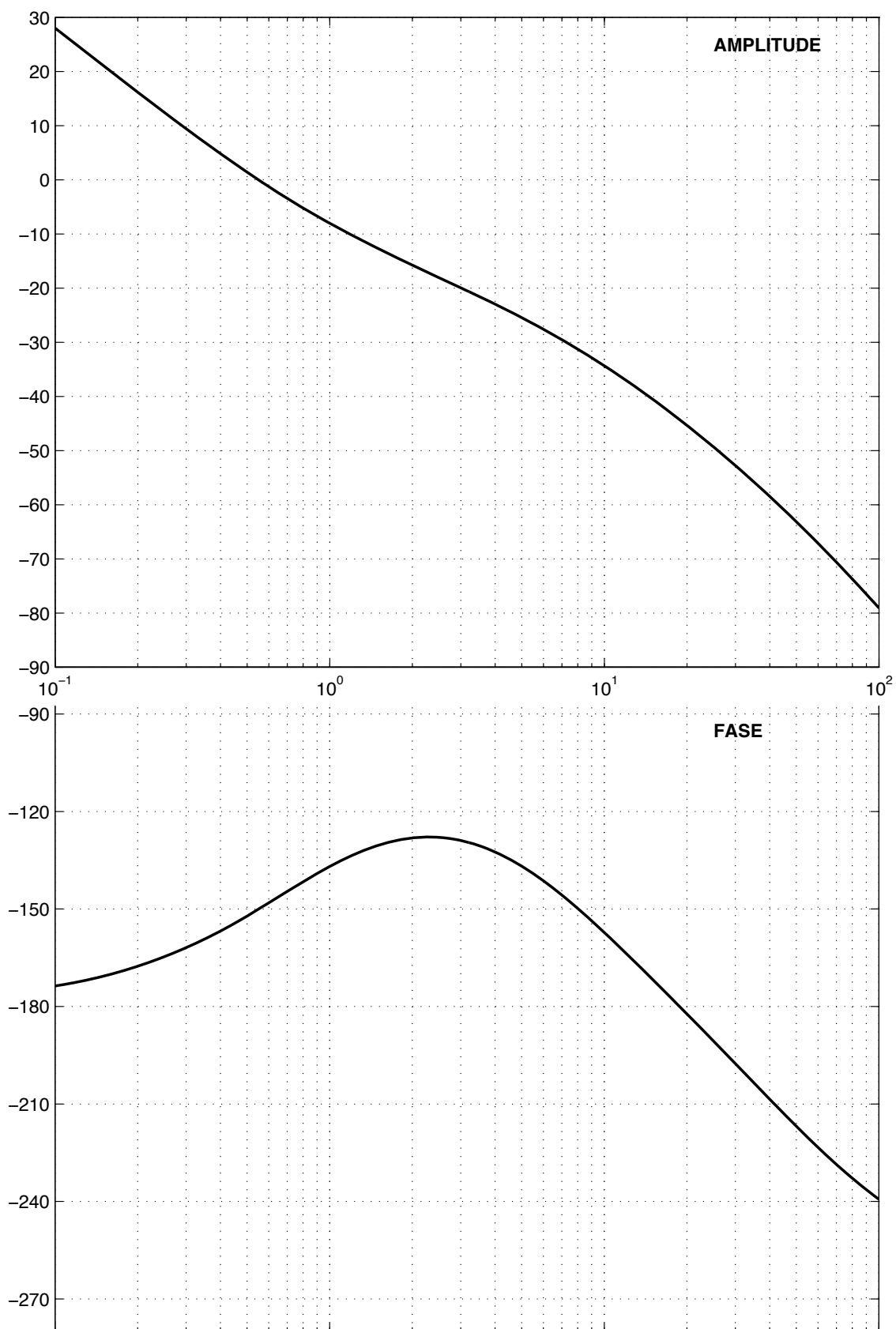
e) (5 %) Velg $K_1 = 1/T_1$. Finn h_v og N_1 .

f) (5 %) Finn M_1 . Du kan nå ha integralvirkning i $h_R(s)$. Hvorfor? Hva er fordelene med det? (Tips: Det har med forstyrrelsen v å gjøre). Nevn minst én annen fordel ved denne løsningen med intern tilbakekopling!



figur 8.4

Fag nr.: TTK4105	28. mai 2010
Kandidat nr.:	
Side nr.:	

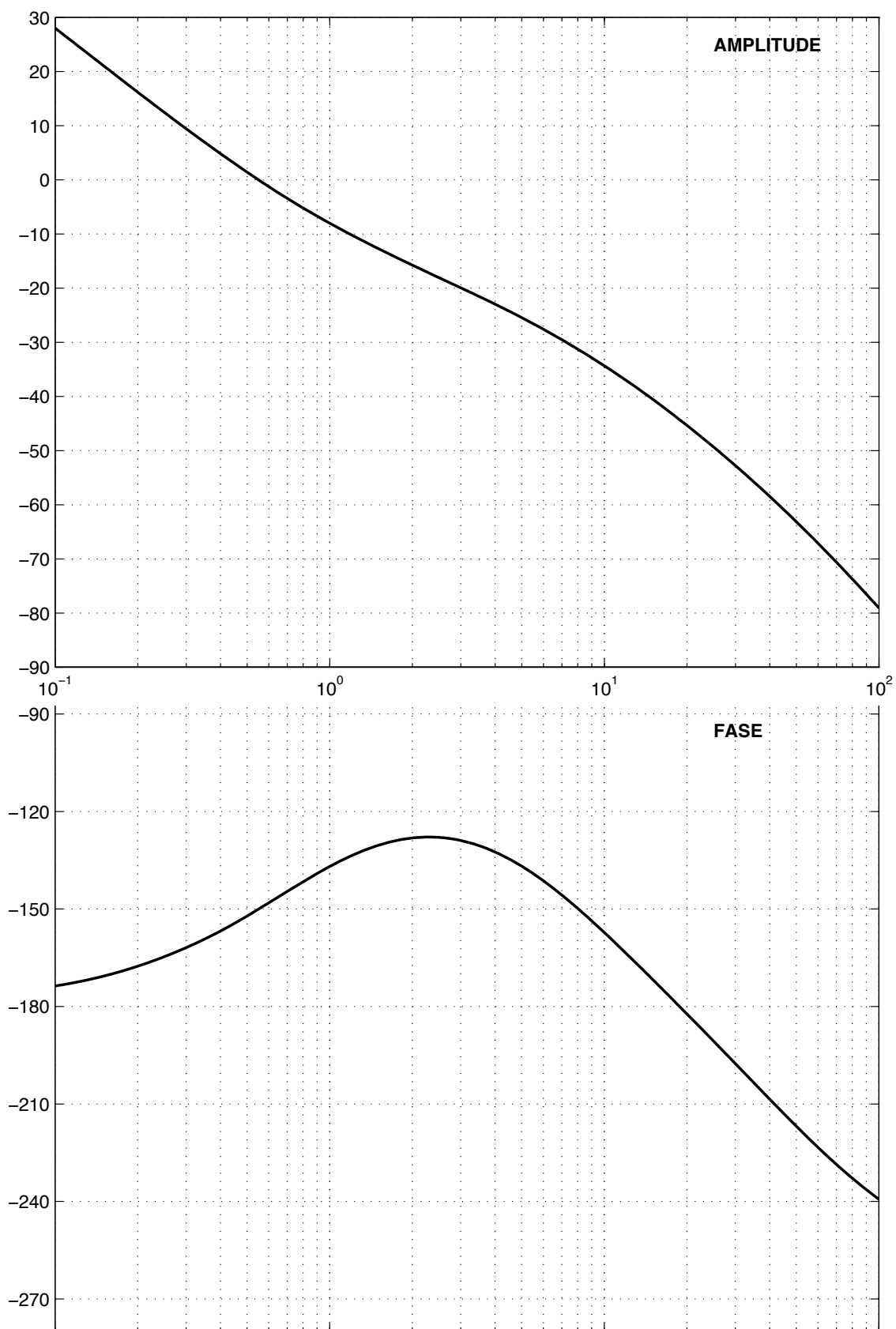


figur 8.5 (ekstra kopi på neste side)

Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010

Kandidat nr.:

Side nr.:

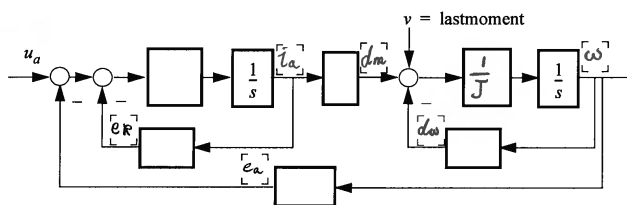


Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010
Kandidat nr.:
Side nr.:

Løsningsforslag eksamen TTK4105, Vår 2010

Oppgave 1

Se side 347 i læreboka.



Oppgave 2

a)

Fra vinkelhastighet til vinkelposisjon er det én integrasjon. Da er $\theta = \frac{1}{s}\omega$, og

$$\frac{\theta}{u_a}(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega}{u_a}(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{K_v \left(1 + \frac{J R_a}{K_v K_t} s + \frac{J L_a}{K_v K_t} s^2\right)}. \quad (1)$$

b)

Hvis $L_a \ll R_a$ kan vi se bort fra s^2 -leddet i nevneren til $h_1(s)$ og skrive en $h_2(s) \approx h_1(s)$ der

$$h_2(s) = \frac{1}{k_v \left(1 + \frac{J R_a}{K_v K_t} s\right)}. \quad (2)$$

Dermed blir tidskonstanten $T = \frac{J R_a}{K_v K_t}$.

c)

Vi ønsker en tilnærming $h_3(s)$ som er et produkt av to førsteordensblokker. Hvis vi har $R_a \gg L_a$ kan vi skrive

$$1 + \frac{JR_a}{K_v K_t} s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2 \approx 1 + \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right) s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2, \quad (3)$$

og dermed løse ligningen

$$1 + \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right) s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2 = (1 + T_m s)(1 + T_a s) \quad (4)$$

$$= 1 + (T_m + T_a)s + T_m T_a s^2. \quad (5)$$

For å "matche" høyre og venstre side av likhetstegnet, velger vi $T_m T_a = \frac{JL_a}{K_v K_t}$ og $T_m + T_a = \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right)$. Da kommer vi fram til

$$T_m = \frac{JR_a}{K_v K_t} \quad (6)$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a}. \quad (7)$$

Oppgave 3

a)

Vi har

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (9)$$

$$\dot{x}_3 = u. \quad (10)$$

Dette kan skrives som

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u. \quad (11)$$

b)

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}. \quad (12)$$

Rekkeutvikling av matriseeksponensialfunksjon:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots \quad (13)$$

Finner \mathbf{A}^2 og \mathbf{A}^3 :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

og

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Altså er

$$\underline{\underline{\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \quad (16)$$

Oppgave 4

Impulsresponsen til 2. ordens systemet gitt i formelsamlingen er

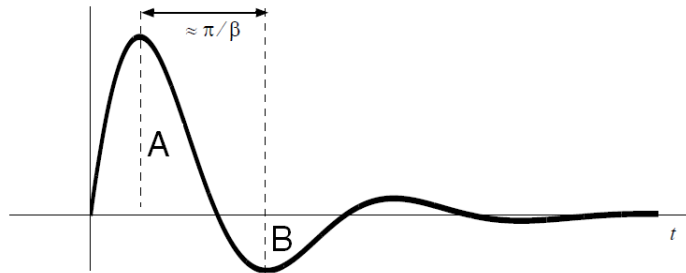
$$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t). \quad (17)$$

Vi henter også fra formelsamlingen at for et slikt system er

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (18)$$

Vi måler følgende størrelser på figuren:

1. halvperioden $\frac{\pi}{\beta}$
2. høyden av den toppen A
3. høyden av bunnen B .



Vi får at $A = 3.5$, $B = 1.1$ og $\frac{\pi}{\beta} = 2.5$. Fra impulsresponsen ser vi at det er leddet $e^{-\alpha t}$ som står for "decay"en i responsen. Fra målingene har vi at

$$e^{-\alpha \cdot 2.5} = \frac{1.1}{3.5} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2.5} \ln\left(\frac{1.1}{3.5}\right) = 0.463. \quad (19)$$

Fra $\frac{\pi}{\beta} = 2.5$ har vi $\beta = 1.2566$, og fra $\frac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ har vi at $\zeta = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$.
Altså er

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{1.2566^2}{0.463^2 + 1.2566^2}} = 0.3457. \quad (20)$$

Oppgave 5

a)

Benytter Newtons lov:

$$\sum F = ma = m\dot{v}. \quad (21)$$

I oppgaveteksten er sammenhengen mellom kreftene gitt slik at differensialligningen kan settes opp:

$$\sum F = C_1 g - C_2 w^2 = m\dot{v} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{m} g - \frac{C_2}{m} w^2 = \dot{v} \quad (23)$$

$$\dot{v} = \underline{\underline{C_G g - C_W w^2}}, \text{ der } C_G = \frac{C_1}{m} \text{ og } C_W = \frac{C_2}{m}. \quad (24)$$

b)

Den maksimale hastigheten finnes ved stasjonære forhold, dvs $\dot{w} = 0$.

$$\dot{w} = 0 \Rightarrow C_G g_{\max} - C_W w_{\max}^2 \Rightarrow w_{\max} = \sqrt{\frac{C_G g_{\max}}{C_W}}. \quad (25)$$

c)

Vi har $\dot{g} = K_p(r - w)$, som gir $g(t) = K_p \int_0^t (r - w) d\tau$. Dette er en I-regulator. Etter innsvingningstiden blir $\dot{g} = 0$.

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow K_p(r - w) = 0 \Rightarrow r = w, \quad (26)$$

altså, vi oppnår referansen til tross for forstyrrelse fra friksjon og luftmotstand.

d)

Finner g_0 som uttrykk av w_0 vha ligningen fra a):

$$0 = C_G g_0 - C_W w_0^2 \Rightarrow g_0 = \frac{C_W}{C_G} w_0^2. \quad (27)$$

Med $x_1 = w$ og $x_2 = g$ kan vi skrive

$$\dot{x}_1 = C_g x_2 - C_W x_1^2 = f_1(\underline{x}, r) \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = -K_p x_1 + K_p r = f_2(\underline{x}, r). \quad (29)$$

Den lineariserte modellen finnes ved hjelp av formlene fra formelsamlingen innsatt arbeidspunktet (\underline{x}_0, r_0) .

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix} \Delta r. \quad (30)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2C_W w_0 x_1 \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = C_G \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -K_p \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = K_p. \quad (36)$$

Vi får dermed følgende modell når vi setter inn arbeidspunktet (x_0, r_0) :

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \Delta r. \quad (37)$$

e)

Eigenverdiene finnes fra $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda(\lambda + 2C_W w_0) + K_p C_G = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -C_W w_0 \pm \sqrt{C_W^2 w_0^2 - K_p C_G}. \quad (38)$$

Ved lave hastigheter (når $C_W w_0^2 < K_p C_G$) blir systemet marginalt stabilt med to poler på imaginæraksen. Ved høye hastigheter er systemet eksponensielt stabilt med to poler i venstre halvplan.

e)

Dersom bilen kjører langsomt har vi $w_0^2 \approx 0$. Da blir modellen (laPlace-transformert)

$$s\Delta w(s) = C_G \Delta g(s) \quad (39)$$

$$s\Delta g(s) = K_p (\Delta r(s) - \Delta w(s)). \quad (40)$$

Substituerer man for $\Delta g(s)$, får man

$$s\Delta w(s) = C_G \left(\frac{K_p}{s} \Delta r(s) - \frac{K_p}{s} \Delta w(s) \right) \quad (41)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta r}(s) = \frac{C_G K_p}{s^2 + C_G K_p}. \quad (42)$$

Dette systemet har (formelsamlingen) sprangrespons $k(t) = K(1 - \cos(\omega_0 t))$, der $K = 1$ og $\omega_0 = \sqrt{C_G K_p}$. Altså, dersom spranget er på Δr , blir responsen

$$\underline{\underline{\Delta w(t) = \Delta r \left(1 - \cos(\sqrt{C_G K_p} t)\right)}}. \quad (43)$$

Oppgave 6

Ved bruk av diskret regulator introduseres en tidsforsinkelse på ca. halve tasteriden. Dette må vi ta hensyn til ved regulatorsyntese, da tidsforsinkelse skyver fasen i negativ retning og vi må ta litt større marginer.

Oppgave 7

a)

Prosesseren har en pol i høyrehalvplan (ved $s = a$) og er dermed åpent ustabil.

b)

Da den åpne sløyfes transferfunksjon $h_0(s)$ har én pol i høyre halvplan, tilsier Nyquists stabilitetskriterium at polarkurven må omslutte punktet $(-1, 0)$ én gang mot urviseren. Dermed ser vi at for tilfelle 1, der $T < \frac{1}{a}$, er prosessen stabil hvis $K_p > a$. I tilfelle 2 blir prosessen ikke stabil selv om K_p økes til $K_p > a$, da kurven går i feil retning, og introduserer dermed en ny pol i hhp.

c)

Her koker Routh's kriterium ned til å se på

$$n_0(s) + t_0(s) = Ts^2 + (1 - aT)s + K_p - a. \quad (44)$$

Her ser vi umiddelbart at dersom alle ledd skal ha samme fortegn (positivt), så er kriteriene

$$\underline{\underline{T < \frac{1}{a} \text{ og } K_p > a}}. \quad (45)$$

d)

I følge Nyquists kriterium er antall poler i høyre halvplan for det lukkede systemet (med tilbakekopling) lik antall poler i hhp for det åpne systemet minus antall omslutninger av punktet $(-1, 0)$ mot urviseren. Vi ser i kurven for tilfelle 2 at for $K_p < a$ omslutter ikke kurven punktet -1, og dermed står vi igjen med 1 pol i hhp. Der $K_p > a$ får vi -1 omslutninger mot urviseren, altså er antall poler i hhp 2.

Ved bruk av Routh's kriterium ser vi på antall "skift" i fortegn til det karakteristiske polynom, når man ser på fortegne til alle ledd fra venstre til høyre. Ser vi på polynomet $Ts^2 + (1 - aT)s + K_p - a$, der $1 - aT < 0$, er det første leddet positivt, det andre leddet negativt, og det tredje leddet positivt hvis $K_p > a$. Da får vi mønsteret + - for $K_p < a$, altså, et skift i fortegn, og én pol i hhp. Dersom $K_p > a$, får vi mønsteret + - + og dermed to skift \Rightarrow to poler i hhp.

Oppgave 8

a)

Dette er en begrenset PD-regulator. Denne er nødvendig her da prosessen $h_u(s)$ har to rene integratorer i seg. Dermed blir faseresponsen -180° fra starten av, og vi trenger et tidlig nullpunkt for å løfte den opp.

b)

Ved $y_0 = 0$ har vi

$$y(s) = \frac{1}{s^2(1 + T_1s)} (v(s) + h_R(-y(s))) \quad (46)$$

$$y(s) \left(1 + h_R \frac{1}{s^2(1 + T_1s)} \right) = \frac{1}{s^2(1 + T_1s)} v(s) \quad (47)$$

$$y(s) = \frac{\frac{1}{s^2(1 + T_1s)}}{1 + K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \frac{1}{s^2(1 + T_1s)}} v(s) \quad (48)$$

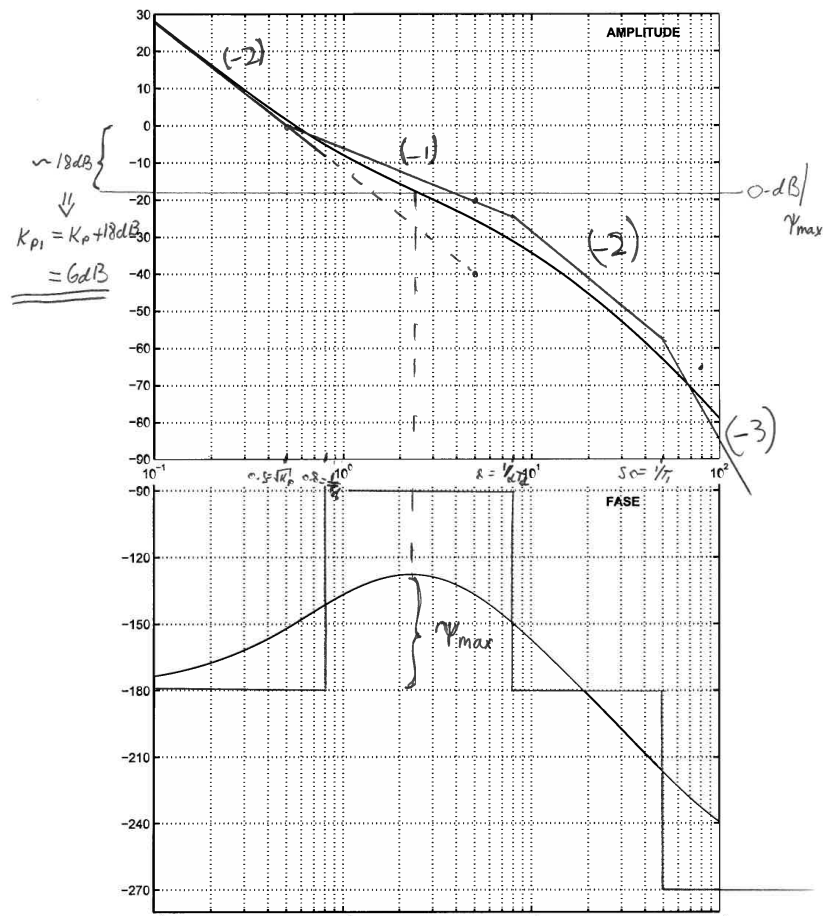
$$= \frac{1}{s^2(1 + T_1s) + K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}} v(s) \quad (49)$$

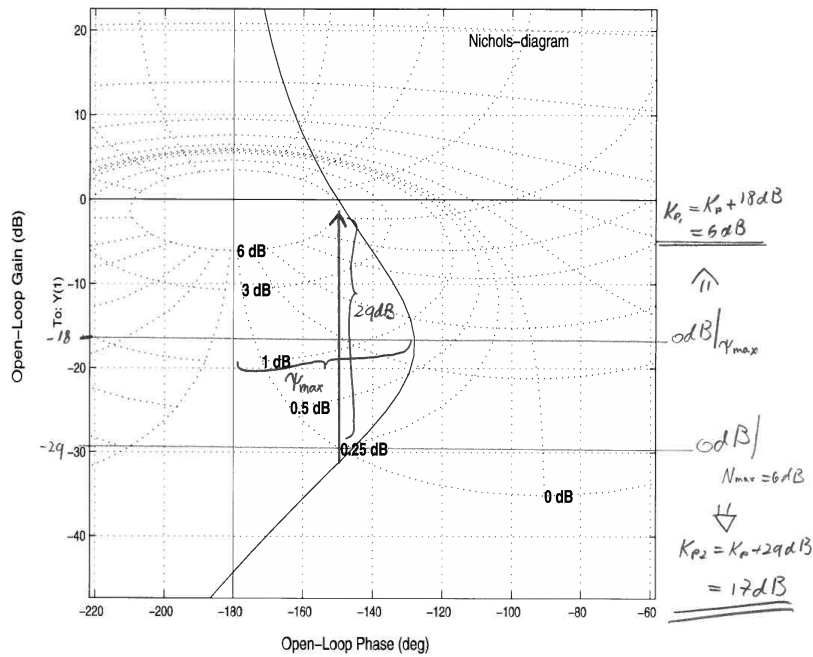
Ved å sette $v(s) = \frac{1}{s}$ og bruke sluttverditeoremet, får vi

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2(1 + T_1s) + K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}} \frac{1}{s} = \frac{1}{K_p}, \quad (50)$$

altså blir $e(t \rightarrow \infty) = -\frac{1}{K_p}$.

c,d)





e)

Den interne sløyfen har åpen-sløyfetransferfunksjon $h_{01} = \frac{K_1}{s(1+T_1s)}$. Vi har at feilforholdet $N_1(s) = \frac{1}{1+h_{01}(s)}$. Altså er

$$N_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{s(1+T_1s)}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (51)$$

Av figuren ser vi at $h_v(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)}$.

f)

$$M_1(s) = \frac{h_{01}(s)}{1+h_{01}(s)} = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1s)}}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (52)$$

Vi kan nå bruke integralvirkning i $h_R(s)$ da "prosessen" vi nå regulerer er $\frac{M_1(s)}{s}$, og den har bare én ren integrator i seg. Vi kan også skru opp forsterkningen K_1 i den interne blokken og dermed oppnå raskere respons.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

Faglig kontakt under eksamen: Professor emer. Rolf Henriksen
Telefon: (73 5)9 43 84, (73 5)9 43 76, 92 60 81 99

Bokmål

EKSAMEN I EMNE TTK4105 REGULERINGSTEKNIKK

Torsdag 9. juni 2011
Tid: 09.00 - 13.00

Sensur: 30. juni 2011

Hjelpemiddelkombinasjon D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt, unntatt Rottman. Kalkulator med tomt minne er tillatt.

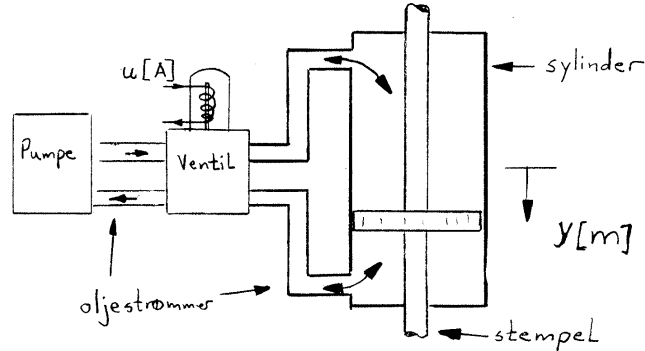
Prosenttallene angir den relative vekt oppgaven tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlingen** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid opp før du gir opp! Men, du må forklare hvordan du bruker noe når du henter det fra formelsamlingen. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figuren i oppgavesettet** - i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne inn figurer og lev-ere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (44 %)

Figuren til høyre viser en presse som drives av et stempel som forsynes med olje under høyt trykk. Oljestrømmen inn og ut av sylindren styres av en elektrohydraulisk ventil. Posisjonen til stampelet er y [m], og u [A] er strømpådrag til ventilens elektromagnetiske styrespole.



Vi ignorerer vekten av stampelet, og gjør også andre forenklinger. Transferfunksjonen fra u til y blir da

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K}{s\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)} \quad (1)$$

Parameterverdier er $K = 4 \left[\frac{\text{m}}{\text{sA}} \right]$, $\zeta = 0.2$, $\omega_0 = 10$ [rad/s].

a) (5 %) Forklar ut fra en fysisk betraktning hvorfor det er rimelig at det er en ren integrasjon i nevneren i transferfunksjonen!

Det er ønskelig at stempelposisjonen y følger en posisjonsreferanse y_0 . Med proporsjonalregulator har vi da $u = K_p(y_0 - y)$. Sløfjetransferfunksjonen h_0 blir $K_p h_u(s)$. De neste to spørsmål skal besvares ved utregning, ikke ved å tegne Bode-diagram:

b) (5 %) Vis at faseverdien ved resonansfrekvensen ω_0 , $\angle h_0(j\omega_0)$, er -180° !

c) (5 %) Ved hjelp av b): Finn den kritiske forsterkning K_{pk} som plasserer systemet på stabilitetsgrensa! (Tips: den blir et rundt tall.)

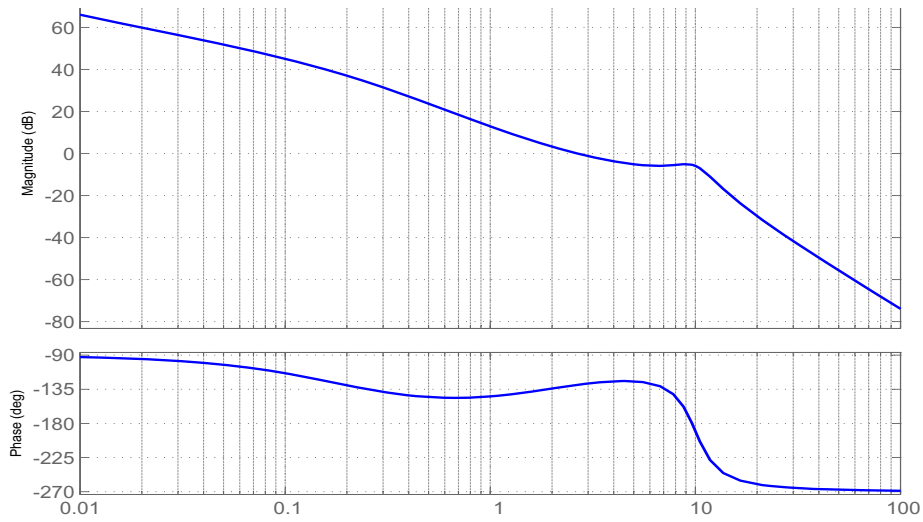
d) (6 %) Det maksimale strømpådraget er 0.1 A. Hva bli maksimum stasjonær stempelhastighet v_{maks} ?

e) (6 %) Referansen $y_0(t) = kt$, en rampefunksjon. Hvorfor blir det stasjonært avvik i $y_0 - y$? (Tips: Du kan bruke sluttverditeoremet, eller besvare dette kort og verbalt ved hjelp av en regel som gjelder for dette.)

Vi innfører nå en proporsjonal + begrenset integralregulator i stedet for proporsjonalregulatoren,

$$h_r(s) = 5 \frac{1 + 0.5s}{1 + 5s} \quad (2)$$

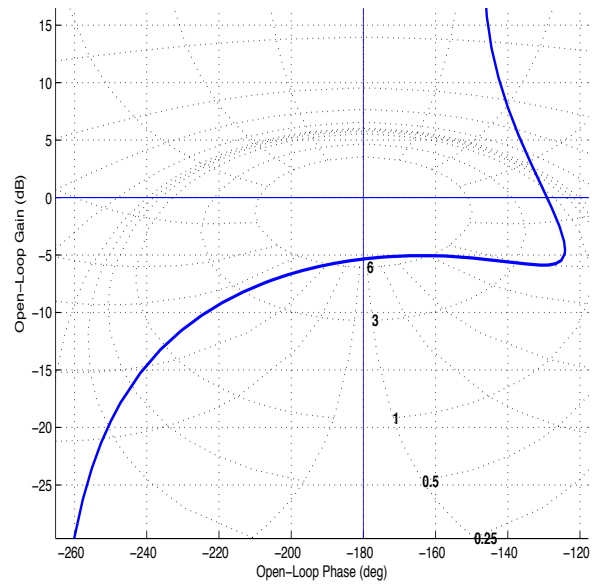
- f) (11 %) Figur 1.1 viser $h_0(j\omega) = h_r(j\omega)h_u(j\omega)$ med regulatoren (2) i Bode-diagram. Tegn inn asymptoter for fase og amplitude og lever dette arket som en del av besvarelsen. Det skal framgå tydelig hvordan du har fastlagt asymptotenes posisjoner, det er ikke nok med å bare "tilpasse dem" til grafene!



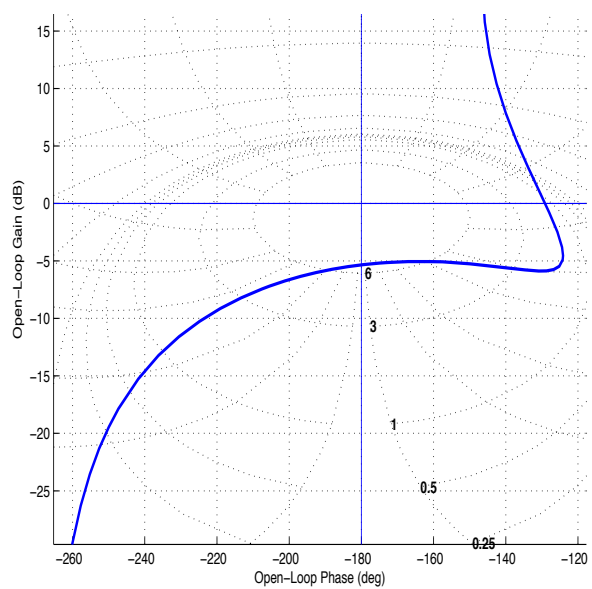
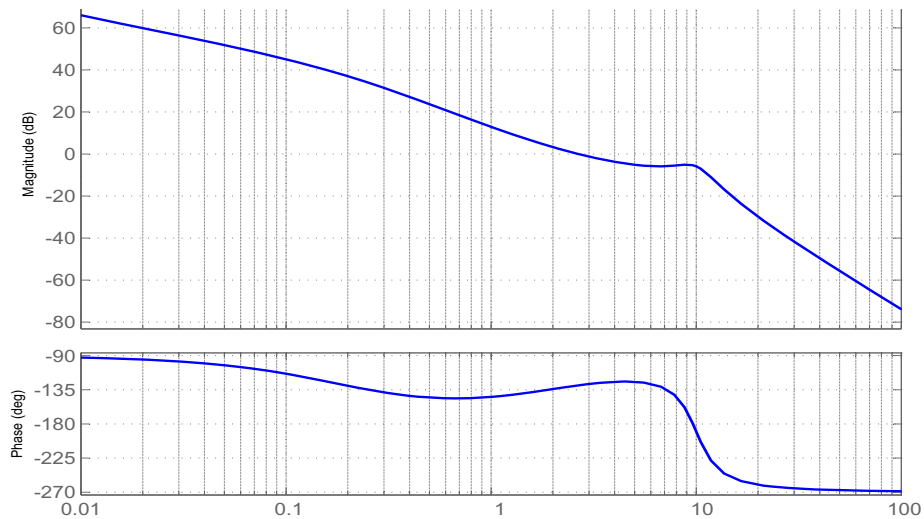
figur 1.1

- g) (6 %) Figuren til høyre viser det samme i Nichols-diagram. Merk av og les av fasemarginen ψ !

Tilsier dette diagrammet at forsterkningen i regulatoren (2) bør justeres noe? I så fall, med omtrent hvor mange dB? Tegn eventuelt i Nichols-diagrammet!

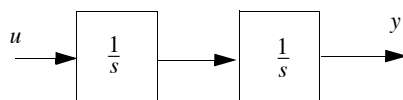


En ekstra side hvis du trenger det for tegning:



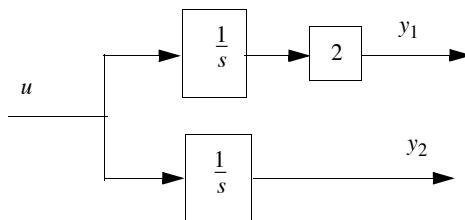
Oppgave 2 (14 %)

Vi skal i denne oppgaven se litt på stabilitet av systemer med sammenfallende egenverdier på den imaginære akse. I figuren nedenfor finner du et system bestående av to integratorer i serie.



- (1.5 %) Velg utgangene av integratorene som tilstander, sett systemet opp på tilstandsromform og skriv opp **A**-, **B**- og **C**-matrisen som dette gir.
- (1.5 %) Sett opp den karakteristiske ligningen for systemet funnet i a) og regn ut egenverdiene.
- (2 %) Regn ut transisjonsmatrisen $\Phi(t)$ for systemet.
- (1.5 %) Ut fra det du nå har funnet, angi om systemet er asymptotisk stabilt, marginalt stabilt eller ustabil.

Nå tar vi for oss et system som vist nedenfor, dvs. to integratorer i parallell.



- (1.5 %) Igjen, velg utgangene av integratorene som tilstander, sett dette systemet opp på tilstandsromform og skriv opp **A**-, **B**- og **C**-matrisen som du nå får.
- (1.5 %) Sett opp den karakteristiske ligningen for systemet funnet i e) og regn ut egenverdiene.
- (2 %) Regn så ut transisjonsmatrisen $\Phi(t)$ for dette systemet.
- (1.5 %) Ut fra det du har funnet i e), f) og g), angi om systemet er asymptotisk stabilt, marginalt stabilt eller ustabil.

- i) (1 %) Hva slags konklusjon, om noen, kan vi gjøre dersom et system har sammenfallende egenverdier på den imaginære akse?

Oppgave 3 (12 %)

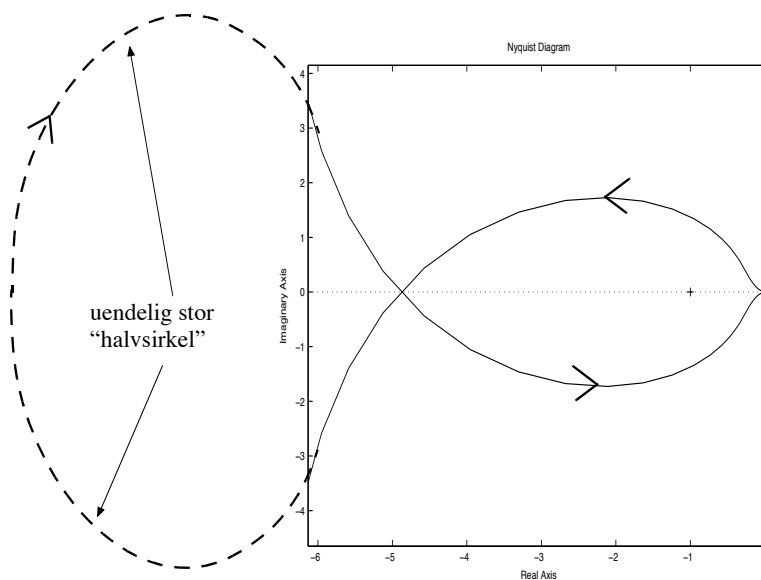
I denne skal vi ta for oss linearisering av et autonomt 3.-ordens ulineært system. Systemet er beskrevet av modellen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2\end{aligned}\tag{3}$$

- a) (3 %) Systemet har to sett med likevektspunkter, finn disse.
- b) (5 %) Foreta linearisering omkring et likevektspunkt gitt av $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = c$ der $c \neq 0$ er en konstant. Sett opp **A**-matrisen for det lineariserte systemet omkring dette likevektspunktet.
- c) (4 %) Sett opp den karakteristiske ligningen for systemet du fant under b) og avgjør om systemet er asymptotisk stabilt, marginalt stabilt eller ustabilt.

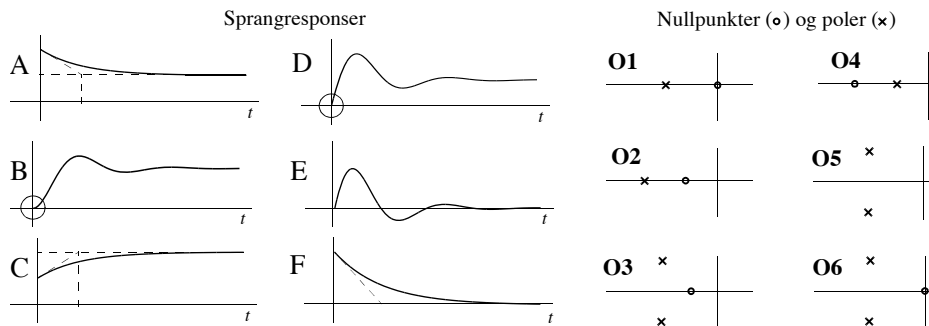
Oppgave 4 (10 %)

Figuren under viser Nyquist(polar-)diagrammet for $h_0(s) = K_p \frac{s + 0.04}{s(s + 2)(s - 0.1)}$, med $K_p = 1$.



- a) (5 %) Bruk Nyquists stabilitetskriterium til å sjekke om det lukkede system er stabilt for $K_p = 1$.
- b) (5 %) Vi gjør K_p meget liten, men fortsatt > 0 : Hvor mange poler (hvis noen) vil det lukkede system få i høyre halvplan?

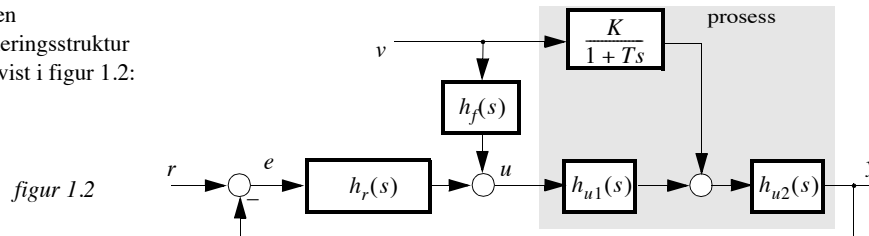
Oppgave 5 (9 %)



I seks deloppgaver ovenfor (hver teller 1.5 %) skal du kople riktig pol-nullpunkt-konfigurasjon for en transferfunksjon, til en motsvarende sprangespons. NB: Merk deg detaljert forløp nær origo for to av responsene, markert med sirkler – det må til for å kunne skille mellom dem. Hver oppgave besvares uten begrunnelse, bare skriv hvilken bokstav A - F som hører sammen med hvilken O1 - O6.

Oppgave 6 (11 %)

Gitt en reguleringsstruktur som vist i figur 1.2:



- a) (5 %) Finn den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$ når $h_{u1}(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$.
- b) (4 %) Hva blir transferfunksjonen $h_{yv}(s) = \frac{y}{v}(s)$ med ideell foroverkopling?
- c) (2 %) Har du noen kommentar til den løsningen du fant i a)?

Løsningsforslag eksamen i TTK4105 Regulerings-teknikk

9. juni 2011

Oppgave 1

Gitt systemet i oppgavesettet og transferfunksjonen

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)} \quad (1)$$

a) Posisjonen avhenger av væskemengden i sylindere som igjen avhenger av væsketransport inn og ut av pressen. Endring av volumet i sylindere er proporsjonalt med volumstrømmene, dvs $\dot{V} = q_{inn} - q_{ut} \Leftrightarrow sV = q_{inn} - q_{ut}$. Stempelets posisjon y vil typisk avhenge lineært av volumet og væskestrømmen avhenger av strømpådraget u . Dermed vil det være en ren integrator i transferfunksjonen $h_u(s)$.

Alternativ forklaring: Stempelet drives av oljestrømmen inn og ut av sylindere. Dersom man antar at oljen er inkompressibel, så vil stempelhastighet bli proporsjonal med strømningshastighet av oljestrømmen inn. Siden posisjon er integralet av hastigheten, vil det være en ren integrator i systemet.

Forklaring med enheter eller strømspole vil gi noe uttelling.

b) Med en ren P-regulator blir sløyfetransferfunksjonen $h_0(s) = K_p h_u(s)$ og dermed

$$h_0(j\omega) = \frac{K_p K}{j\omega \left(1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)} = \frac{K_p K}{-2\zeta \frac{\omega^2}{\omega_0} + j\omega \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)} \quad (2)$$

Faseverdien $\angle h_0(j\omega)$ er gitt av $-\angle n_0(j\omega)$ der $n_0(j\omega)$ er nevneren i (2). Med andre ord, av bidraget fra resonansleddet og integratoren. Ved å sette inn $\omega = \omega_0$ i (2), blir

$$h_0(j\omega) = -\frac{K_p K}{2\zeta \omega_0} \quad (3)$$

ser vi at $h_0(j\omega_0)$ er rent reell og dermed ligger langs den *negative* reelle halvakse. Dermed blir fasebidraget $\angle h_0(j\omega_0) = -180^\circ$.

c) Fra deloppgave b) har vi at $\omega_{180} = \omega_0$, dvs lik resonansfrekvensen. Forsterkning ved $\omega = \omega_{180}$ som plasserer systemet på stabilitetsgrensa er gitt av

$$|h_0(j\omega_0)| = \frac{K_p K}{\left| -2\zeta \frac{\omega^2}{\omega_0} + j\omega \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \right|_{\omega=\omega_0}} = \frac{K_p K}{2\zeta \omega_0} \quad (4)$$

Siden $|h_0(j\omega_{180})| = |h_0(j\omega_0)| = 1$ når systemet har stående svingning og er på stabilitetsgrensa, så blir kritisk forsterkning K_{pk} gitt av

$$K_{pk} = \frac{2\zeta \omega_0}{K} = 1 \quad (5)$$

med innsatt tallverdiene $K = 4$, $\zeta = 0.2$ og $\omega_0 = 10$.

d) Stempelhastigheten v er gitt av den deriverte av stempelposisjonen $y(t)$. Dermed er $v(s) = sy(s)$. Følgelig blir

$$v(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} u(s) \quad (6)$$

Sluttverditeoremet gir da at maksimal stasjonær stempelhastighet i uregulert form (åpen sløyfe) blir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sv(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(s h_u(s) u_{max}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)} \frac{0.1}{s} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= 0.1K \\ &= 0.4 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (8)$$

e) Feilen $e = y_0 - y$ er gitt av

$$e(s) = N(s)y_0(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} \frac{k}{s^2} \quad (9)$$

Sluttverditeoremet gir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(1 + h_0(s))} \frac{k}{s^2} \quad (10)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s \left(1 + \frac{K_p K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}\right)} \quad (11)$$

$$= \frac{k}{K_p K} \quad (12)$$

Dermed vil det bli stasjonært avvik når referansen er en rampefunksjon.

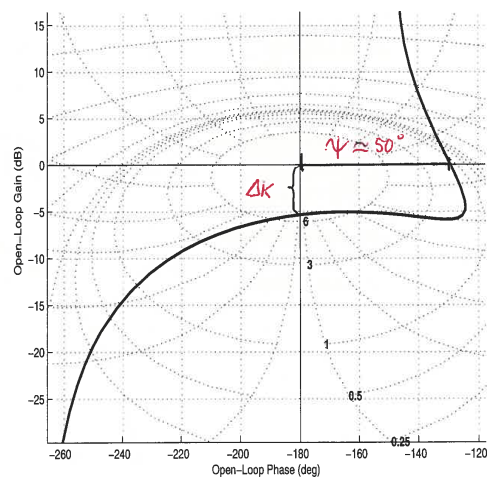
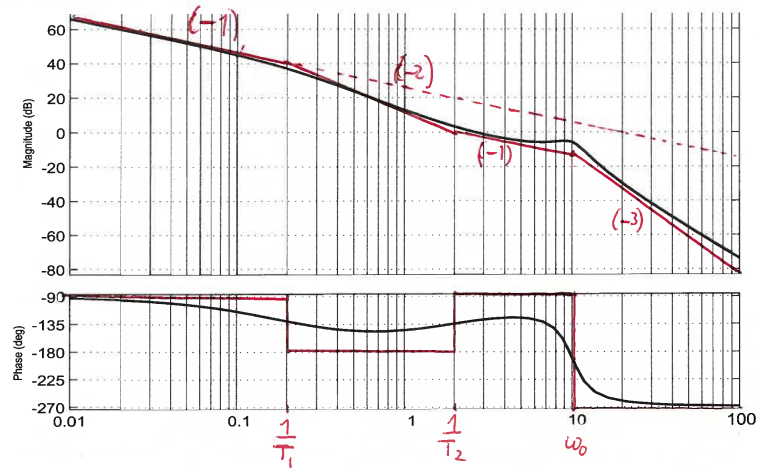
Alternativt svar: Referansen/rampefunksjonen er i s -planet $\frac{k}{s^2}$. For å oppnå null stasjonært avvik må det være *minst* like mange rene integrasjoner i $h_0(s)$ som i referansen. Siden det kun er én ren integrasjon i $h_0(s)$, vil det dermed bli stasjonært avvik.

f)

$$h_0(s) = h_u(s)h_r(s) = \frac{K(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)} = \frac{20(1 + 0.5s)}{s(1 + 5s) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{10} + \left(\frac{s}{10}\right)^2\right)} \quad (13)$$

Dvs, $T_1 = 5$ og $T_2 = 0.5$. Assymptotisk amplitude og fase er tegnet inn i figur 1. Amplitude diagrammet starter med $|h_o(j\omega)|_{\omega \ll 1} = 20/\omega$ siden vi har én ren integrator. Asymptotene er da -1 per dekad og starter i $20 \log(20/0.01) = 66$ dB. Alternativt kan man finne punktet $\omega = 20$ der asymptoten krysser 0 dB som den stiplede linjen indikerer. Neste knekk kommer ved $\omega = 1/T_1 = 0.2$ (tidskonstant) som gir -1 per dekad i bidrag, deretter en positiv knekk +1 per dekad for nullpunktet ved $\omega = 1/T_2 = 2$ og tilslutt en knekk ved $\omega = \omega_0 = 10$ fra resonansleddet som bidrar med -2 per dekad fra denne frekvensen. Asymptoten heller derfor -3 per dekad for frekvenser $\omega > \omega_0$.

En ekstra side hvis du trenger det for tegning:



Figur 1: Assymptotisk amplitude og fasediagram i oppgave 1

g) Fasemarginen Ψ leses av Nicholsdiagrammet og er ca 50° . Tilsvarende kan forsterkningsmarginen ΔK leses av til å være litt mindre enn 6 dB. Avlesning av $|N_{max}(j\omega)|$ gir at denne er litt større enn 6 dB. Ut ifra "normale" krav for forsterkning, fasemargin og $|N_{max}(j\omega)|$, henholdsvis 6 dB og 45° og 6 dB så vil regulatorforsterkningen med fordel kunne reduseres med 1 – 3 dB for å oppnå litt bedre marginer. (Hvis man kun ser på fasemargin og forsterkningsmargin og sier at disse er OK tilsammen, vil man få uttelling men ikke full score.)

Oppgave 2

To integratorer i serie

a) Definerer

$$\dot{x}_1 = u \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (15)$$

Definerer tilstandsvektoren $x = [x_1 \ x_2]^T$ som gir tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (16a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} x \quad (16b)$$

Hvis man istedenfor definerer rekkefølgen av tilstandene x_1 og x_2 motsatt, dvs med x_2 som utgangen av den første integratoren og x_1 som utgangen av den andre, så blir

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (18)$$

og tilstandsrom representasjonen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (19a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} x \quad (19b)$$

Begge disse representasjonene gir full score, og hvilken man benytter har ikke påvirkning for det videre resultatet.

I delspørsmål b),c) og d) benyttes representasjonen (16).

b) Egenverdiene for systemet (16) fremgår av determinanten

$$|\mathbf{A} - \lambda I| = 0 \quad (20)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad (21)$$

Altså, systemet har en dobbel egenverdi i origo (som også klart fremgår av blokkdiagrammet).

c) Transisjonsmatrisen $\Phi(t)$ finnes enklest ved rekkeutvikling av $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\Phi(t) = I + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \dots \quad (22)$$

$$= I + \mathbf{A}t \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

siden $\mathbf{A}^2 \equiv 0$ og dermed er også alle høyere ordens ledd i (22) identisk lik 0.

d) Systemet er ustabil pga dobbel egenverdi i origo. Fasen vil være konstant -180° , og av (24) fremgår det av tilstand x_2 vil vokse ubegrenset.

To integratorer i parallell:

e) Med utgangene av integratorene definert som tilstander, blir

$$\dot{x}_1 = u \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (26)$$

og dermed tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_p} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_p} u \quad (27a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_p} x \quad (27b)$$

hvor indeksen p er brukt for å skille systemet fra det i serie.

f) Karakteristisk likning for (27b) er $\lambda^2 = 0$ og systemet har dermed dobbel egenverdi i origo.

g) På tilsvarende fremgangsmåte som i punkt c) blir transisjonsmatrisen for systemet (27b)

$$\Phi(t) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

h) Dette systemet vil være marginalt stabilt, selv om det er en dobbel egenverdi i origo. Av transisjonsmatrisen (28) fremgår det at ingen tilstander vil vokse ubegrenset. En impulsrespons vil føre til konstant verdi på utgangen, og det autonome systemet vil ikke konvergere mot null.

i) Oppgaven viser at sammenfallende egenverdier på den imaginære akse ikke nødvendigvis betyr at systemet er ustabil.

Oppgave 3

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 x_3 \quad (29a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_3 \quad (29b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 \quad (29c)$$

a) Likevektspunktene til systemet (29) fås ved å sette

$$0 = -x_1 - x_2 x_3 \quad (30a)$$

$$0 = x_1 x_3 \quad (30b)$$

$$0 = x_1^2 \quad (30c)$$

Likning (30c) gir at $x_1 \equiv 0$. Derimot vil likningsettet (30) være oppfylt så lenge *minst* én av tilstandene x_2, x_3 er identisk lik 0. Dermed får vi likevektspunkter $(0, x_2, 0)$ og $(0, 0, x_3)$.

b) Gitt likevektspunktet $\tilde{x} = (0, 0, c)$, der $c \neq 0$. \mathbf{A} -matrisen i det lineariserte system rundt likevektspunktet \tilde{x} fremgår av Jacobien til til likningssystemet (29):

$$\mathbf{A} = \left. \begin{bmatrix} -1 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 2x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|_{x=\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

c) Egenverdiene for (31) fremgår av løse $|\mathbf{A} - \lambda I| = 0$. Dette gir karakteristisk polynom

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda + c^2) = 0 \quad (32)$$

Av polynomet (32) får vi

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 + \lambda + c^2 = 0 \quad (33)$$

Det er flere måter å undersøke plasseringene av røttene til andregradspolynomet i (33).

(i) Ved hjelp av Rouths kriterium: For et andregradspolynom $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ vil koeffisientene i venstre kolonne i Rouths talltabell være koeffisientene til selve polynomet, altså

$$\begin{array}{c} a_2 \quad , \quad a_0 \\ a_1 \quad , \quad 0 \\ a_0 \end{array}$$

Siden alle koeffisientene i andregradspolynomet i (33) er *positive* og $c \neq 0$, ligger begge røttene i venstre halvplan (se evt side 262 i Regulerings-teknikkboka).

(ii) Resultatet kan finnes ved å undersøke røttene av andregradspolynomet direkte:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4c^2} \quad (34)$$

Vi må undersøke røttenes plassering for forskjellige verdier av konstanten c for å avgjøre om systemet er stabilt. Dvs, vi må undersøke røttene for fortegn av diskriminanten $1 - 4c^2$:

- (a) Dersom $1 - 4c^2 = 0$ blir systemet stabilt med to poler i venstre halvplan og i origo.
- (b) Dersom $1 - 4c^2 < 0$ vil polene være komplekskonjugerte med negativ realdel og systemet er fortsatt stabilt.
- (c) Dersom $1 - 4c^2 > 0$, dvs $0 < |c| < 1/2$ vil rota være mindre enn 1, og begge røttene vil fortsatt være i venstre halvplan. Med kun én pol i origo, vil systemet fortsatt være stabilt.

Merk at siden vi krever at $c \neq 0$, vil rota aldri bli 1 og vi vil derfor aldri kunne få sammenfallende egenverdier i origo.

Det lineariserte systemet med \mathbf{A} -matrisen i (31) vil derfor være marginalt stabilt for alle verdier av $c \neq 0$, siden det er én pol i origo og to i venstre halvplan.

Oppgave 4

Systemet har transferfunksjon

$$h_0(s) = K_p \frac{s + 0.04}{s(s + 2)(s - 0.1)} \quad (35)$$

a) Systemet er åpent ustabil med én pol i høyre halvplan. Dermed er $N_p = 1$. Det totale vinkelbidraget for vektoren $1 + h_0(s)$,

$$\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p)$$

må da være 2π for at det lukkede systemet skal bli stabilt. Nyquist diagrammet viser at Nyquistkurven omslutter punktet $(-1, 0)$ én gang i positiv vinkelretning når $K_p = 1$, altså vinkelbidraget er 2π . Det lukkede systemet vil derfor være *stabilt* for dette valget av K_p .

b) Når K_p minkes vil radien i Nyquistkurven minke. Punktet $(-1, 0)$ vil da omsider havne utenfor den høyreliggende sløyfen i Nyquistkurven i oppgavesettet. Vinkelbidraget $\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p) = -2\pi$. Siden $N_p = 1$ blir dermed $N_n = 2$, og det lukkede systemet vil derfor ha to poler i høyre halvplan når K_p blir liten, men fortsatt positiv. Resultatet kan også finnes ut fra Rouths tabell ved å sette opp karakteristisk polynom for lukket sløyfe transferfunksjon,

$$s^3 + 1.9s^2 + (K_p - 0.2)s + 0.04K_p = 0 \quad (36)$$

og se på antall fortegnskift i venstre kolonne:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1.9 \\ \frac{1.9(K_p - 0.2) - 0.04K_p}{1.9} \\ 0.04K_p \end{array}, \begin{array}{l} K_p - 0.2 \\ 0.04K_p \end{array}$$

Når $0 < K_p < 0.2$ vil venstre kolonne i Rouths tabell få 2 fortegnskift, og det lukkede systemet vil derfor få to poler i høyre halvplan.

Oppgave 5

Fasit:

Sprangrespons	A	B	C	D	E	F
Nullpkt/pol konfigurasjon	2	5	4	3	6	1

Oppgave 6

Gitt

$$h_{u1}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (37)$$

a) Forstyrrelsens bidrag på prosessen finnes ved å sette $h_r(s) = 0$, dvs, tilbakekoblingen er inaktiv. Hvis vi kaller punktet i summasjonspunktet rett før $h_{u2}(s)$ for \tilde{y} , så blir

$$\tilde{y}(s) = \frac{K}{1+Ts}v(s) + h_{u1}(s)h_f(s)v(s) \quad (38)$$

og dermed

$$h_{fi}(s) = -\frac{K}{1+Ts} \frac{(s+a)^2}{1} = -\frac{K(s+a)^2}{1+Ts} \quad (39)$$

b) Transferfunksjonen $h_{yv}(s) = 0$ med ideell foroverkobling.

c) Ideell foroverkobling i likning (39) er ikke proper og dermed ikke fysisk realiserbar.



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Fagleg kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
T.A. går to rettleiingsrundar, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

lørdag 19. mai 2012

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil vere klar innan tre veker. Den blir og lagt ut på its learning når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Bestemt, enkel kalkulator tillate. Og Rottmanns formelsamling er tillate. Ingen andre skriftlege hjelpemiddel er tillate.

Denne eksamensoppgåva tel 100 % på karakteren.

Fleire spørsmål kan du enkelt svare på med å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Sjekk alltid den før du gjev opp! Men du må forklare korleis du brukar det, når du tar noko frå formelsamlinga.

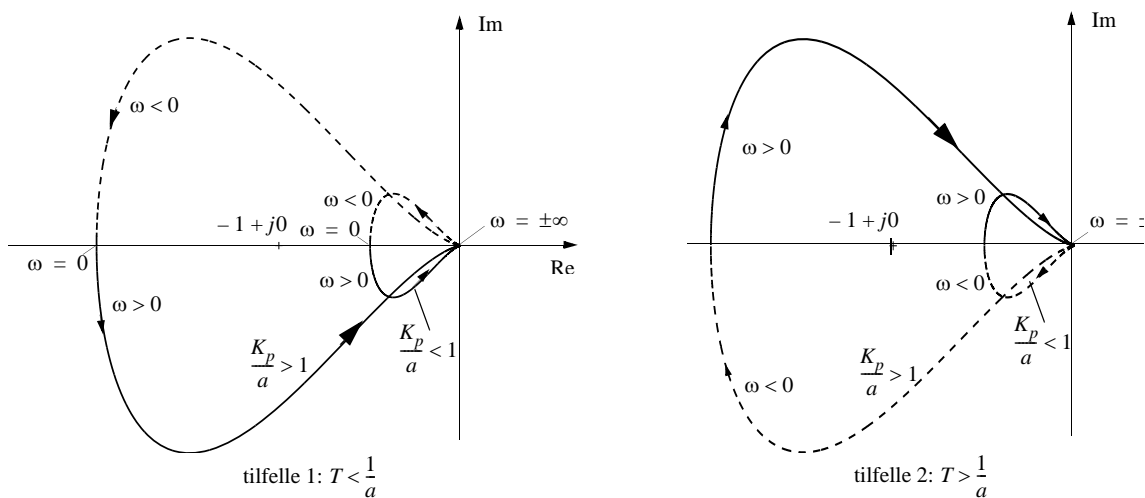
Nokre spørsmål skal svarast på ved å måle ut verdier på figurar i oppgavesettet – i slike tilfelle vil ein godta noko "målefeil"! Det blir inkludert nokre ekstra ark her i høve du rotar deg vekk ved teikning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (18 %)

Figur 1.1 viser polardiagrammer (Nyquist-diagrammer) for en prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1 + Ts)(s - a)}, \quad a > 0 \quad (1.1)$$

Polardiagrammene for $h_0(j\omega)$ er vist i to del-figurer, avhengig av innbyrdes forhold mellom prosessparametrene T og a .



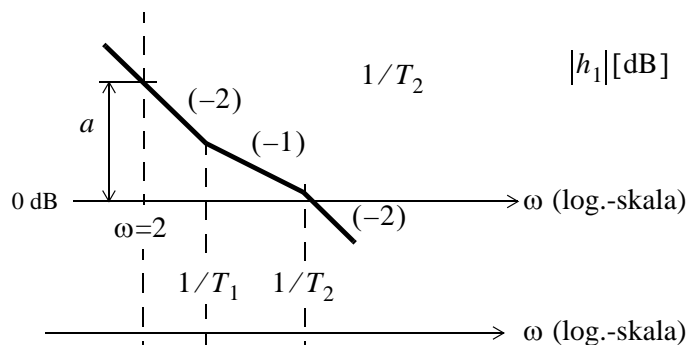
figur 1.1

- a) (2 %) Er denne prosessen åpent stabil (dvs. når man ikke har tilbakekopling), eller er den åpent ustabil? Begrunn svaret!
- b) (4 %) Finn v.h.a. Nyquists stabilitetskriterium hvilket krav som må stilles til K_p for at det lukkede systemet skal bli stabilt i tilfelle 1. Kan det lukkede system bli stabilt i tilfelle 2? Begrunn svaret!
- c) (4 %) Finn antall poler i høyre halvplan for det lukkede system **i tilfelle 2** for $K_p < a$ og $K_p > a$, v.h.a. Nyquists kriterium.
- d) (3 %) Sjekk resultatene fra b) og c) ved hjelp av nevnerpolynomet i det lukkede system.
- e) (5 %) Finn en tilstandsrommodell \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T av h_0 .

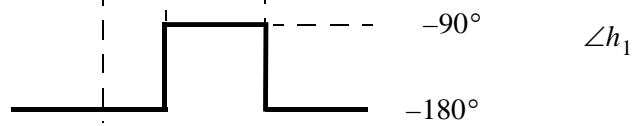
Oppgave 2 (20%)

Du skal finne transferfunksjoner $h_i(s)$ for to systemer som er gitt ved sine asymptotiske Bode-diagrammer. Benytt de oppgitte parametre a , T_1 , T_2 . (a er i absoluttverdi, ikke i dB. T_2 trengs bare for $h_1(s)$.)

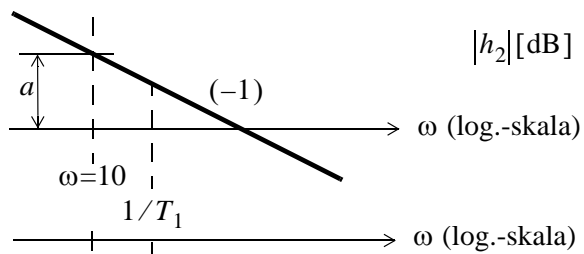
- a) (6 %) I tillegg til å finne $h_1(s)$, svar på dette:
 $h_1(s)$ er transferfunksjonen for to integratorer i serie med en bestemt type regulator. Hva slags regulator, og hvorfor denne typen regulator i dette tilfellet?



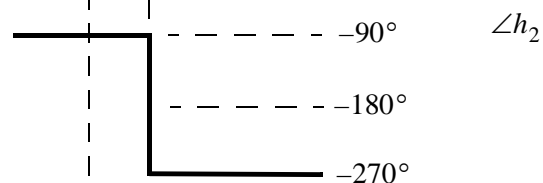
- b) (4 %) Hvor bør 0-dB-linja legges for å få størst mulig fasemargin ψ ? Hva blir da kryssfrekvensen ω_c ?



- c) (6 %) I tillegg til å finne $h_2(s)$, svar på dette:
 $h_2(s)$ tilhører en annen klasse transferfunksjoner enn $h_1(s)$. Hva er karakteristisk for denne klassen av transferfunksjoner?

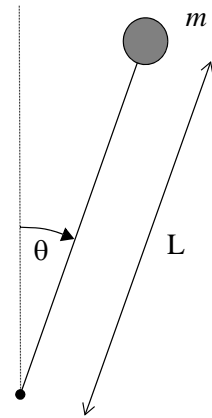


- d) (4 %) Vis at den a som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6$ dB blir $a = 0.05/T_1$.



Oppgave 3 (23 %)

Gitt en invertert pendel bestående av ei stang med lengde L og en masse m . Stangas masse kan ignoreres. Pendelen er festet i et punkt med friksjon, som gir et bremsende dreiemoment som er proporsjonalt med pendelens vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Dempekonstanten er D [Nm / (rad/s)].



- a) (7 %) Er dette et autonomt system?
Vis at ei differensialligning for vinkelposisjonen θ er

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin\theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta} \quad (3.1)$$

Ligninga (3.1) er ulineær. Hvorfor?

- b) (4 %) Sett $x_1(t) = \theta(t)$, definér en passende $x_2(t)$, og formulér (3.1) som et sett av to første ordens differensialligninger, på formen (= tilstandsrommodell):

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Fra nå av betrakter vi bare små vinkelutslag rundt likevektspunktet $\theta = 0$:

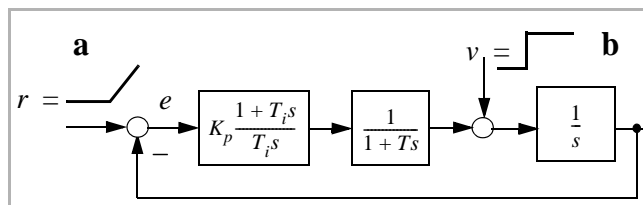
- c) (4 %) Linearisér systemet rundt likevektspunktet, dvs. du skal vise at matrisa A i tilnærminga

$$\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x}, \text{ blir } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- d) (8 %) Det oppgis at vinkelposisjonen ved $t = 0$ er $\theta_0 = 0$, og at pendelen da har vinkelhastigheten ω_0 [m/s]. Man kan da bruke dette, pluss Laplacetransformasjon og (3.3) til å finne $\theta(t)$. Det forlanges ikke her at du finner $\theta(t)$, men at du stopper et trinn før dette resultatet, dvs. du skal finne $\theta(s)$.

Oppgave 4 (6 %)

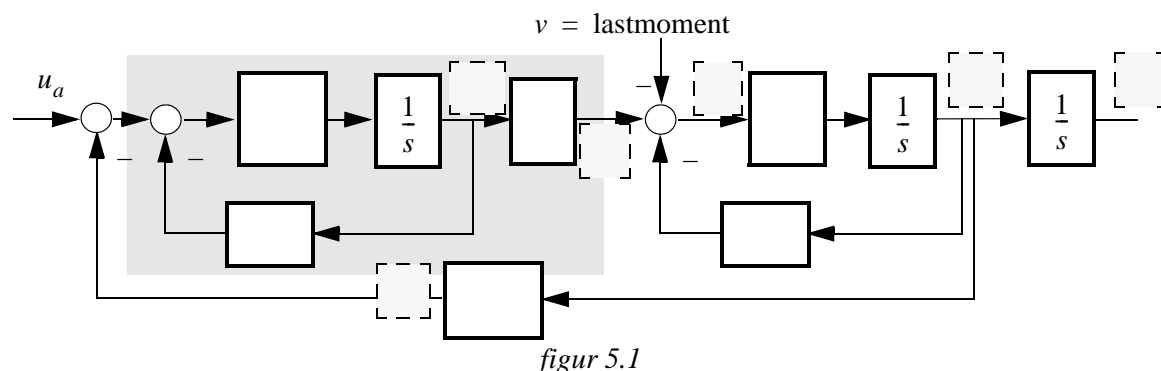
Gitt systemet i figuren til høyre. Det antas at regulatorparametre er valgt slik at det lukkede system er asymptotisk stabilt. Systemet utsettes for en sprang- eller rampefunksjon som vist. Du skal svare på om signal "a" og signal "b" (vurdert hver for seg) gir null stasjonært avvik: $e(\infty) = 0$, eller om avviket blir $0 < e(\infty) = \text{konst.} < \infty$, eller om det blir $e(\infty) = \infty$.



Du kan oppgi de to svarene ut fra begrunnede regler som du husker, eller du kan regne deg fram til dem.

Oppgave 5 (12 %)

Gitt blokkdiagrammet for en likestrømsmotor i figur 5.1:



- a) (7 %) Du skal skrive inn følgende størrelser på korrekt vis i blokkdiagrammet (til hjelp, se antydede posisjoner for noen av størrelsene):

- vinkelposisjon θ og vinkelhastighet ω
- ankerstrøm i_a
- motindusert spenning i rotor, e_a
- avgitt motormoment T_m
- netto moment til akselerasjon av motor, d
- ankermotstand R_a og ankerinduktans L_a
- momentkonstant K_T og spenningskonstant K_v for motindusert spenning
- motorens treghetsmoment J og motorens dempekonstant B

Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

Tips: Transferfunksjonen for undersystemet som er indikert med skravert

rektangel til venstre i figur 5.1, er
$$\frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (5.1)$$

Dette tipset er også nyttig for punkt b) nedenfor. Det gjør det mulig å besvare b) sjøl om du ikke greidde noe på punkt a).

For enkelhets skyld kan du, om du foretrekker det, tegne i figuren, og levere dette arket som en del av besvarelsen.

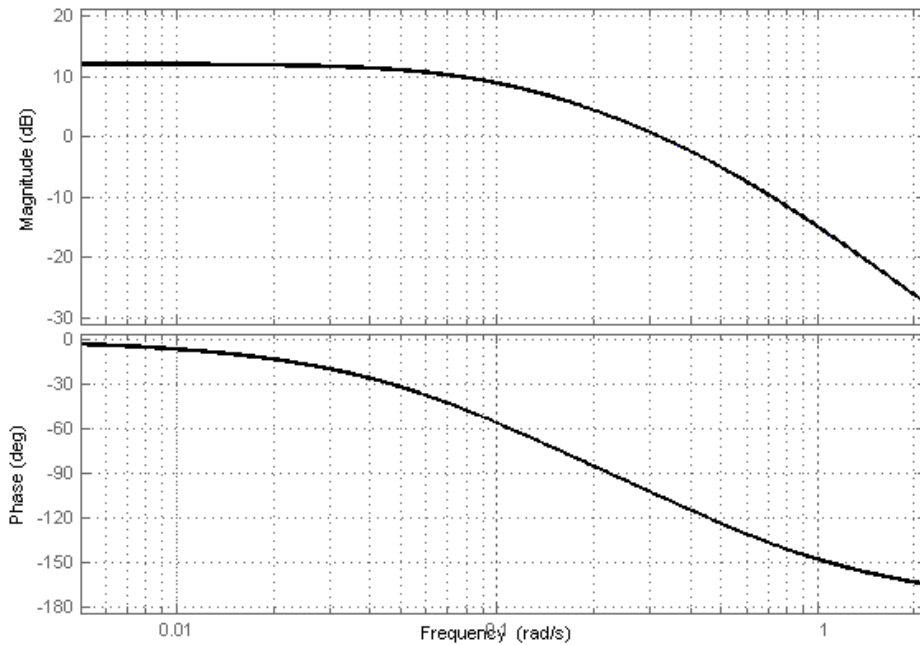
- b) (5 %) Anta at lastmomentet (forstyrrelsen v) kan måles (vi kan f.eks. tenke oss at motoren står i en heisekran med en måleinnetning for lastens vekt). Finn den ideelle foroverkopling fra v til u_a som helt eliminerer virkningen av v . Hva blir den beste *statiske* foroverkopling fra v til u_a ? Hva eliminerer den?

Oppgave 6 (21 %)

- a) (6 %) Gitt en prosess h_u , se bodediagram øverst neste side. Det oppgis at

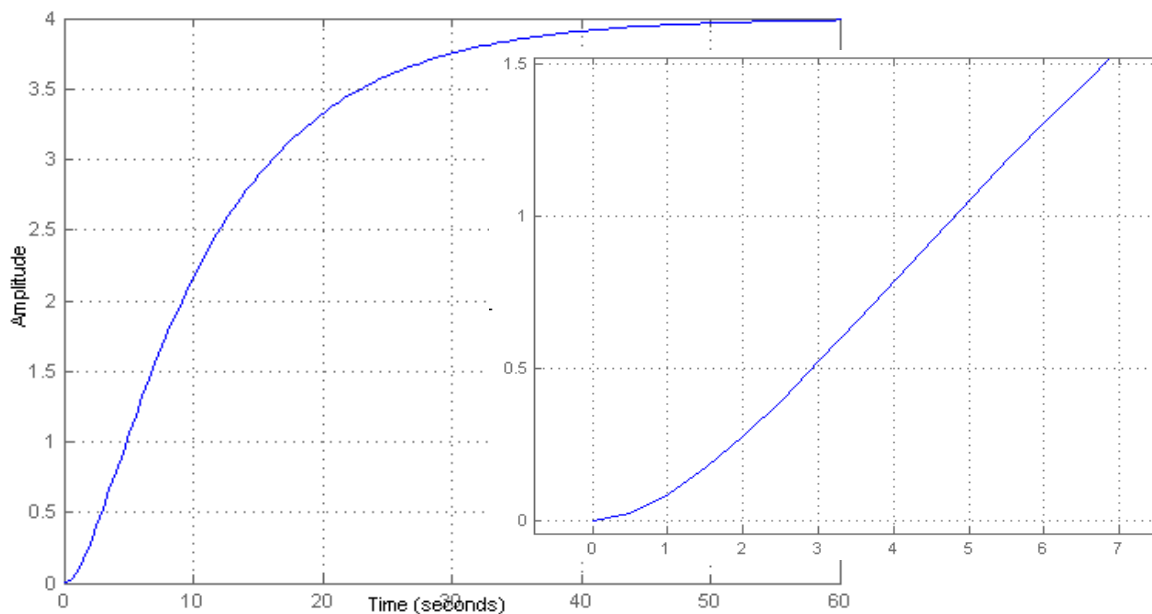
$$h_u = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2}. \quad (6.1)$$

Tegn inn asymptoter for amplitude og fase. Levér dette arket som del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å “smyge” dem inntil den oppgitte grafen. Oppgi bl.a. hvilken dB-verdi $|h_u|$ har helt til venstre.



Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

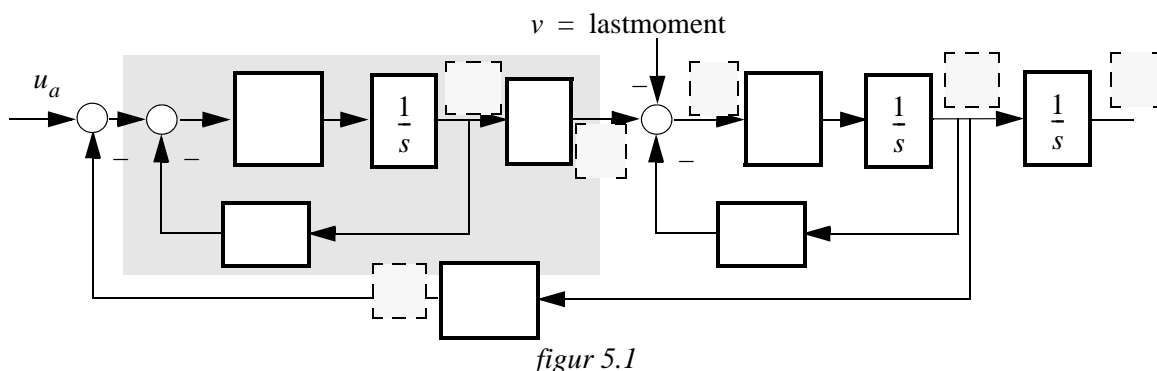
- b) (5 %) Prosessen skal reguleres med en PI-regulator. Finn K_p og T_i til denne ved hjelp av Skogestads SIMC-metode. Åpen-sløyfe-sprangrespons er som vist under, i to skalaer:



- c) (4 %) Du skal nå regulere den gitte h_u med diskret regulator. Velg en rimelig tastetid T og begrunn valget. Du må da endre én parameter som er inngangsdata i Skogestads SIMC-metode. Hvilken, og hvor mye?
- d) (6 %) For dette systemet er Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode ubrukelig. Hvorfor? Beslektet spørsmål: Hvor stor er forsterkningsmarginen med proporsjonalregulator og $K_p = 1$? Og hvor stor er fasemarginen?

Oppgave 5 (12 %)

Gitt blokkdiagrammet for en likestrømsmotor i figur 5.1:



- a) (7 %) Du skal skrive inn følgende størrelser på korrekt vis i blokkdiagrammet (til hjelp, se antydede posisjoner for noen av størrelsene):

- vinkelposisjon θ og vinkelhastighet ω
- ankerstrøm i_a
- motindusert spenning i rotor, e_a
- avgitt motormoment T_m
- netto moment til akselerasjon av motor, d
- ankermotstand R_a og ankerinduktans L_a
- momentkonstant K_T og spenningskonstant K_v for motindusert spenning
- motorens treghetsmoment J og motorens dempekonstant B

Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

Tips: Transferfunksjonen for undersystemet som er indikert med skravert

rektangel til venstre i figur 5.1, er
$$\frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (5.1)$$

Dette tipset er også nyttig for punkt b) nedenfor. Det gjør det mulig å besvare b) sjøl om du ikke greidde noe på punkt a).

For enkelhets skyld kan du, om du foretrekker det, tegne i figuren, og levere dette arket som en del av besvarelsen.

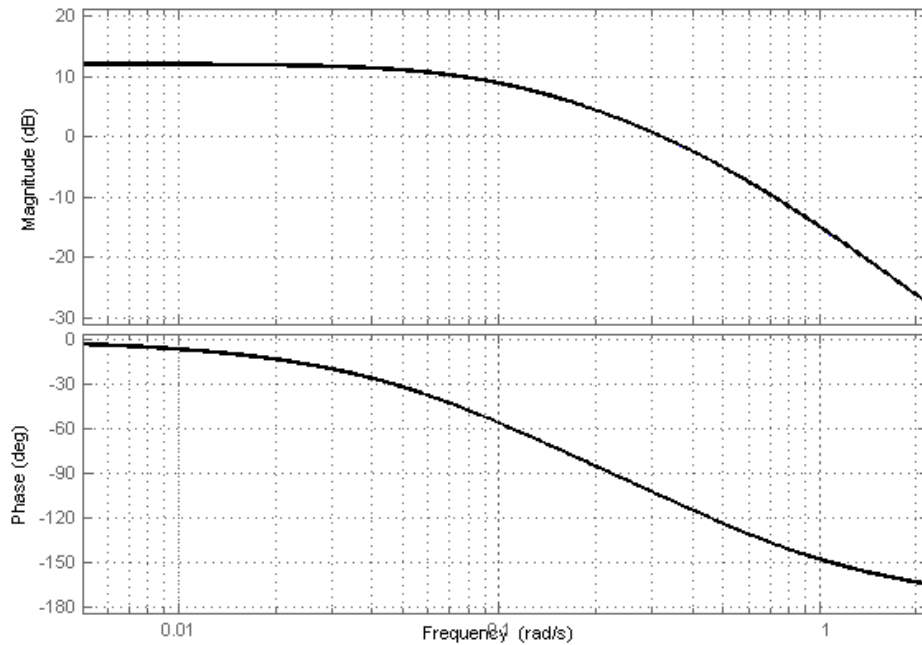
- b) (5 %) Anta at lastmomentet (forstyrrelsen v) kan måles (vi kan f.eks. tenke oss at motoren står i en heisekran med en måleinnetning for lastens vekt). Finn den ideelle foroverkopling fra v til u_a som helt eliminerer virkningen av v . Hva blir den beste *statiske* foroverkopling fra v til u_a ? Hva eliminerer den?

Oppgave 6 (21 %)

- a) (6 %) Gitt en prosess h_u , se bodediagram øverst neste side. Det oppgis at

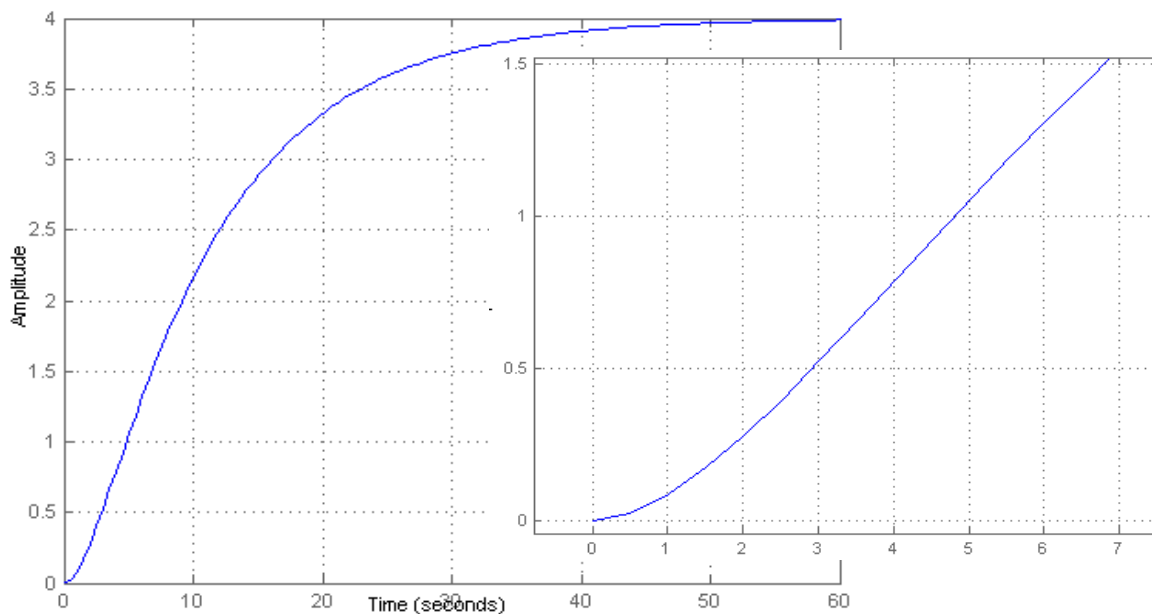
$$h_u = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2}. \quad (6.1)$$

Tegn inn asymptoter for amplitude og fase. Levér dette arket som del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å “smyge” dem inntil den oppgitte grafen. Oppgi bl.a. hvilken dB-verdi $|h_u|$ har helt til venstre.



Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

- b) (5 %) Prosessen skal reguleres med en PI-regulator. Finn K_p og T_i til denne ved hjelp av Skogestads SIMC-metode. Åpen-sløyfe-sprangrespons er som vist under, i to skalaer:



- c) (4 %) Du skal nå regulere den gitte h_u med diskret regulator. Velg en rimelig tastetid T og begrunn valget. Du må da endre én parameter som er inngangsdata i Skogestads SIMC-metode. Hvilken, og hvor mye?
- d) (6 %) For dette systemet er Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode ubrukelig. Hvorfor? Beslektet spørsmål: Hvor stor er forsterkningsmarginen med proporsjonalregulator og $K_p = 1$? Og hvor stor er fasemarginen?

Løsningsforslag til eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

19. mai 2012

Sist redigert: 14. mai 2012

Oppgave 1 (18%)

Gitt transferfunksjon

$$h_0(s) = K_p \frac{1}{(1 + Ts)(s - a)}, \quad a > 0. \quad (1)$$

- a) (2%) Prosessen er åpent ustabil pga pol $s = a$ i høyre halvplan.
b) (4%) Totalt vinkelbidrag er gitt av

$$\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p). \quad (2)$$

For at det lukkede systemet skal bli stabilt, dvs $N_n = 0$ må dermed vinkelbidraget bli 2π .

- (i) Tilfelle 1, $T < \frac{1}{a}$: Systemet er lukket stabilt dersom $\frac{K_p}{a} > 1$ siden kurven omslutter punktet $(-1,0)$ én gang i positiv vinkelretning for dette tilfellet.
(ii) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$: Kurven omslutter punktet $(-1,0)$ i negativ vinkelretning. Systemet kan dermed ikke bli stabilt i dette tilfellet.
c) (4%) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$:
(i) $K_p < a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = 0$. Fra (2) så blir dermed $N_n = 1$.
(ii) $K_p > a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi \Rightarrow N_n = 2$.
d) (3%) Nevnerpolynom i lukket sløyfe:

$$n_0(s) + t_0(s) = K_p + Ts^2 + s(1 - Ta) - a \quad (3)$$

$$= s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right) + \frac{1}{T}(K_p - a) \quad (4)$$

For at alle røttene skal ligge i venstre halvplan, så må alle koeffesientene i andregradspolynomet ha samme fortegn. Altså $\frac{1}{a} > T$ og $K_p > a$ siden koeffesienten for s^2 (1) er positiv. Dermed er det kun tilfelle **b**(i) hvor systemet er lukket stabilt.

- e) (5%) Tilstandsrom model, styrbar kanonisk form. Transferfunksjon (1) kan skrives om til

$$h_0(s) = \frac{K_p}{Ts^2 + s(1 - Ta) - a} = \frac{\frac{K_p}{T}}{s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right) - \frac{a}{T}}. \quad (5)$$

Fra formelsamling (V.19 - V.20):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{T} & -(\frac{1}{T} - a) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_p}{T} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Oppgave 2 (20%)

Gitt Bode plot i oppgaveteksten

a) (6%) $h_1(s)$ starter med -180° fase. Pga. -2 asymptote er dette en dobbel integrator. Deretter nullpkt i $\omega = \frac{1}{T_1}$ og pol i $\omega = \frac{1}{T_2}$. Dette gir h_1 på formen

$$h_1(s) = K \frac{1 + T_1 s}{s^2(1 + T_2 s)} \quad (9)$$

For lave frekvenser er

$$|h_1(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2} \quad (10)$$

Gitt $|h_1(j\omega)| = a$ ved $\omega = 2$, så blir $K = 4a$. Regulatoren er en begrenset PD-regulator. Systemet er åpent ustabil pga dobbel integrator, og fasen må dermed løftes for at det lukkede systemet skal bli stabilt. Begrenset PD-virkning gir lavere forsterkning ved høye frekvenser enn ideell PD-regulator. Dette forhindrer mulig forsterkning av høyfrekvent støy.

b) (4%) Ut ifra symmetribetraktninger på asymptotene, ser vi at 0-dB linja burde legges slik at den krysser midt mellom $1/T_1$ og $1/T_2$ for å få størst mulig fasemargin. Dette gir geometrisk middelvei (logaritmisk skala) $\omega_c = \left(\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

c) (6%) $h_2(s)$ består av en forsterkning, én integrator, ett nullpunkt og et førsteordens ledd:

$$h_2(s) = \frac{K'(1 - T_1 s)}{s(1 + T_1 s)}, \quad (11)$$

hvor $|h_1(j\omega)| = a$ ved $\omega = 10$, og det kun er én integrator. Dermed blir $K' = 10a$.

Systemet er et ikke-minimum fase system, og er spesielt vanskelig å regulere.

d) (4%) Indikert i asymptotisk fasediagram er $\omega_{180} = 1/T_1$. Fra

$$\Delta K = \frac{1}{|h_2(j\omega_{180})|} = \frac{1}{\frac{10a}{1/T_1}} = 2 \quad (12)$$

som gir $a = 0.05/T_1$ (6dB ≈ 2).

Oppgave 3 (23%)

Pendelystem med frisksjon i festepunktet

a) (7%) Systemet har ingen pådrag er dermed autonomt. Momentbalanse gir

$$I\ddot{\theta} = LG_x - F_D, \quad (13)$$

hvor $I = mL^2$ (V.6) er treghetsmomentet til kula, $G_x = mg \sin \theta$ er tyngdekomponenten ortogonalt på arma med lengde L og F_D er dempeleddet fra friksjonen. Fra masse-fjær-demper er $F_D = D\dot{\theta}$. Dermed blir modellen

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta}. \quad (14)$$

Systemet er ulineært pga sinus-leddet.

b) (4%) Definerer

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dette gir

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{D}{mL^2} x_2 \quad (17)$$

c) (4%) Likevektspunkt finnes ved $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Dette gir $x_2 \equiv 0$ og $x_1 = \pi n, n = 0, 1, \dots$. Betrakter likevektspunktet $(0,0)$. Bruker (V.8) i formelsamlinga:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{D}{mL^2} \end{array} \right] \Big|_{x=(0,0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{array} \right] \quad (18)$$

d) (8%) $(sI - \mathbf{A})^{-1}$ er gitt av

$$\left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ -\frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{array} \right]^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{D}{mL^2}) - \frac{g}{L}} \left[\begin{array}{cc} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ \frac{g}{L} & s \end{array} \right] \quad (19)$$

Måling $y = \theta(t)$, dermed er $c^T = [1 \ 0]$ og kun første rad av (19) er interessant. Initialtilstand for det lineariserte systemet er gitt av $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 = [0 \ \omega_0]^T$. Dermed vil kun element (1,2) bidra i uttrykket for $\theta(s)$ som blir gitt av

$$\theta(s) = \frac{1}{(s^2 + s\frac{D}{mL^2} - \frac{g}{L})} \omega_0 \quad (20)$$

Oppgave 4 (6%)

To alternative løsningsmetoder: enten ved bruk av regler for antall rene integrasjoner mellom forstyrrelse/referanse, eller ved bruk av sluttverditteorem

- (i) Rampefunksjon på referansen $r(s)$: Rampefunksjon har transferfunksjon $\frac{k}{s^2}$. Det er to rene integrasjoner i $h_0(s)$, det vil derfor ikke være stasjonæravvik i dette tilfellet.

- (ii) Sprang i forstyrrelsen $v(s)$: integrator mellom forstyrrelsen og $e(s)$. Feilen er gitt av (V.10 i form)

$$e(s) = -N(s)v(s)\frac{1}{s}, \quad N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} \quad (21)$$

$$= -\frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1 + Ts)}{(1 + T_i s + T_i s^2 (1 + Ts))} v(s) \quad (22)$$

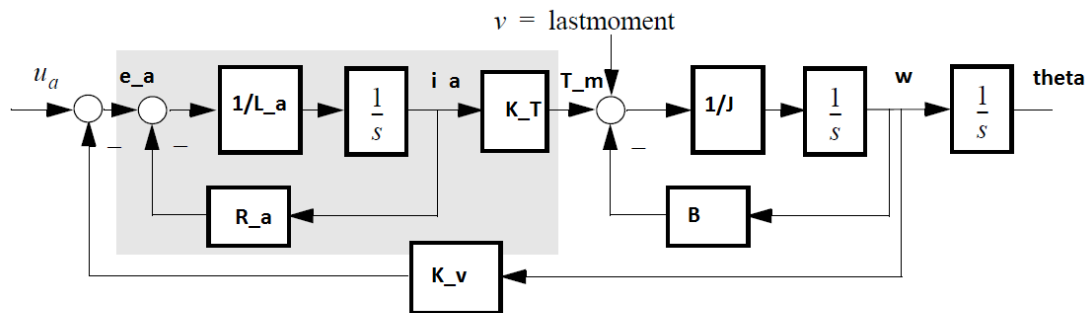
Sluttverditeoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1 + Ts)}{(1 + T_i s + T_i s^2 (1 + Ts))} \frac{k}{s} = 0 \quad (23)$$

pga av s^3 utenfor parentes i teller og s^2 parentes i nevner. Altså null stasjonæravvik også i dette tilfellet.

Oppgave 5 (12%)

- a) (7%) Se figur 1



figur 5.1

Figur 1: Blokkdiagram for oppgave 5a

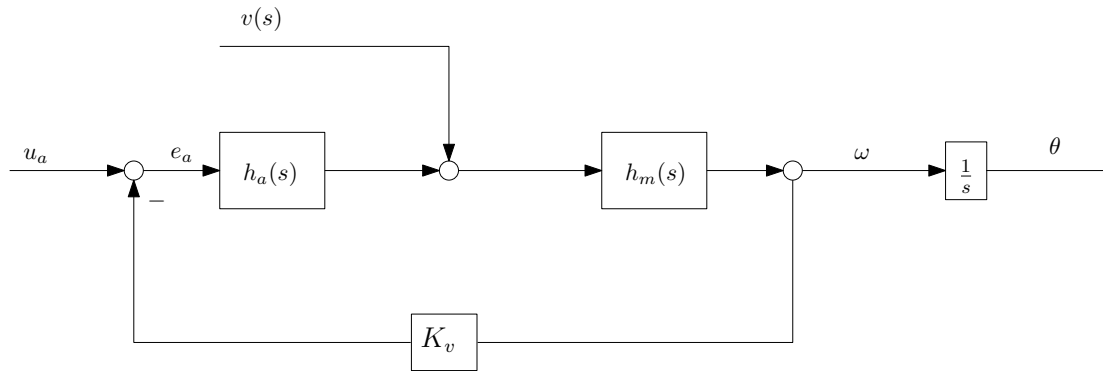
- b) (5%) Reduserer blokkdiagrammet i figur 1 til blokkdiagram i 2. Merk at tilbakekoblingen er en del av prosess (motor) modellen, og ikke en tilbakekoblingsløyfe fra utgangen. De to transferfunksjonene i figur 2 er gitt av

$$h_a(s) = \frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (24)$$

$$h_m(s) = \frac{1}{B + J s} \quad (25)$$

Foroverkoblingen h_{fv} må være slik at den motvirker forstyrrelsen v . Transferfunksjonen fra v til ω i åpen sløyfe blir

$$\frac{T_m}{v} = (h_{fv} h_a + 1) \quad (26)$$



Figur 2: Reduksjon av blokkdiagram.

Kravet for ideell foroverkobling blir at

$$h_{fvi}h_a + 1 = 0 \quad (27)$$

Dette gir ideell foroverkobling

$$h_{fvi}(s) = -\frac{1}{h_a(s)} = \frac{R_a + L_a s}{K_T}. \quad (28)$$

Statisk foroverkobling er følgelig gitt av

$$h_{fvs} = h_{fvi}(s)|_{s=0} = \frac{R_a}{K_T}. \quad (29)$$

Den statiske foroverkoblingen motvirker konstante forstyrrelser forskjellig fra null. Den statiske foroverkoblingen fra forstyrrelsen innvirker ikke på stabilitetsegenskapene til den lukkede sløyfen.

Oppgave 6 (21%)

Gitt bodediagram og prosessen (faktorisert):

$$h_u(s) = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2} = \frac{4}{(1 + 10s)(1 + 2s)} = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} \quad (30)$$

a) (6%) Transferfunksjon (30) gir følgende asymptotisk bodediagram:

1. Statisk forsterkning $K = 20 \log_{10}(4) \approx 12\text{dB}$, 0° fase.
2. Pol i $\omega = 1/T_1 = 0.1$, (-1) i asymptote, -90° fasebidrag.
3. Ny pol i $\omega = 1/T_2 = 0.5$, (-1) i asymptotebidrag, totalt (-2), -90° fasebidrag, totalt -180° .

b) (5%) Identifiserer 1. ordens model med tidsforsinkelse,

$$h_s(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s} \quad (31)$$

Største tidskonstant dominerer prosessen. Fra forstørret vindu av sprangrespons approksimeres tidsforsinkelse til $\theta = 0.5$ sekund. Dette gir første ordens model med tidsforinkelse:

$$h_p = \frac{4e^{-0.5s}}{1 + 10s} \quad (32)$$

Dersom vi velger en aggressiv, er et rimelig valg for ønsket lukket-sløyfe tidskonstant $\tau_c = 0.5\theta = 0.25$. Normalt rask innstilling oppnås ved $\tau_c = \theta = 0.5$, mens konservativ (mer robust) regulering oppnås ved å velge $\tau_c = 2\theta = 1$. Alle svar godtas. Regulatorparametre for PI-regulator med SIMC tuningsregler med aggressiv regulering gir da (V.16)

$$K_p = \frac{10}{4(0.5 + 0.25)} = 3.33 \quad (33)$$

$$T_i = \min(10, 4(0.5 + 0.25)) = 3. \quad (34)$$

c) (4%) Diskret regulering. Velger tastefrekvens dobbelt av høyeste frekvens i prosessen ($1/T_2$). Dvs, tastetid $T = 1s$. Parameteren som må endres i SIMC tuningen er tidsforsinkelsen θ som når blir $\tilde{\theta} = \theta + \frac{T}{2} = 0.5 + 0.5 = 1$ sekund.

d) (6%)

- (i) ZN tuningsmetode i lukket sløyfe fungerer ikke i dette tilfellet da fasen aldri er lavere enn -180° , og systemet kan ikke plasseres på stabilitetsgrensa ved kun å øke forsterkning. Vi vil derfor ikke oppnå stående svinninger som er nødvendig i ZN metode.
- (ii) Fasen krysser aldri -180° , amplituden har (-2) i asymptote og synker monotont med denne raten for frekvenser over $1/T_2$. Forsterkningsmarginen blir derfor uendelig i dette tilfellet. Fasemarginen er endelig og kan leses av til ca 80° .



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

torsdag 30. mai 2013

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann, som altså er tillatt.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det inkluderes noen ekstra ark her i tilfelle du roter deg bort ved tegning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (6 %)

Et diskret signal $x[k]$ skal *lavpassfiltreres* med et tidsdiskret filter, det vil si at vi ønsker å dempe de høye frekvenskomponentene i signalet. Kall utgangssignalet fra filteret $y[k]$. Filteret har tidsintervall T mellom hver gang det inkrementeres. (altså $T = \text{“tastetid”} = \text{“samplingsid”}$). Vi lager filteret med utgangspunkt i en

kontinuerlig transferfunksjon $\frac{1}{1 + T_1 s}$, og ønsker tilnærmet samme knekkfrekvens.

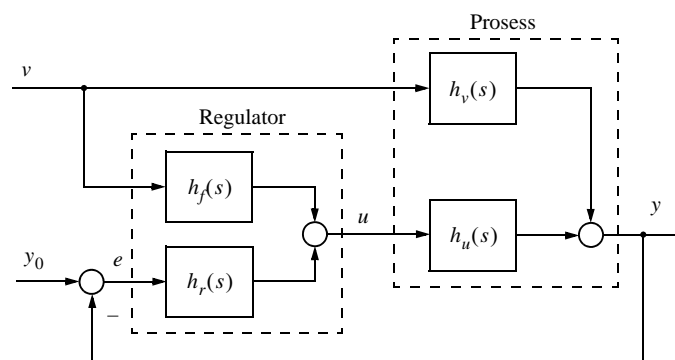
Algoritmen som utgjør det diskrete filteret blir $y[k + 1] = a_1 y[k] + b_0 x[k + 1] + b_1 x[k]$ (1.1)

Finn koeffisienten a_1 . (Tips: Det oppgis til kontroll at $b_0 = b_1 = \frac{T}{2T_1 + T}$.)

Oppgave 2 (11 %)

Gitt strukturen i figur 2.1.

- a) (4 %) Finn *foroverkopplingsgraden* $L(s)$ i uttrykket $y(s) = N(s)L(s)v(s)$.
- b) (3 %) Finn den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$.
- c) (2 %) Hva blir $L(s)$ med ideell foroverkoppling?
- d) (2 %) Hva blir den ideelle *statistiske* foroverkoppling?



figur 2.1

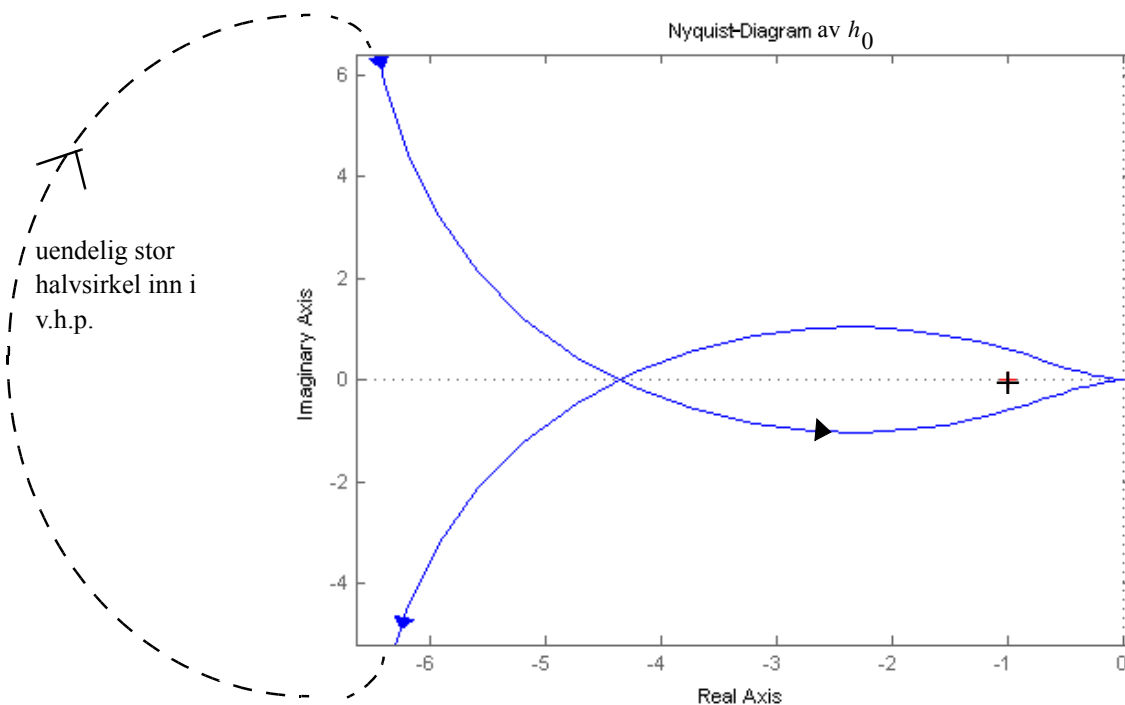
Oppgave 3 (19 %)

Gitt en (for dere etter hvert velkjent!) prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1+Ts)(s-a)}, \quad a > 0 \quad (3.1)$$

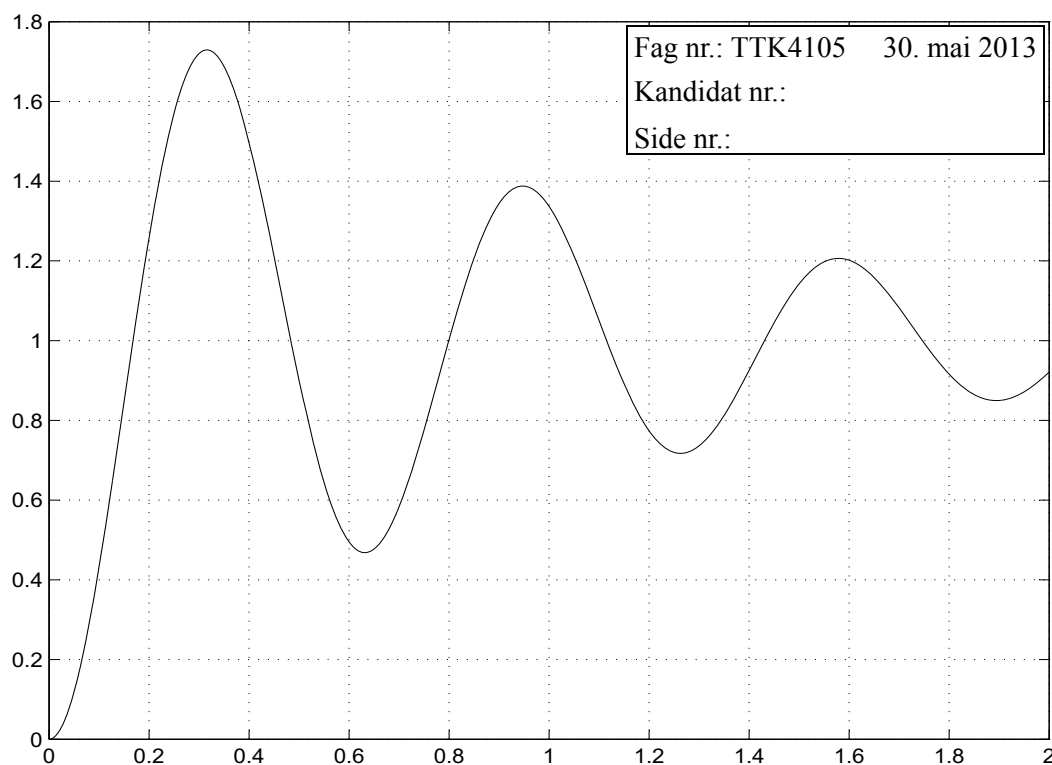
For $T < \frac{1}{a}$ og $K_p > a$ er det lukkede systemet, $\frac{y}{y_0}(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}$ stabilt.

- (4 %) Anta at y_0 endres som et enhetssprang. Finn det stasjonære avviket $e(t \rightarrow \infty)$.
- (4 %) Vis at en PI-regulator, under forutsetning av at regulatorparametre er valgt slik at det lukkede system er stabilt (det er mulig, se pkt. d nedenfor), vil gi null stasjonært avvik.
- (2 %) For å stille inn PI-regulatoren for dette systemet, kan du *ikke* bruke Ziegler-Nichols' eller Skogestads SIMC-metode. Hvorfor ikke?
- (5 %) Gitt prosessparametre $a = 0.1$ og $T = 2$. Da blir det lukkede system stabilt hvis vi for eksempel velger regulatorparametre $K_p = 0.5$ og $T_i = 20$. Figur 3.1 viser polardiagrammet (Nyquist-diagrammet) for h_0 med PI-regulator og de valgte regulatorparametre. Vis ved hjelp av Nyquists kriterium at det lukkede system er stabilt.



figur 3.1

- (4 %) Vis hvor mange poler i høyre halvplan vi får i det lukkede system hvis vi reduserer K_p for mye! Hvilken ca. verdi av K_p plasserer systemet på stabilitetsgrensa? (Mål ut i figuren.)

Oppgave 4 (6 %)

Figuren over viser enhetssprangresponsen til $h(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$. (4.1)

Du skal finne relativ dempningsfaktor ζ og udempet resonansfrekvens ω_0 . Mål med linjal, vis utregning og velg nærmeste verdier blant alternativene under. Levér den påtegnede figur som del av besvarelsen.

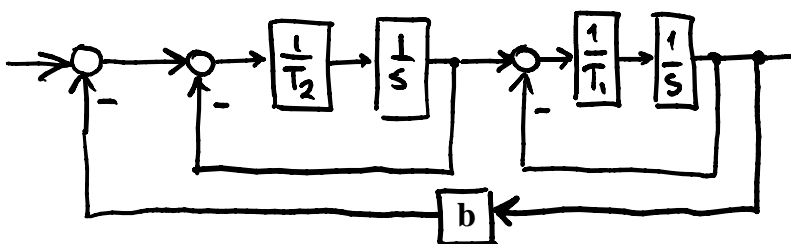
A	$\zeta, \omega_0 = 0.15, 10$	C	0.1, 10	E	0.15, 15
B	0.1, 15	D	0.07, 10	F	0.07, 15

Oppgave 5 (6%)

Gitt en modell som vist i figuren til høyre.

Du skal forenkle modellen til et første ordens system av typen

$$h(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$



når det oppgis at T_1 er mye større enn T_2 . Du skal altså finne K og T .

Oppgave 6 (22 %)

En bil beveger seg på en horisontal vei. Anta at skyvekraften fra bilens motor er proporsjonal med gasspådraget g , og at samlede friksjonskrefter (luftmotstand dominerer) er proporsjonale med kvadratet av bilens hastighet w .

- a) (3 %) Vis at en differensialligning for bilens hastighet w er

$$\dot{w} = C_G g - C_W w^2, \quad \text{der } C_W \text{ og } C_G \text{ er konstanter.} \quad (6.1)$$

- b) (2 %) Finn bilens maksimale hastighet w_{\max} når maksimalt gasspådrag er g_{\max} .

Automatisk hastighetsregulering, også kalt "cruise-control", er vanlig i nyere biler. Man har en referansehastighet r som man ønsker bilen skal holde. Anta at det er valgt en reguleringsstrategi som følger ligningen

$$\dot{g} = K_p(r - w) \quad (6.2)$$

- c) (3 %) Hva slags regulator er dette? Hva oppnår man med denne regulatoren? (Verbalt svar tilstrekkelig.)

Vi innfører nå notasjonen $\underline{x} = \begin{bmatrix} w \\ g \end{bmatrix}$, og skriver systemet (6.1), (6.2) på tilstandsromform, med r som pådrag, $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, r)$.

- d) (5 %) Anta konstant hastighet w_0 og stasjonære forhold. Uttrykk g_0 ved w_0 . Du skal utlede A og \underline{b} i en linearisert modell $\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x} + \underline{b}\Delta r$ rundt denne stasjonære tilstand.

Modellen gjelder for små endringer $\Delta\underline{x}$ og Δr . For den videre regning oppgis svaret:

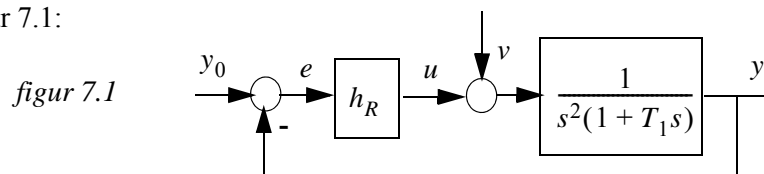
$$A = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

- e) (5 %) Finn egenverdiene til det lineariserte system. Kommentér forskjellen i stabilitet for reguleringsystemet ved lave kontra høye hastigheter.

- f) (4 %) Anta fra nå av at bilen kjører svært langsomt. Hastighetsresponsen $\Delta w(t)$ fra stillstand når referansen økes som et sprang fra 0 til en liten verdi Δr , er $\Delta w(t) = \Delta r[1 - \cos(\omega t)]$. Hva skal stå der spørsmålsteget er?

Oppgave 7 (30 %)

Gitt reguleringsstrukturen i figur 7.1:

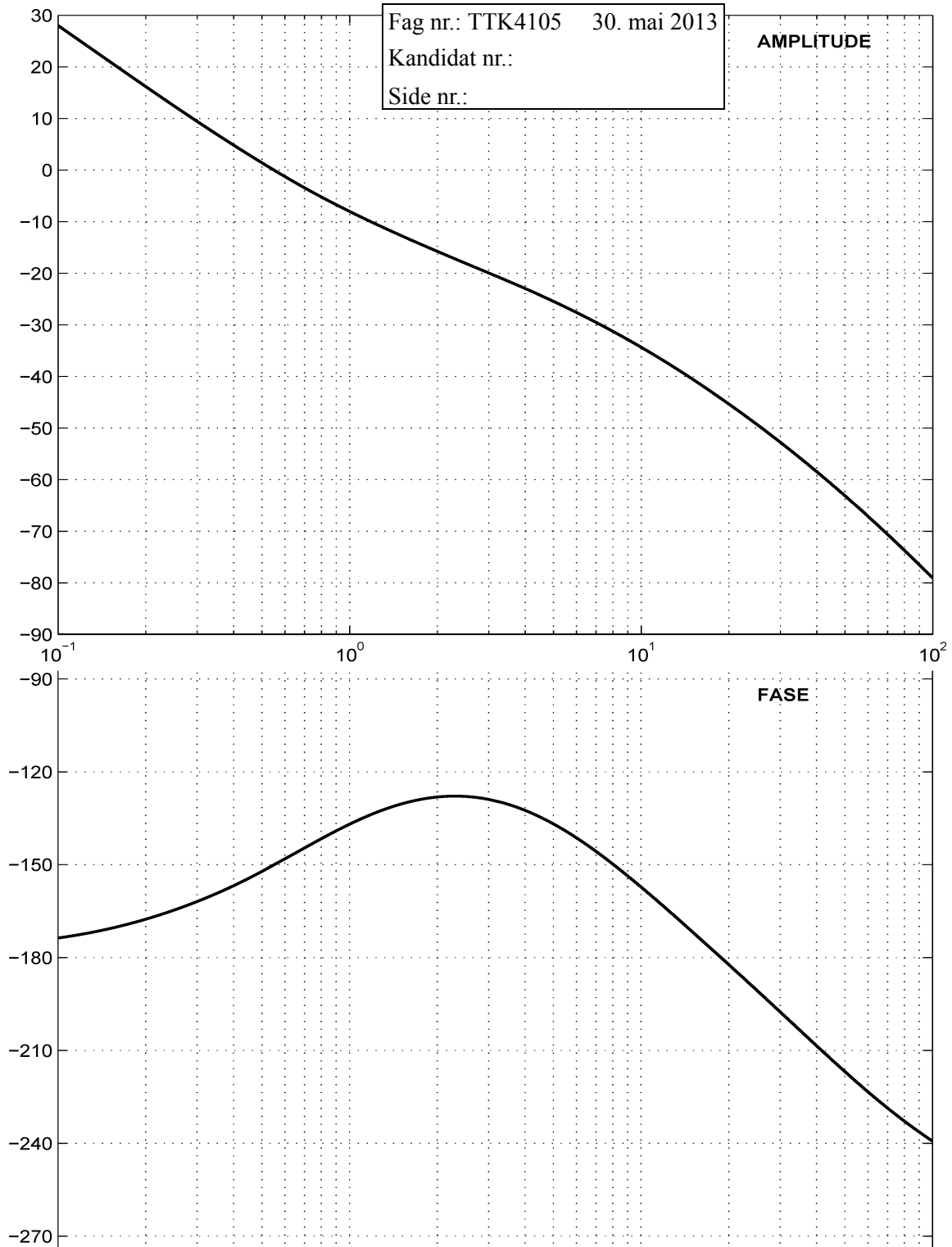


- a) (4 %) Vi velger $h_R(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$, $0 < \alpha < 1$ Hva kalles en slik regulator?

Hvorfor bør vi velge en slik i dette tilfellet?

- b) (8 %) Figur 7.2 viser Bode-diagram for h_0 med $T_1 = 0.02$, $T_d = 1.25$, $\alpha = 0.1$, $K_p = 0.25 = -12.04 \text{ [dB]} \approx -12 \text{ [dB]}$.

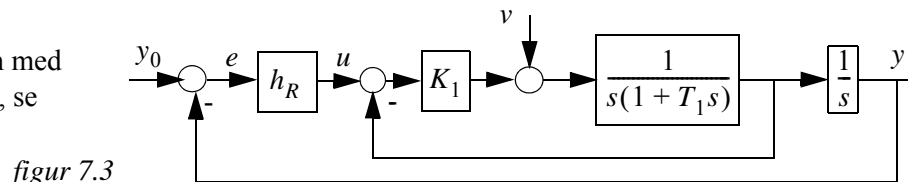
Tegn inn asymptotene til $h_0(j\omega)$, amplitude og fase. Det skal framgå tydelig, om nødvendig med forklaring i tillegg til tegning, hvordan asymptotene er fastlagt – det er ikke nok å bare "smyge dem inntil" de to oppgitte grafer. Ta arket med figur 7.2 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.



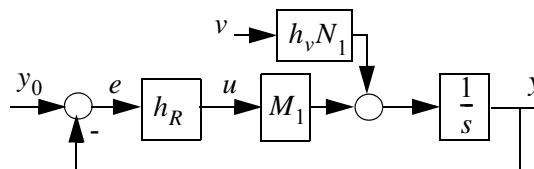
figur 7.2

- c) (8 %) Finn i Bode-diagrammet en ny 0-dB-linje og den tilsvarende nye verdi K_{p1} [dB], som gir størst fasemargin ψ . Videre: Bruk Nichols-diagrammet (gitt i figur 7.4 for h_0 med de samme parameterverdier som i punkt b) til å finne den K_{p2} [dB], som gir resonanstopp 6 dB i avviksforholdet N . Og hvordan finner du K_{p1} [dB] ut fra Nichols-diagrammet? (Tips: $K_{p2} > K_{p1}$.) Tegn inn, og ta arket med figur 7.4 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

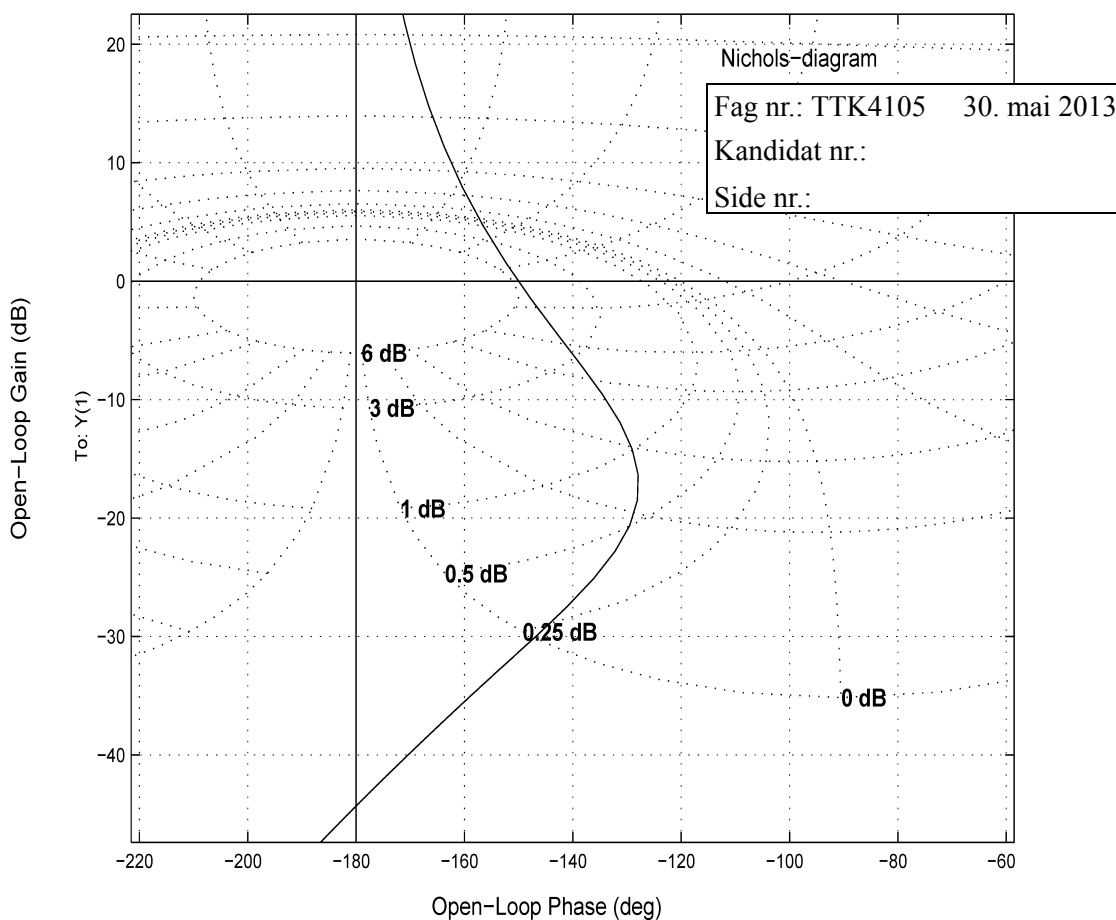
Vi modifierer nå reguleringsstrukturen med intern tilbakekopling, se figur 7.3.



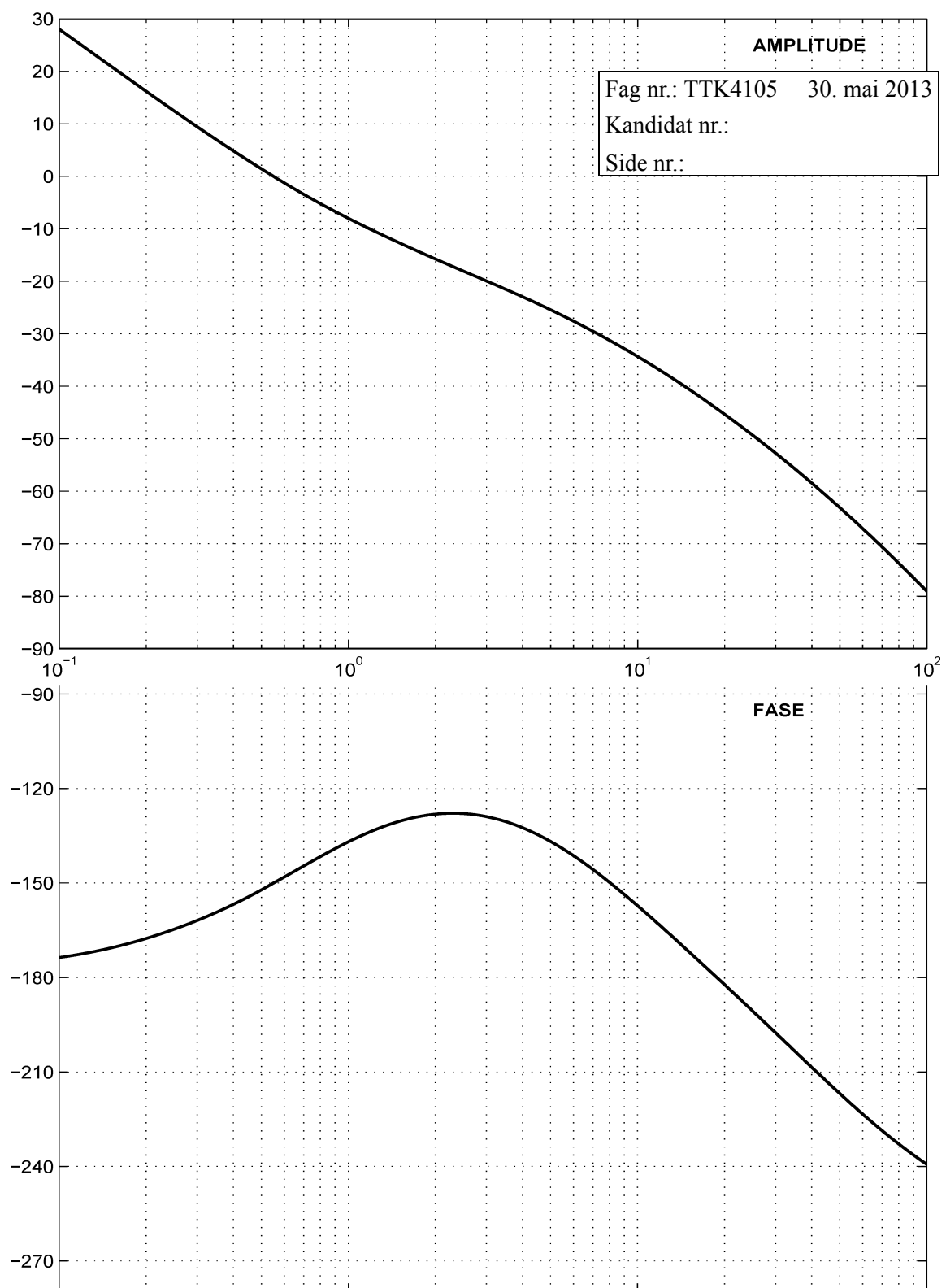
K_1 er nå en "stor" konstant forsterkning. Diagrammet i figur 7.3 kan bringes på formen som er vist i figuren til høyre.



- d) (6 %) Velg $K_1 = 1/T_1$. Finn h_v , N_1 og M_1 .
- e) (4 %) Forklar kort minst to fordeler ved denne løsningen med intern tilbakekopling!



figur 7.4



(Ekstra ark hvis du trenger det.)

Løsningsforslag eksamen TTK 4105

Reguleringsteknikk 30/5-2013

1

Oppgave 1) Bruker (V.21) $s \rightarrow \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$h(z) = \frac{y_k}{u_k}(z) = \frac{1}{1 + T_1 \left[\frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1} \right]} = \frac{T(z+1)}{T(z+1) + 2T_1(z-1)}$$

$$\Rightarrow y_k [T(z+1) + 2T_1(z-1)] = u_k T(z+1)$$

$$\Rightarrow y_k (T + 2T_1) = y_{k-1} (2T_1 - T) + T(u_k + u_{k-1})$$

$$\Rightarrow y_k = \underbrace{\frac{2T_1 - T}{2T_1 + T}}_{a_1} y_{k-1} + \underbrace{\frac{T}{2T_1 + T}}_{b_0 = b_1} (u_k + u_{k-1})$$

02) alle spørsmål, læreboka side 384-385
Men Obs: Feil i 02a): skulle stått

$y(s) = N(s)L(s)h_v v(s)$. Vil bli hensyntatt.
↑!

03a) Sluttvorditeoremet: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s e(s))$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + h_0} \cdot y_0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{n_0}{n_0 + t_0} \cdot y_0 \right] =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \left[\frac{(1+Ts)(s-a)}{(1+Ts)(s-a) + K_p} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right] = \frac{-a}{-a + K_p} = \underline{\underline{\frac{a}{K_p - a}}}$$

03b) Bytter ut K_p med $h_r = K_p \frac{1+T_1 s}{T_1 s}$

Når $s \rightarrow 0$ går $h_r \rightarrow \infty$. Altså går $e(t) \rightarrow 0$.

03c) Z-N og Skogestad forutsetter at prosessen er åpent stabil. Det er ikke tilfelle her, p.g. a pol i $+a$.

○ 3 d) (V.11) = Nyquist: $\Delta L(1+ho) = -2\pi(N_n - N_p)$ ²

Fra figur 3.1 ser vi at $\Delta L(1+ho) = +2\pi$
 ho har en pol i hhp $\Rightarrow N_p = 1$. Vi får
 $+2\pi = -2\pi(N_n - 1) \Leftrightarrow -1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 0$
 \Rightarrow lukket system er stabilt.

○ 3 e) Da blir $\Delta L(1+ho) = -2\pi$ i stedet.
 $\Rightarrow 1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 2$ pder i hhp

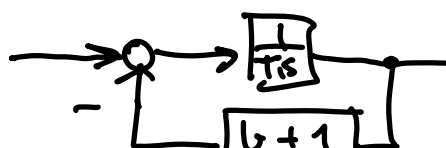
Målt: $\frac{1.6 \text{ cm}}{6.95} \cdot 0.5 \Rightarrow \text{ny } k_p = 0.115 \Leftrightarrow \text{stab. grense}$

○ 4) Avstand en periode T måles, $T \approx 0.63$, $\beta = \frac{2\pi}{T} = 9.97$
 Damping måles som $\frac{A_2}{A_1}$, der toppen A_2
 ligger T etter toppen A_1 .

Vi har $e^{-\alpha T} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow -\alpha T = \ln\left(\frac{2.15}{4.05}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{0.63} \ln\left(\frac{4.05}{2.15}\right) \approx 1$
 $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1^2 + 9.97^2} = 10$, $\xi = \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right) = \frac{1}{10}$

\Rightarrow Alternativ C: $\xi = 0.1, \omega_0 = 10$

○ 5) $T_2 \ll T_1$. Venstre indre delsystem
 blir da ≈ 1 i stedet for $\frac{1}{1+T_2 s}$. Reduserer
 resten:

 $\Rightarrow \frac{\frac{1}{T_1 s}}{1 + (b+1)\frac{1}{T_1 s}} =$
 $\frac{1}{T_1 s + b + 1} = \left(\frac{1}{b+1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_1}{b+1} s} \Rightarrow K = \frac{1}{b+1}, T = \frac{T_1}{b+1}$

Annen metode: Redusere diagrammet først,
 så sette $T_2 \approx 0$:

$h(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{(T_1 + T_2)}_{\approx 0} s + \underbrace{T_1 T_2}_{\approx 0} s^2 + b} \approx \frac{1}{T_1 s + b + 1}$ / samme svar!

Oppgave 6

a)

Benytter Newtons lov:

$$\sum F = ma = m\dot{w}. \quad (21)$$

I oppgaveteksten er sammenhengen mellom kreftene gitt slik at differensialligningen kan settes opp:

$$\sum F = C_1 g - C_2 w^2 = m\dot{w} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{m} g - \frac{C_2}{m} w^2 = \dot{w} \quad (23)$$

$$\dot{w} = \underline{\underline{C_G g - C_W w^2}}, \text{ der } C_G = \frac{C_1}{m} \text{ og } C_W = \frac{C_2}{m}. \quad (24)$$

b)

Den maksimale hastigheten finnes ved stasjonære forhold, dvs $\dot{w} = 0$.

$$\dot{w} = 0 \Rightarrow C_G g_{\max} - C_W w_{\max}^2 \Rightarrow \underline{\underline{w_{\max} = \sqrt{\frac{C_G g_{\max}}{C_W}}}}. \quad (25)$$

c)

Vi har $\dot{g} = K_p(r - w)$, som gir $g(t) = K_p \int_0^t (r - w) d\tau$. Dette er en I-regulator. Etter innsvingningstiden blir $\dot{g} = 0$.

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow K_p(r - w) = 0 \Rightarrow r = w, \quad (26)$$

altså, vi oppnår referansen til tross for forstyrrelse fra friksjon og luftmotstand.

d)

Finner g_0 som uttrykk av w_0 vha ligningen fra a):

$$0 = C_G g_0 - C_W w_0^2 \Rightarrow \underline{\underline{g_0 = \frac{C_W}{C_G} w_0^2}}. \quad (27)$$

Med $x_1 = w$ og $x_2 = g$ kan vi skrive

$$\dot{x}_1 = C_g x_2 - C_W x_1^2 = f_1(\underline{x}, r) \quad (28)$$

Den lineariserte modellen finnes ved hjelp av formlene fra formelsamlingen in-satt arbeidspunktet (\underline{x}_0, r_0) .

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix} \Delta r. \quad (30)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2C_W w_0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = C_G \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -K_p \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = K_p. \quad (36)$$

Vi får dermed følgende modell når vi setter inn arbeidspunktet (\underline{x}_0, r_0) :

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \Delta r. \quad (37)$$

e)

Eigenverdiene finnes fra $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda(\lambda + 2C_W w_0) + K_p C_G = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = -C_W w_0 \pm \sqrt{C_W^2 w_0^2 - K_p C_G}}. \quad (38)$$

Ved lave hastigheter (når $C_W w_0^2 < K_p C_G$) blir systemet marginalt stabilt med to poler på imaginæraksen. Ved høye hastigheter er systemet eksponensielt stabilt med to poler i venstre halvplan.

f)

Dersom bilen kjører langsomt har vi $w_0^2 \approx 0$. Da blir modellen (laPlace-transformert)

$$s\Delta w(s) = C_G \Delta g(s) \quad (39)$$

$$s\Delta g(s) = K_p (\Delta r(s) - \Delta w(s)). \quad (40)$$

Substituerer man for $\Delta g(s)$, får man

$$s\Delta w(s) = C_G \left(\frac{K_p}{s} \Delta r(s) - \frac{K_p}{s} \Delta w(s) \right) \quad (41)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta r}(s) = \frac{C_G K_p}{s^2 + C_G K_p}. \quad (42)$$

Dette systemet har (formelsamlingen) sprangrespons $k(t) = K(1 - \cos(\omega_0 t))$, der $K = 1$ og $\omega_0 = \sqrt{C_G K_p}$. Altså, dersom spranget er på Δr , blir responsen

$$\underline{\underline{\Delta w(t) = \Delta r \left(1 - \cos(\sqrt{C_G K_p} t) \right)}}. \quad (43)$$

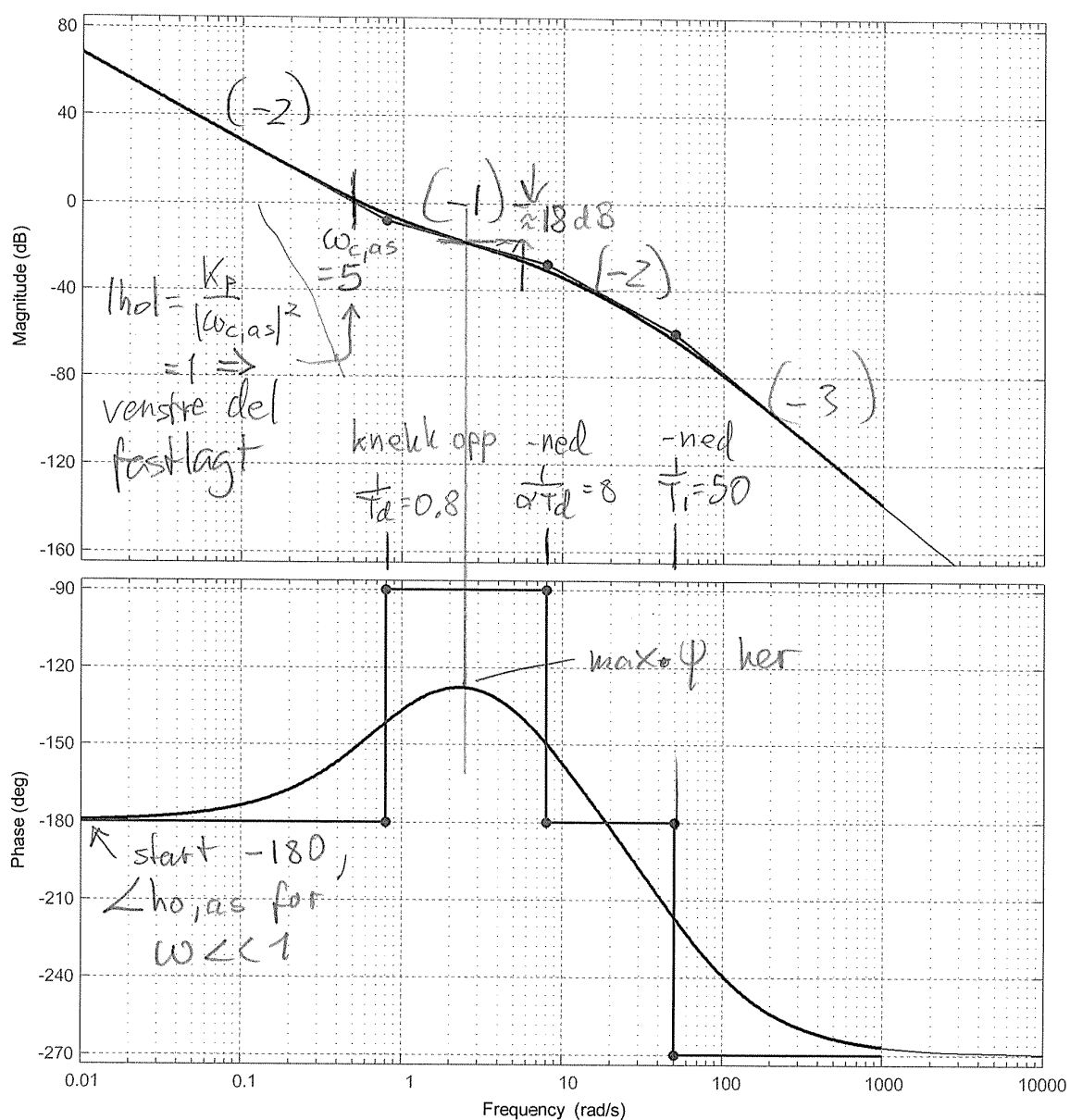
Oppgave

a)

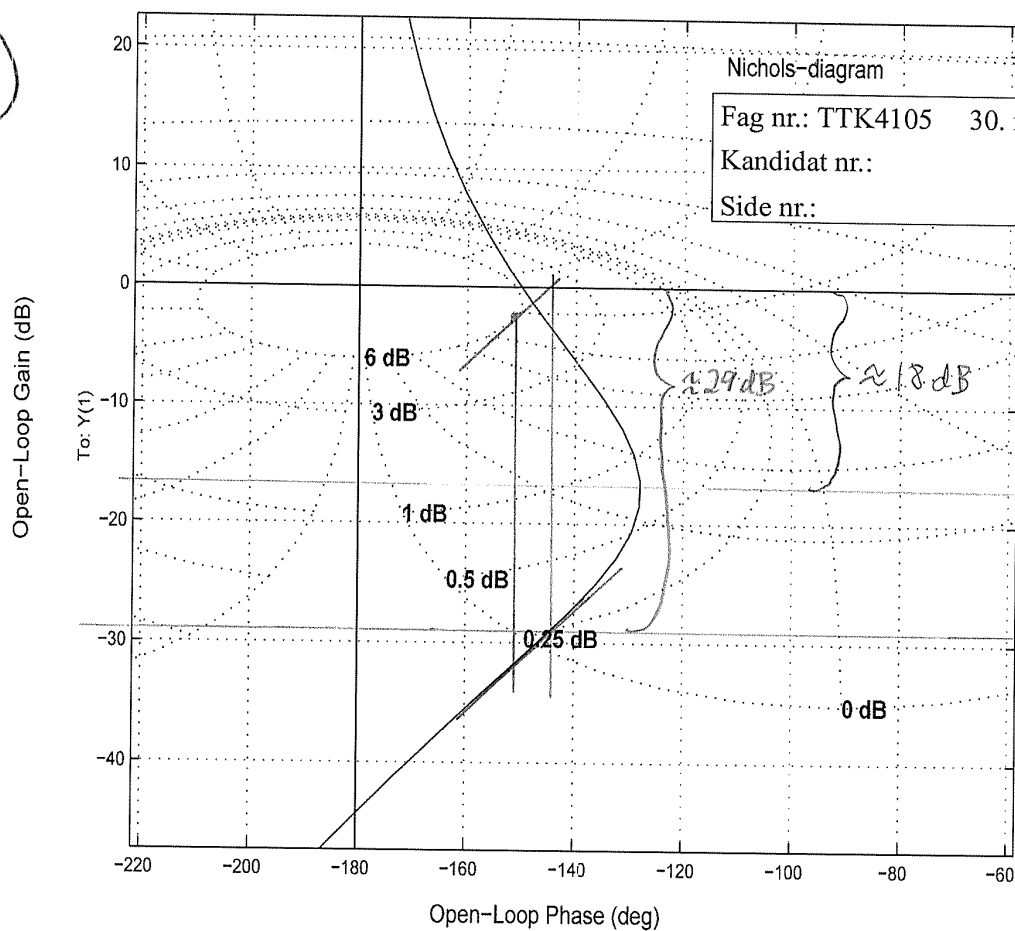
Dette er en begrenset PD-regulator. Denne er nødvendig her da prosessen $h_u(s)$ har to rene integratorer i seg. Dermed blir faseresponsen -180° fra starten av, og vi trenger et tidlig nullpunkt for å løfte den opp.

b) Se påtegnet diagram under

c) $K_{p1} [dB] = K_p [dB] + 18 = -12 + 18 = 6 \text{ dB}$



7c)



figur 7.4

7d)

Den interne sløyfen har åpen-sløyfetransferfunksjon $h_{01} = \frac{K_1}{s(1+T_1s)}$. Vi har at feilforholdet $N_1(s) = \frac{1}{1+h_{01}(s)}$. Altså er

$$N_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{s(1+T_1s)}{s(1+T_1s) + K_1} \quad (51)$$

Av figuren ser vi at $h_v(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)}$.

$$M_1(s) = \frac{h_{01}(s)}{1+h_{01}(s)} = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1s)}}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1s) + K_1} \quad (52)$$

7e) Flere fordeler kan nevnes, nok med to for full pott:

- Vi kan nå ha integralvirkning i h_R , for den indre sløyfa har fjernet en integrator og dermed bedret faseforløpet til den ytre sløyfetransferfunksjonen.
- K_1 kan økes kraftig, dette gir hurtigere respons fra y_0 til y
- virkningen av v blir mindre på y , p-g-a. N_1 liten for K_1 stor



Institutt for teknisk kybernetikk
Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
 Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 regulerings-teknikk

torsdag 22. mai 2014

Tid: 0900 - 1300

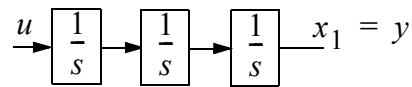
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det inkluderes et ekstra ark her i tilfelle du roter deg bort ved tegning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (17 %)

Gitt et enkelt system som består av tre integratorer i serie:



a) (5 %) Uttrykk systemet som en tilstandsrommodell ved å finne matrisene/vektorene A , \underline{b} , \underline{c}^T .

b) (5 %) Vis at transisjonsmatrisa blir:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Tips: Den kan i dette tilfellet finnes ved potensrekke, fordi alle ledd blir null fra og med tredje potens-leddet i rekka. Men andre framgangsmåter er også tillatt.)

c) (3 %) Finn impulsresponsen $h(t)$ ved residuregning på systemets transferfunksjon $h(s) = \frac{y}{u}(s)$.

d) (2 %) Finn den samme impulsresponsen ved en annen metode, som du kan velge sjøl.

e) (2 %) Er dette systemet stabilt, marginalt stabilt eller ustabil? Begrunn svaret, både ut fra en inngang/utgangs-betraktning, og ut fra egenverdiene plassering.

Oppgave 2 (4 %)

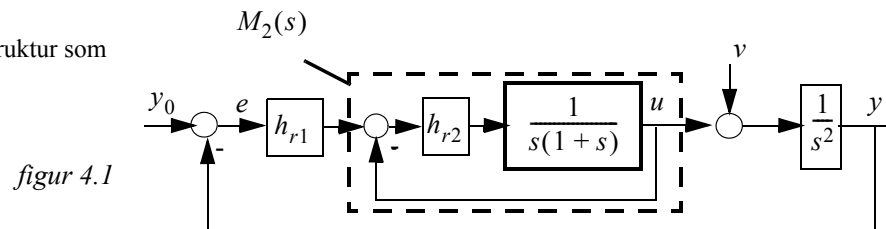
Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et 2. ordens Butterworth lavpassfilter med knekkfrekvens $100[\text{rad/s}]$.

Oppgave 3 (3 %)

Med hensyn på sikkerhet ved eksperimentell innstilling av regulator i et industrielt reguleringsystem, er Skogstads SIMC-metode bedre enn Ziegler-Nichols' metode. Forklar kort hvorfor.

Oppgave 4 (53 %) (stor oppgave, men du kan komme videre her sjøl om du ikke greier alle deloppgaver)

Gitt en reguleringsstruktur som vist i figur 4.1.



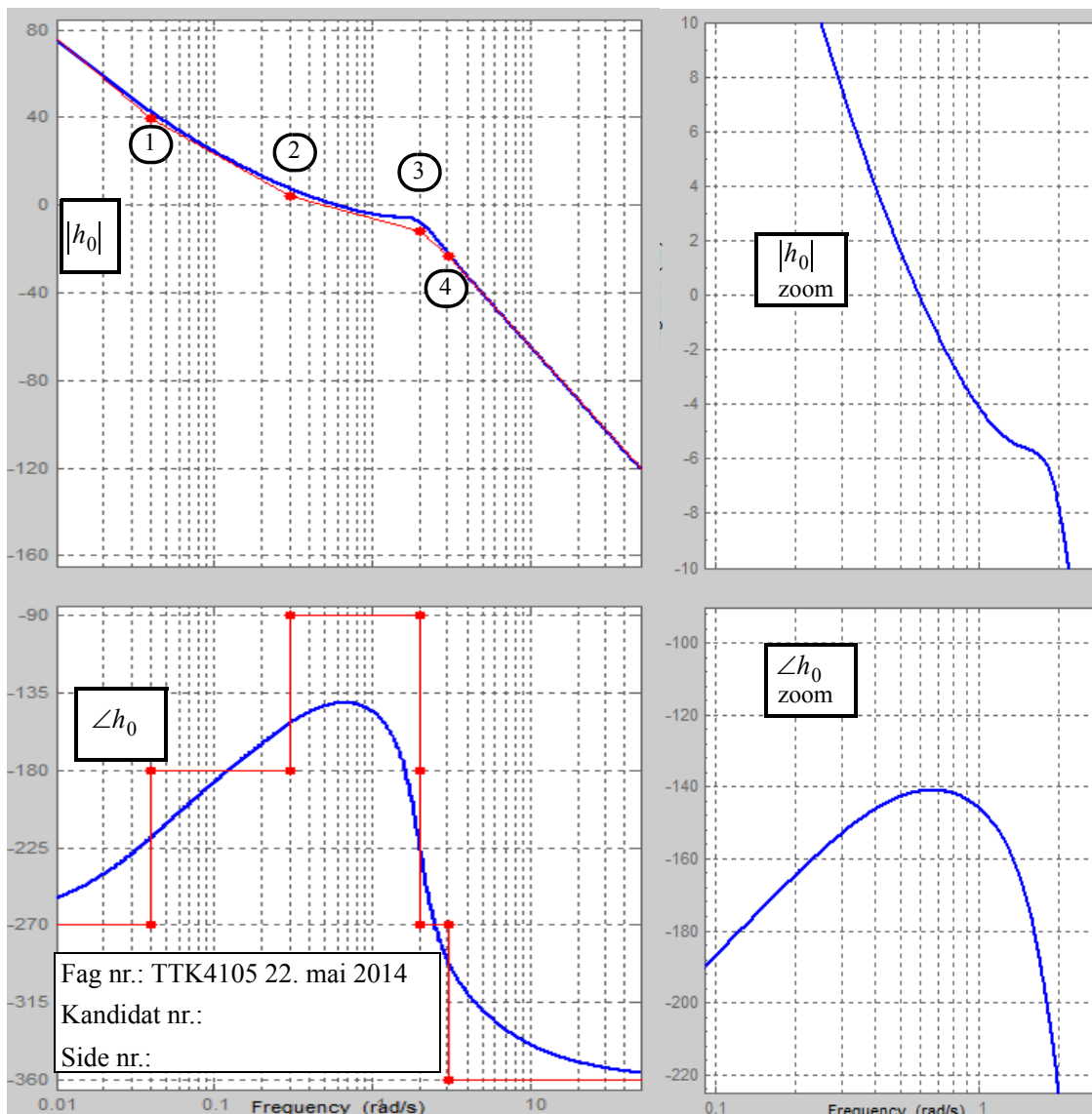
Blokken med tjukk strek er en servo for roret til et fartøy, y er kurs og forstyrrelsen v er et konstant uønsket dreiemoment som påvirker kursen. For enkelhets skyld har vi satt fartøyets treghetsmoment = 1, og ignorert dempinga p.g.a. friksjon fra vannet når fartøyet endrer kurs.

- a) (3 %) Anta at din intensjon først er å ikke ha intern tilbakekopling, men bare ha én regulator h_{r1} , med derivatvirkning. Går det? Begrunn svaret!
- b) (4 %) Du velger fra nå av å ha intern tilbakekopling, slik som vist i figur 4.1. *Vi betrakter nå inntil videre bare den indre sløyfa, indikert med stiplet linje.* Se også inntil videre bort fra forstyrrelsen. Regulatoren $h_{r2} = K_{p2}$. Finn følgeforholdet $M_2(s)$ og bring det

$$\text{på formen } M_2(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.1)$$

Uttrykk ω_0 som funksjon av K_{p2} .

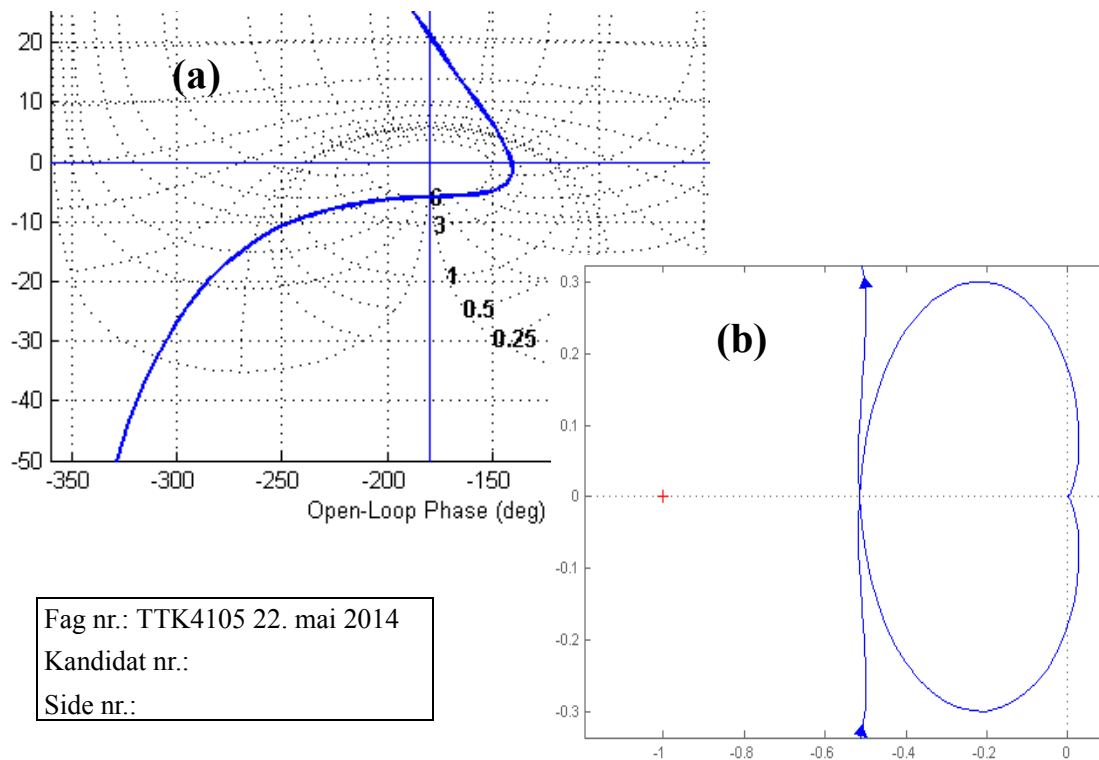
- c) (4 %) Vi ønsker stor K_{p2} i den indre sløyfen. Hvorfor?
Vi velger $K_{p2} = 4$. Finn ζ .
Hva blir faseforskyvningen ϕ i sprangresponsen til M_2 ?
- d) (3 %) Kommentér hvilke tre prinsipielt forskjellige typer sprangrespons vi får for M_2 ; med liten, middels eller stor K_{p2} .
- e) (4 %) Den indre sløyfen er nå fastlagt. **Fra nå av har vi også med den ytre sløyfen.** Du velger en PID-regulator
- $$h_{r1} = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + a T_d s)} \quad (4.2)$$
- Finn sløyfetransferfunksjonen h_0 for den ytre sløyfen. Hvor mange poler N_p (jfr. Nyquists stabilitetskriterium) i høyre halvplan har det åpne systemet?
- f) (5 %) Figur 4.2 viser et Bodediagram for h_0 med asymptoter. Regulatorparametre er her fornuftig valgt. Hvordan kan du se det av diagrammet? Dette systemet er *betings* stabilt. Hva menes med det? Les av forsterkningsmargin og fasemargin. Tegn i Bode-diagrammet. Kommentér! Ta arket med figur 4.3 ut av oppgavesettet og levér det som en del av besvarelsen.
- g) (6 %) Les av fra diagrammet og finn de valgte parameterne T_i , T_d , a . Vis ved avlesing og v.h.a. den T_i du fant at $K_p \approx 0.15$ (her tillates ganske stort slingsringsmonn, bare det framgår at du har tenkt riktig).
Indikér også hvordan de øvrige knekkpunkter i asymptotene framkommer. Dette kan du gjøre i din øvrige tekst ved å referere til de innsirklede nummer, slik at du ikke trenger å skrive om dette i bodediagrammet.



figur 4.2

- h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).
- i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omtrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.
- j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?
- k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbesparende tips: det svarer til å sette $T_i = \infty$). Kommentér.
- l) (3%) Anta PD-regulator. Sett $v = 0$. Referansen y_0 endrer seg nå som et sprang. Blir det stasjonært avvik? Kort begrunnet verbalt svar tilstrekkelig.

- m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdelementets virkning må tas med i betraktning. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skalering mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransferfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



figur 4.3

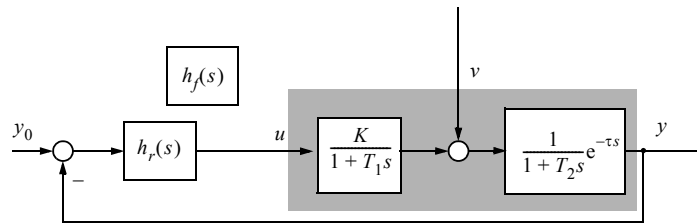
Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sykdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sykdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall syke x . En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx \left(1 - \frac{x}{N}\right), \text{ der } c \text{ er en positiv konstant.} \quad (5.1)$$

- a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?
- b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?
- c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0 . Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer?
- d) (2 %) Vis at $x(t)$ i modellen (5.1) ikke kan øke ut over et "tak" på N personer (heldigvis, ellers ville vi ha måttet forkaste den ...).

Oppgave 6 (16 %)

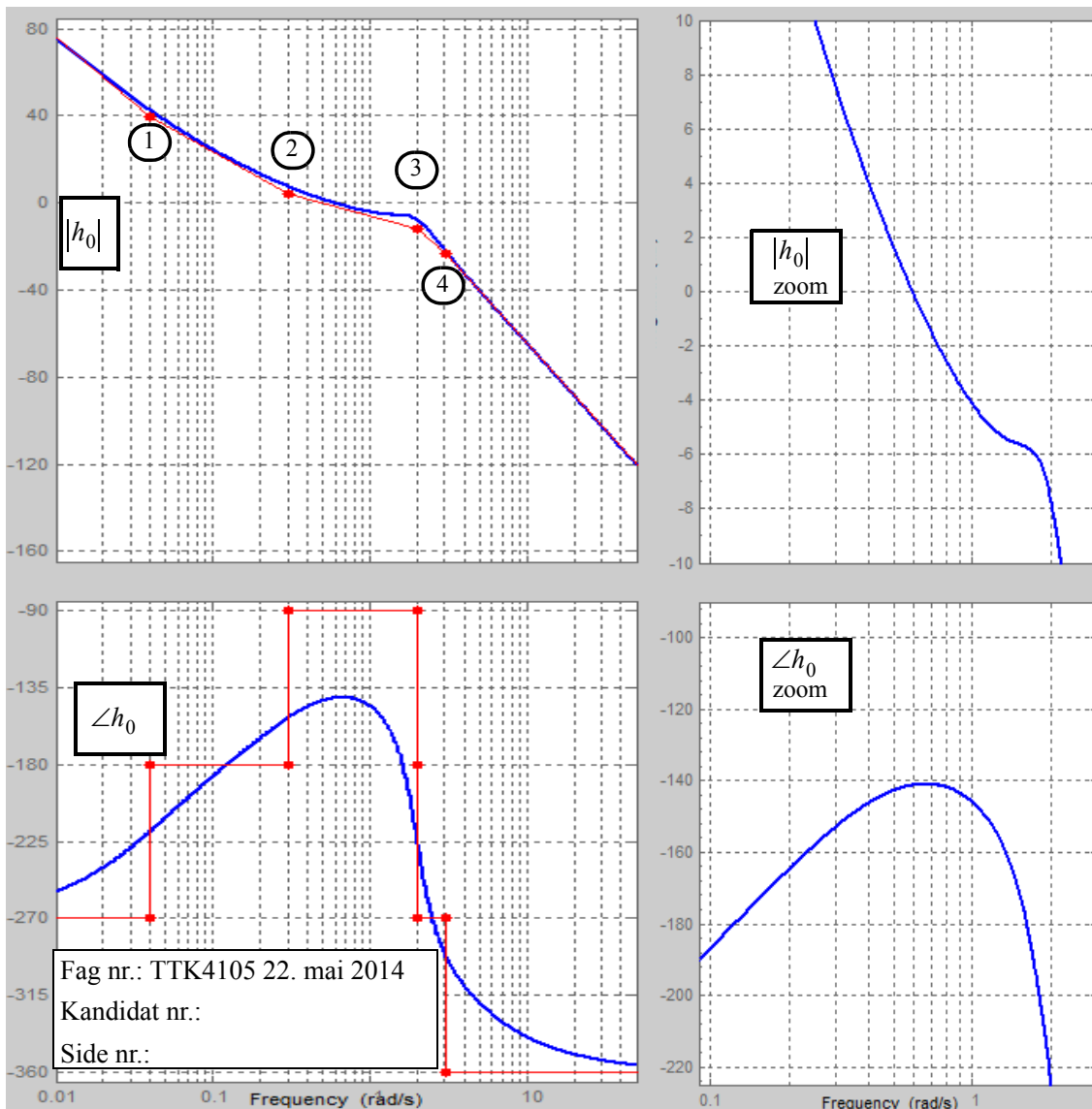


figur 6.1

Figur 6.1 viser et tilbakekoplet reguleringsystem hvor man også skal installere en foroverkopling. Prosessen som skal styres er indikert med skravert felt.

- (1 %) Når er foroverkopling fra forstyrrelse mulig? Kort verbalt svar.
- (2 %) Tegn tilstrekkelig mye av blokkdiagrammet i figur 6.1 for å vise foroverkopplingsblokka h_f riktig forbundet med den øvrige struktur.
- (3 %) Finn den ideelle forkopling h_{fi} for systemet. Modifiser den til en mer realistisk foroverkopling.
- (2.5 %) For $T_2 \gg T_1$ og/eller $\tau \gg T_1$ er foroverkoplinga særskilt nyttig. Forklar hvorfor verbalt!
- (1.5 %) Hva blir den *statiske* foroverkoplinga, og hva slags forstyrrelse v er den i stand til å eliminere virkningen av?
- (1 %) Du tenker først å la regulatoren være av type PI. Men så slår det deg at kanskje du heller skal lage en Otto Smith-regulator, med PI-regulatorens som komponent i denne. Hvorfor det?
- (2 %) En kollega innvender at det ikke bare er å skifte til en annen regulator, for det vil påvirke valget av foroverkopling. Hva svarer du?
- (3 %) Vis at transferfunksjonen h_r , når denne er en Otto-Smith-regulator med PI-regulator som komponent, kan skrives som

$$h_r = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_i s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + K_p K(1 + T_i s)(1 - e^{-\tau s})} \quad (6.1)$$



(Ekstra ark, hvis du trenger det.)

Løsningsforslag TTK 4105 reguleringssteknikk 22/5-14

1a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{c}^T = [1 \ 0 \ 0]$

1b) $e^{At} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} t^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1c) Formel (V.3) gir $h(t) = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \frac{1}{s^3} e^{st} \right\} \right]_{s=0} =$
 $\frac{1}{2} \left[t^2 e^{st} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} t^2$

1d) Hvis $u(t) = \delta(t)$ er $x_1 = \mu_1(t) = \int_0^t 1 d\alpha = t$, $x_2 = \int_0^t x_1(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} t^2$
 $\mu_2(t) = \int_0^t 1 d\alpha = t$, og $x_3 = \int_0^t x_2(\alpha) d\alpha = \mu_3(t) = \frac{1}{6} t^3$
 Kan også finnes som $\underline{c}^T e^{At} \underline{b}$.

1e) Tre egenverdier/poler oppå hverandre \Rightarrow ustabil
 eller ganske enkelt $|h(t)| \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$

2) $n=2 \Rightarrow$ kvadrat
 Polene: $\left. \begin{array}{l} \times \quad | \quad -1 \quad | \quad \lambda_1 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \vdots \quad | \quad \vdots \quad | \quad \lambda_2 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \times \quad | \quad -1 \quad | \end{array} \right\} \Rightarrow$ (V.16) gir

$$h(s) = \frac{K}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{K}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{10^4}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 10^4}$$

K blir 10^4 fordi vi krever $|h(j\omega)|_{\omega=0} = 1$

- side 2 -

- ③ Z-N forholdet at man øker forsterkningen i regulatoren til systemet oscillerer på stabilitetsgrensa. Dette kan være risikabelt eller skadelig. SIMC krever ikke dette, bare et spenningsresponsforsøk med åpen sløyfe.
- ④a) Utan indre sløyfe blir det 3 integratorer i serie. Sjøl med derivetvirkning i h_{r1} blir det ikke mulig å løfte fasen over $-180^\circ \Rightarrow$ Systemet kan ikke gjøres stabilt.

$$\textcircled{4b} M_2 = \frac{K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}}{1 + K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}} = \frac{K_{p2}}{s^2 + s + K_{p2}} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_{p2}} + \frac{1}{K_{p2}}s + 1}$$

$$(4.1) \text{ gir da } \omega_0^2 = K_{p2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K_{p2}}$$

- ④c) Stor K_{p2} gir stor båndbredde for M_2 , noe som øker stabiliteten for den ytre sløyfen, p.g.a bedre faseforløp opp til høyere frekvens.

$$K_{p2} = 4 \text{ gir } \omega_0 = 2. (4.1) \text{ gir } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \xi = \frac{1}{4}$$
$$\varphi = \arcsin(0.25) = 0.253 \text{ rad} = 14.5^\circ$$

- side 3 -

4d) overdempet, kritisk dempet, underdempet (oscillatorisk)

$$4e) h_0 = h_{r1} M_2 \frac{1}{s^2} = k_p \frac{(1+T_i s)(1+T_d s)}{T_i s (1+0.1 T_d s)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s^2}{4} + \frac{1}{4} s + 1\right)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

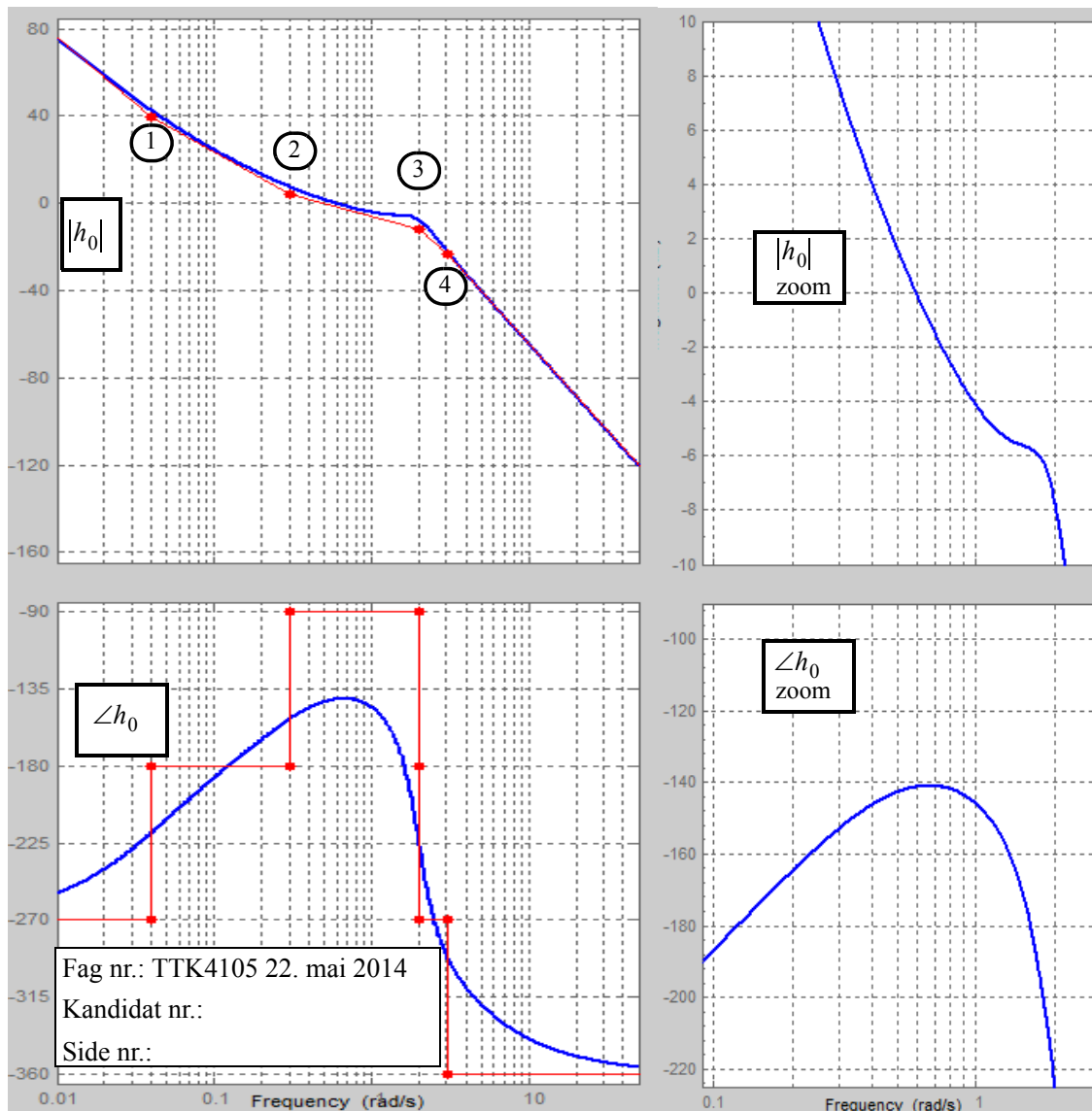
Polene ligger enten i vhp eller på den imaginære akse $\Rightarrow N_p = 0$.

4f) God fasemargin på tross av ellers vanskelig fareforløp. Betinget stabilt fordi det også blir ustabilt ved lav k_p , ikke lav ved stor k_p . Se ellers bodediagram neste side med Δk og φ , som blir 5.7 dB og 36.8°

4g) knekkpunkt ① svarer til $\frac{1}{T_i} = 0.04 \Rightarrow T_i = 25$
Knekkpunkt ② svarer til $\frac{1}{T_d} = 0.3 \Rightarrow T_d = 3.3$
Knekkpunkt ③ svarer til $\omega_0 = 2$.
Det siste, ④, svarer til $\frac{1}{a T_d} = 3 \Rightarrow a = 0.1$
Se ellers bodediagrammet neste side for hvordan finne k_p .

4h) Målt med linjal, og basert på (V.12)(a):
 $\frac{1}{\Delta k} \approx \frac{3.1}{5.87} \approx 1.9$, stemmer bra med $10^{\frac{5.7}{20}} = 1.92$

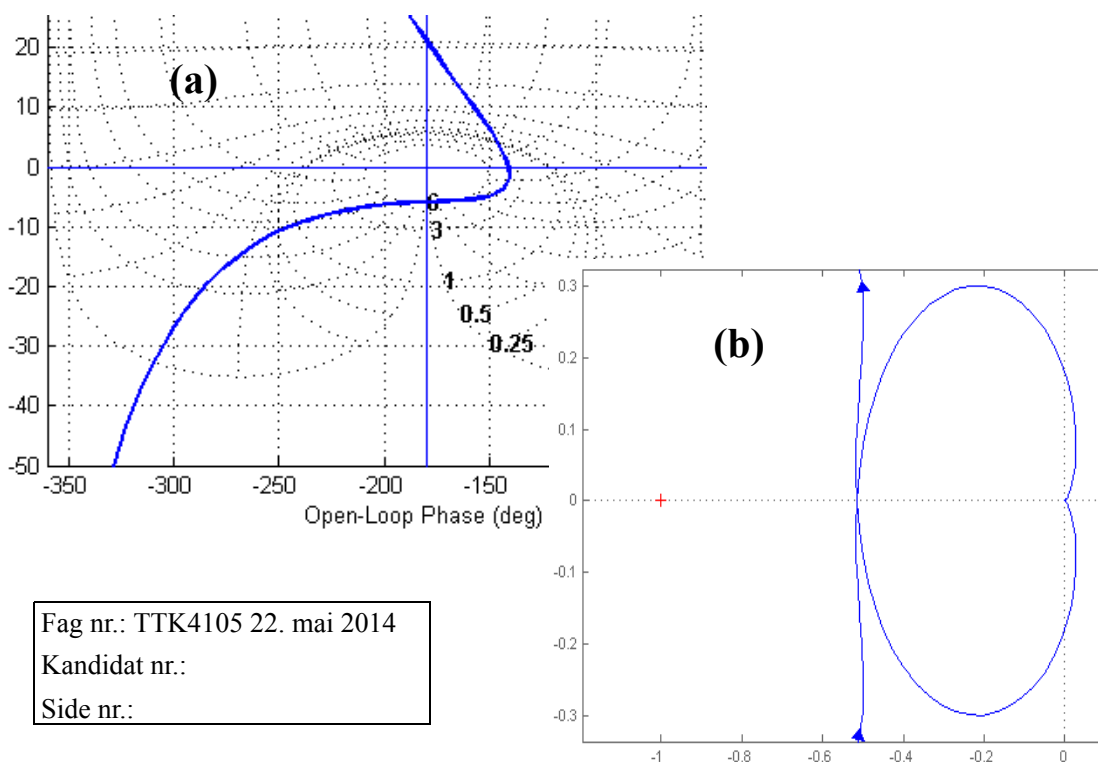
4i) Se på tegnet Nichols-diagram lenger bak, $|N|_{\max} \approx 7$ dB, vanskelig å avlese $\angle h_0$ der, men $\angle h_0 \approx -170^\circ$, og i bodediagrammet svarer det til ca. $\omega = 1.5$



figur 4.2

- h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).
- i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omtrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.
- j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?
- k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbeholdning: det svarer til å sette $T = \infty$). Kommentér

- m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdelementets virkning må tas med i betraktning. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skalering mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransferfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



figur 4.3

Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sykdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sykdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall syke x . En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx \left(1 - \frac{x}{N}\right), \text{ der } c \text{ er en positiv konstant.} \quad (5.1)$$

- a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?
- b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?
- c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0 . Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer?

- side 4 -

$$(4j) \quad h_v = \frac{1}{s^2}$$

$$(4k) \quad e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (-h_v N) \cdot \cancel{s} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-h_v \left(\frac{1}{1+h_0} \right) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{s^2} \left(\frac{n_0}{n_0+t_0} \right) \right) =$$

$$- \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s^2} \left(\frac{T_i s (1+\dots)(1+\dots) s^2}{T_i s (1+\dots)(1+\dots) s^2 + k_p (1+T_i s) (1+\dots)} \right) \right) = 0$$

(her betyr "1+..." ledd $\rightarrow 1$ når $s \rightarrow 0$)

$$\text{PD: } e(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \text{og } T_i \rightarrow \infty}} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{T_i s}{k_p T_i s} \right) = \frac{1}{k_p} \Rightarrow \text{stasjonært} \\ \text{arvork}$$

(4l) Nei. For det er mer enn null integratorer i h_0 .

(4m) Bruker (V.24).

Den ekstra negative fasekomponenten ved kryssfrekvensen $\omega_c \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180} \cdot 2 \Rightarrow T = \frac{2}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2$

$$\approx \frac{\pi}{0.5945} = 0.12$$

Første trinn er å erstatte alle s i (4.2) med $\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$, jfr. (V.23)

- side 5 -

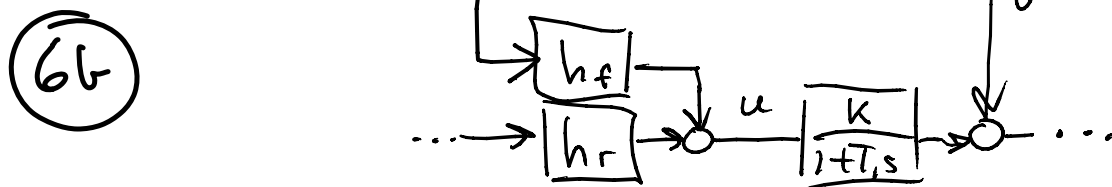
5a $\dot{x} = cx(\dots - \frac{x}{N}) = -\frac{cx^2}{N} + \dots$
 x^2 på høyre side gjør den ulinear

5b Det er ingen ytre påvirkninger (ingen u eller v)

5c Da får vi $\dot{x} = cx \Rightarrow x(t) = e^{ct} x_0$

5d Når $x(t) \rightarrow N$ vil $\dot{x}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) < N$

6a Når v kan måles.



6c $h_{fi} \frac{k}{1+Ts} - 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{1+Ts}{k}$

Mer realistisk: $h_f = -\frac{1+Ts}{1+aTs} \cdot \frac{1}{k}$, med $0 < a \ll 1$

6d Fordi da vil tilbakemeldinga virke mye seinere enn foroverkoplinga.

6e $h_{fs} = \frac{1}{k}$. Eliminerer virkninga av konstant v .

- side 6 -

(6f) Fordi det er en tidsforsinkelse τ i prosessen

(6g) Tullprat. Valg av h_f og h_r kan gjøres helt uavhengig av hverandre.

(6h) Bruker (V.25):

$$h_r' = \frac{k_p \frac{1+T_1s}{T_1s}}{1 + k_p \frac{1+T_1s}{T_1s} \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)} (1-e^{-\tau s})}$$
$$= k_p \frac{(1+T_1s)(1+T_1s)(1+T_2s)}{T_1s(1+T_1s)(1+T_2s) + k_p k (1+T_1s)(1-e^{-\tau s})}$$



Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 regulerings-teknikk

lørdag 30. mai 2015

Tid: 0900 - 1300

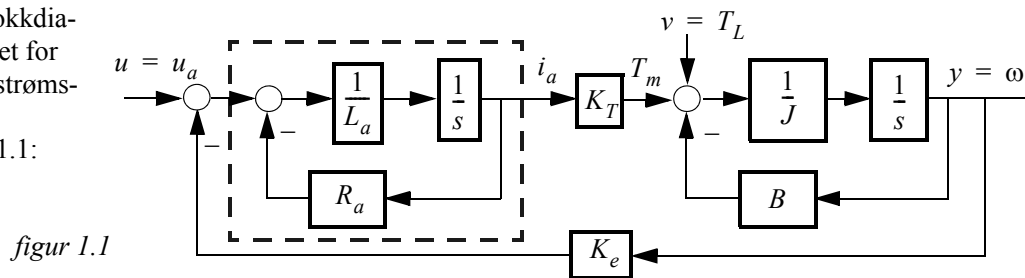
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (22 %)

Gitt blokkdiagrammet for en likestrømsmotor i figur 1.1:



a) (6 %) Sett først $v = T_L = 0$.

Finn matrisene A , b , c^T i en tilstandsrommodell med $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.

b) (6 %) Vis at transferfunksjonen fra det eksternt påsatte belastningsmoment T_L til ankerstrøm i_a

$$\text{er } \frac{i_a}{T_L}(s) = h_{iT}(s) = \frac{-K_e}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + K_T K_e + BR_a} \quad (1.1)$$

(Merk notasjon: T_L er ikke en tidskonstant; T brukes ofte for "Torque" = dreiemoment.)

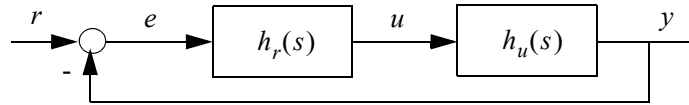
c) (4 %) Du antar at tidskonstanten i motorens elektriske del (innrammet) er så liten at den kan ignoreres. Hva blir da den forenklede utgave av ligning (1.1)?

d) (4 %) Vi tar igjen utgangspunkt i den opprinnelige ligning (1.1). Finn uttrykk for likestrømsmotorens udempede resonansfrekvens ω_0 og relative dempningskonstant ζ .

e) (2 %) Hvis motoren skulle vært helt tapsfri, måtte to parametre vært = 0. Hvilke? Hvordan ville da motoren da ha oppført seg ved et sprang i u_a ? Kort, kvalitativt og verbalt svar.

Oppgave 2 (32 %)

En prosess beskrevet ved transferfunksjonen $h_u(s)$ skal reguleres som vist i figuren til høyre.



$$\text{Vi har } h_u(s) = \frac{2(1 - 0.5s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad (2.1)$$

- a) (6 %) Hva kaller vi en prosess med en teller av denne typen i transferfunksjonen? Hva er problematisk med en slik prosess? Hva er karakteristisk for dens sprangrespons? Er prosessen åpent stabil?

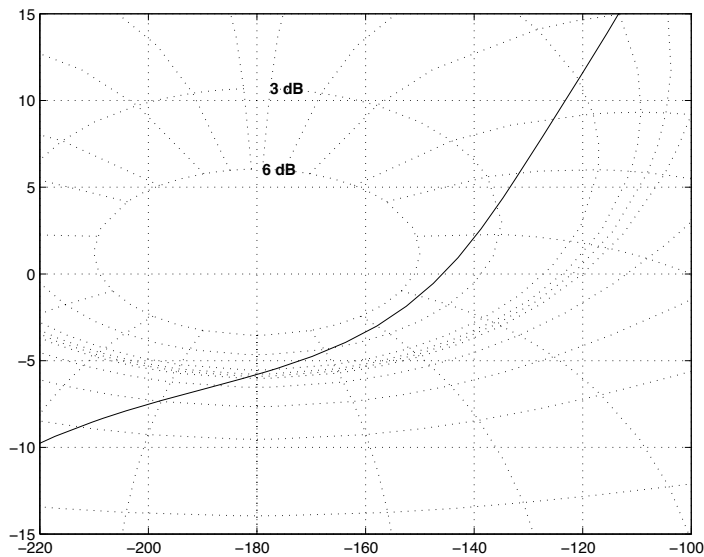
I figur 2.1 neste side (+ en ekstra kopi bakerst hvis du trenger den) er vist Bode-diagram for $h_u(s)$.

- b) (7 %) Tegn inn asymptoter for $|h_u|$ og $\angle h_u$ i Bode-diagrammet og legg arket ved besvarelsen. Det skal framgå av det påtegnete arket hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke tilstrekkelig å bare "smyge dem inntil" de oppgitte kurver.

- c) (7 %) Regulatortransferfunksjonen er $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Bestem regulatorparametrene ved hjelp av Bode-diagrammet og Ziegler-Nichols' metode.

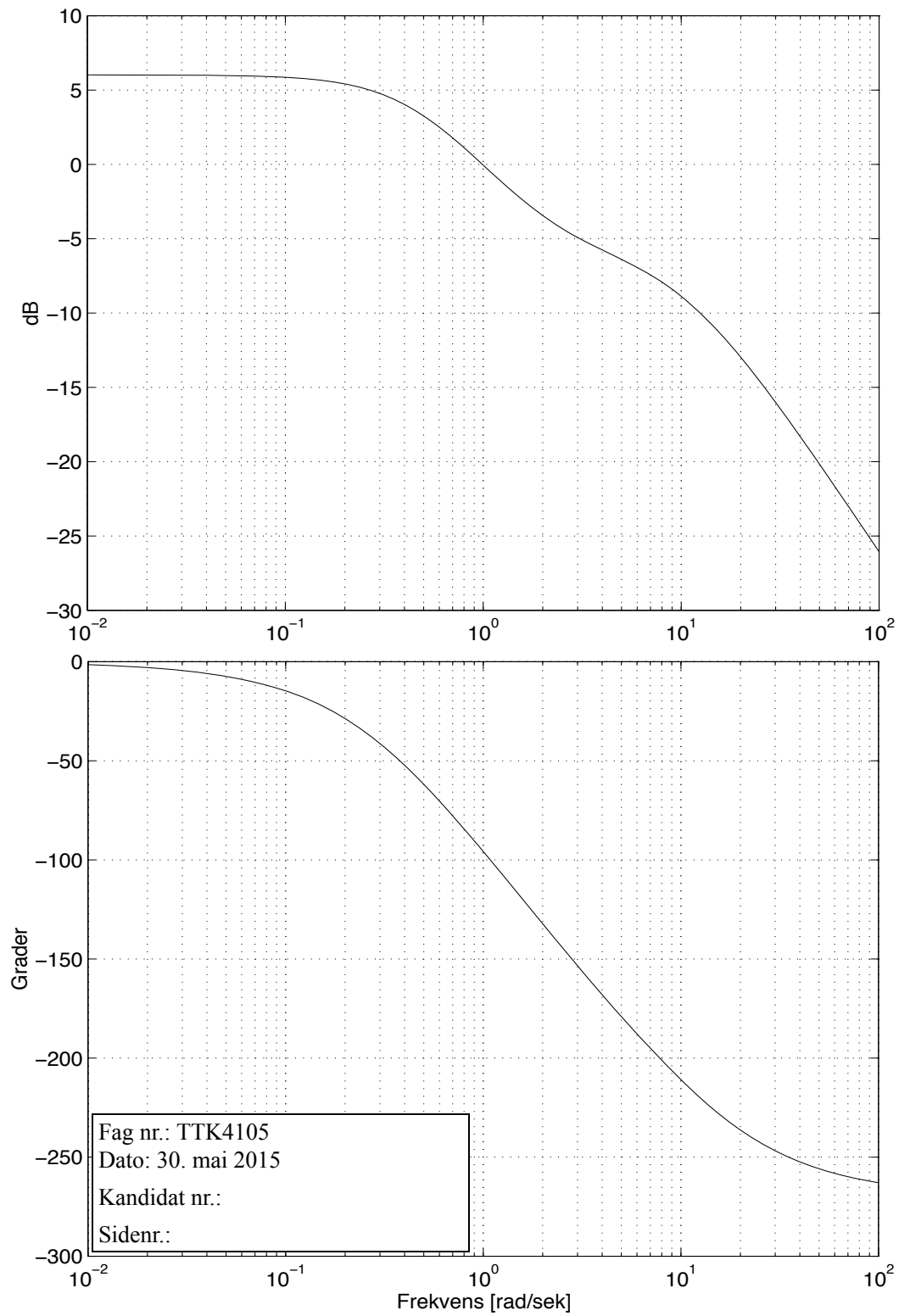
- d) (5 %) Gitt Nichols-diagrammet for prosessen med ferdig innstilt regulator, se figur til høyre. Les av fase- og forsterkningsmargin, og finn $|N(j\omega)|_{\max}$. Hvis vi i stedet godtar en $|N(j\omega)|_{\max} = 6 \text{ dB}$, hvor mye kan vi da øke forsterkningen K_p ? Les av og tegn i det vedlagte diagram og innlevert som en del av besvarelsen.



- e) (5 %) Referansen $r(t)$ er nå en rampefunksjon med Laplacetransform $y_0(s) = 1/s^2$. Finn det stasjonære avviket $e(t = \infty)$.

Fag nr.: TTK4105
 Dato: 30. mai 2015
 Kandidat nr.:
 Sidenr.:

- f) (2 %) h_r skal realiseres som en diskret regulator. Det oppgis at kryssfrekvensen til $h_r h_u$ ligger fast, $\omega_c = 1.3$. Finn en tastetid T som gir 2° mindre fasemargin. Er 2° akseptabelt?



figur 2.1

Oppgave 3 (9 %)

En konstant befolkning av N individer utsettes for en smittsom sjukdom. Ingen dør av den, men ingen blir friske når de først har fått den. De som er sjuke (antallet kaller vi x), forblir smittsomme. En modell for sjukdomsutvikling i et slikt system er den såkalte *logistiske ligning*,

$$\dot{x} = c(N-x)x, \text{ hvor } c \text{ er en konstant} \quad (3.1)$$

- a) (2 %) Hvorfor er dette et ulineært system? Er det et autonomt system? Begrunn svarene.
- b) (3%) Anta at x er liten, dvs. svært få personer er smittet. Lineariser systemet for det tilfellet. Hva slags tidsforløp får du for små x ?
- c) (4 %) Hva skjer med $x(t)$ når $t \rightarrow \infty$?
Benytt dette og svaret fra b) til å tegne en grov skisse av tidsforløpet (du skal *ikke* løse (3.1)). Sett begynnelsesverdien ved $t = 0$ til en x_0 som forutsettes « N », altså bare noen få sjuke individer.

Oppgave 4 (16%)

Et fartøy med masse m utsettes for et press fra vinden, en forstyrrelse $v[N]$. Vi betrakter bare bevegelse i én dimensjon. Fartøyet skal holdes fast på posisjonen $y = y_0$ tross vinden. Det brukes et sett med propeller, som gir en motkraft $u[N]$. Vi forutsetter så lave hastigheter at vi kan se bort fra friksjon i vannet. Vi skal regulere med både tilbakekopling (seriekompensasjon) og foroverkopling.

- a) (4 %) Du skal tegne et blokkdiagram for reguleringsystemet. I dette inngår blokkene h_f, h_r, h_v, h_u .
- b) (4 %) Det er en viss treghet i pådragsorganet. Det må da inkorporeres i prosessmodellen h_u . Pådragsorganet modelleres som en 1. ordens prosess med forsterkning K og tidskonstant T . Hva blir h_u ? (Tips: det er blant annet to integratorer i nevner.) Hva blir h_v ?
- c) (5 %) Finn den ideelle forverkopling $h_{f_i}(s)$. Hva blir en mer realistisk $h_f(s)$? Hva blir den *statistiske* (og enda enklere) foroverkopling, og hva slags forstyrrelse v kan den motvirke?
- d) (3 %) Seriekompensatoren h_u i tilbakekoplinga kan verken være en proporsjonalregulator eller en PI-regulator. Hvorfor ikke? Hva må til?

Oppgave 5 (21 %)

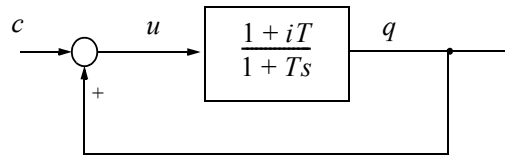
Betrakt et lån x [\$] med rentesats i [1/år] (dvs. 5% rente uttrykkes her som 0.05) og tilbakebetalingstid T [år]. Låntaker betaler da en kontinuerlig pengestrøm q [\$/\$år], *gjeldsbetjeninga*:

$$q(t) = \left(i + \frac{1}{T}\right)x(t) \quad (5.1)$$

Lånet avtar gjennom nedbetaling i følge ligning $\dot{x} = -\frac{1}{T}x$ (5.2)

Vi skal anvende disse enkle sammenhengene til å lage en modell av et finansielt pyramidespill. En skurk låner kontinuerlig en pengestrøm $u(t)$ [\$/\$år] for å finansiere sitt eget forbruk $c(t)$ [\$/\$år] pluss gjeldsbetjening på sine allerede eksisterende lån $x(t)$. Vi har $u = c + q$.

a) (4 %) Vis at da får vi følgende blokkdiagram:



b) (4 %) Nyquistkurven for dette systemet blir enkel: en sirkel. Tegn den riktig plassert i det komplekse plan. Angi skjæringspunkt med Re-aksen og dreieretning for økende ω . (Tips: Nyquist forutsetter negativ tilbakekopling, så her må blokkdiagrammet omformes noe, ved å bytte fortegn på den åpne sløyfes transferfunksjon.)

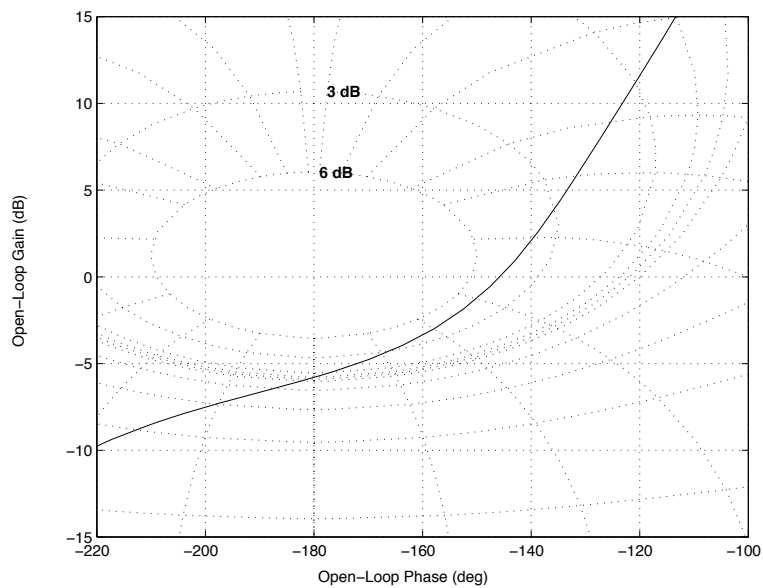
c) (3 %) Er systemet åpent stabilt?
 Vis ved hjelp av grafen og Nyquists stabilitetskriterium at det lukkede systemet er ustabil for alle $i > 0$. Hva betyr dreieretninga (for økende ω) i dette tilfellet?

d) (3 %) Vis at transferfunksjonen

$$\frac{x}{c}(s) = h(s) = \frac{1}{s - i} \tag{5.3}$$

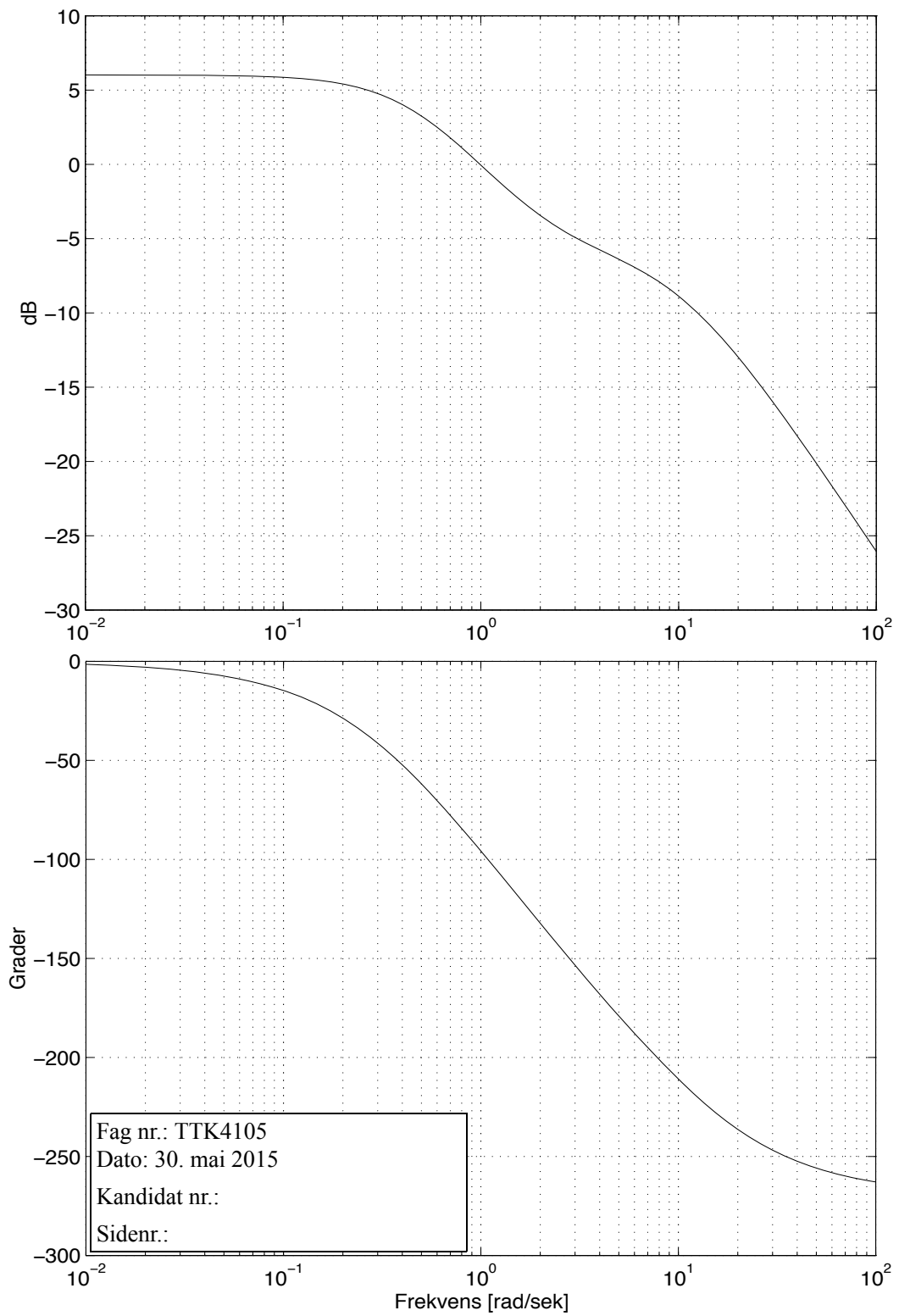
e) (3.5 %) Anta at skurken har et voksende personlig forbruk $c(t) = e^{\alpha t}$, der $0 < \alpha < i$. Finn $x(t)$ når det oppgis at $x(0) = 0$, altså ingen gjeld ved start.

f) (3.5 %) Finn den samme $x(t)$ når $\alpha = i$.



(Ekstra Nicholsdiagram til oppgave 2)

Fag nr.: TTK4105
Dato: 30. mai 2015
Kandidat nr.:
Sidenr.:



(Ekstra Bode-diagram til oppgave 2)

Dette er et uoffisielt LF og det vil kunne bli revidert ved en senere anledning.

Oppgave 1

- a) Vi velger $x_1 = \omega$ og $x_2 = i_a$, ved hjelp av blokkdiagrammet får vi: $\dot{x}_1 = \frac{1}{J}(K_T x_2 - Bx_1)$ og $\dot{x}_2 = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a x_2 - K_e x_1)$. Dette gir følgende tilstandsrommodell:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (2)$$

- b) Vi deler opp oppgaven ved å sette opp uttrykket fra i_a og T_L til ω først:

$$\omega = \frac{1}{J_s}(T_L + K_T i_a - B\omega) \quad (3)$$

$$\omega(1 + \frac{B}{J_s}) = \frac{1}{J_s}(T_L + K_T i_a) \quad (4)$$

$$\omega = \frac{1}{J_s + B}(T_L + K_T i_a) \quad (5)$$

Vi finner nå uttrykket fra ω til i_a (husk å sette den andre inngangen u_a til 0):

$$i_a = \frac{1}{L_a s}(-R_a i_a - K_e \omega) \quad (6)$$

$$i_a(1 + \frac{R_a}{L_a s}) = -\frac{K_e}{L_a s} \omega \quad (7)$$

$$i_a = -\frac{K_e}{L_a s + R_a} \omega \quad (8)$$

Vi kan nå sette inn uttrykket for ω :

$$i_a = -\frac{K_e}{(L_a s + R_a)} \frac{1}{(J_s + B)}(T_L + K_T i_a) \quad (9)$$

$$i_a(1 + \frac{K_e K_T}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a) s + B R_a}) = \frac{-K_e}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a) s + B R_a} T_L \quad (10)$$

$$i_a = \frac{-K_e}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a) s + K_T K_e + B R_a} T_L \quad (11)$$

Denne oppgaven kan også løses ved manipulering av blokk-diagrammet.

c) Hvis vi ser på den elektriske delen av systemet (setter $\omega = 0$) får vi:

$$i_a = \frac{1}{L_a s + R_a} u_a = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_a}{R_a} s + 1} u_a = \frac{K_a}{T_a s + 1} \quad (12)$$

ved å la tidkonstanten gå mot null får vi $T_a = \frac{L_a}{R_a} \rightarrow 0$, hvilket vil si $L_a \ll R_a \Rightarrow \frac{1}{L_a s + R_a} \approx \frac{1}{R_a}$. Den nye forenklete utgaven av ligning (1.1) blir da:

$$i_a = \frac{-K_e}{J R_a s + K_T K_e + B R_a} T_L \quad (13)$$

d) Vi skriver om ligning (1.1) til:

$$\frac{i_a}{T_L}(s) = \frac{\frac{-K_e}{J L_a}}{s^2 + \frac{(J R_a + B L_a)}{J L_a} s + \frac{(K_T K_e + B R_a)}{J L_a}} \quad (14)$$

Hvis vi sammenlikner denne likningen for et resonansledd i formelsamlingen ser vi at nevneren er $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Den udempede resonansfrekvensen blir dermed:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e + B R_a}{J L_a}} \quad (15)$$

og den relative dempningskonstanten blir:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(J R_a + B L_a)}{J L_a} \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_0} \frac{J R_a + B L_a}{J L_a} \quad (17)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{J R_a + B L_a}{\sqrt{J L_a (K_T K_e + B R_a)}} \quad (18)$$

e) En tapsfri motor vil ha ingen viskøs demping ($B=0$) og ingen ohmske tap ($R=0$) $\Leftrightarrow \zeta = 0$. Motoren vil være på stabilitetsgrensa, så den vil oscillere med konstant utslag. Vi kan regne ut responsen ved å se på formelen for sprangrespons for et system av 2. orden med $\zeta = 0$:

$$i_a = K(1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (19)$$

hvor $K = \frac{-1}{K_T}$ og $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e}{J L_a}}$. Denne siste utregningen i ligning (19) er ikke et krav for å få alle poengene på denne oppgaven

Oppgave 2

- a) Vi har et nullpunkt i høyre halvplan, dvs. at vi har et *ikke-minimum-fase(IMF)-system*. Den økte negative fasen gjør det vanskelig å oppnå rask og nøyaktig regulering samtidig som kravene til stabilitetsmarginer er tilfredsstillt.

Det som kjennetegner sprangresponsen for dette systemet er at vi får et utslag i motsatt retning før det svinger inn mot referansen.

Proessen er åpent stabil ettersom begge polene er i venstre halvplan.

- b) Vi har transferfunksjonen:

$$h_u(s) = 2 \frac{1 - 0.5s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = K \frac{1 - T_z s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (20)$$

siden vi ikke har noen rene integrasjoner får vi:

$$|h_u(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K = 2 = 6\text{dB} \quad (21)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 (\text{negativ pol, } -90^\circ \text{ og } -1) \quad (22)$$

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 2 (\text{positivt nullpunkt, } -90^\circ \text{ og } +1) \quad (23)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 (\text{negativ pol, } -90^\circ \text{ og } -1) \quad (24)$$

$$(25)$$

Se figur 1 for asymptotene.

- c) Vi må bestemme kritisk forsterkning og ω_{180} for å bruke Ziegler-Nichols' metode. I figur 1 er både kritisk forsterkning $\Delta K_{pk} \approx 6,5\text{dB} = 2,11$ og $\omega_{180} \approx 5$ rad merket. Fra tabellen for Ziegler-Nichols' får vi da:

$$K_p = 0,45 \cdot K_{pk} = 0,95 \quad (26)$$

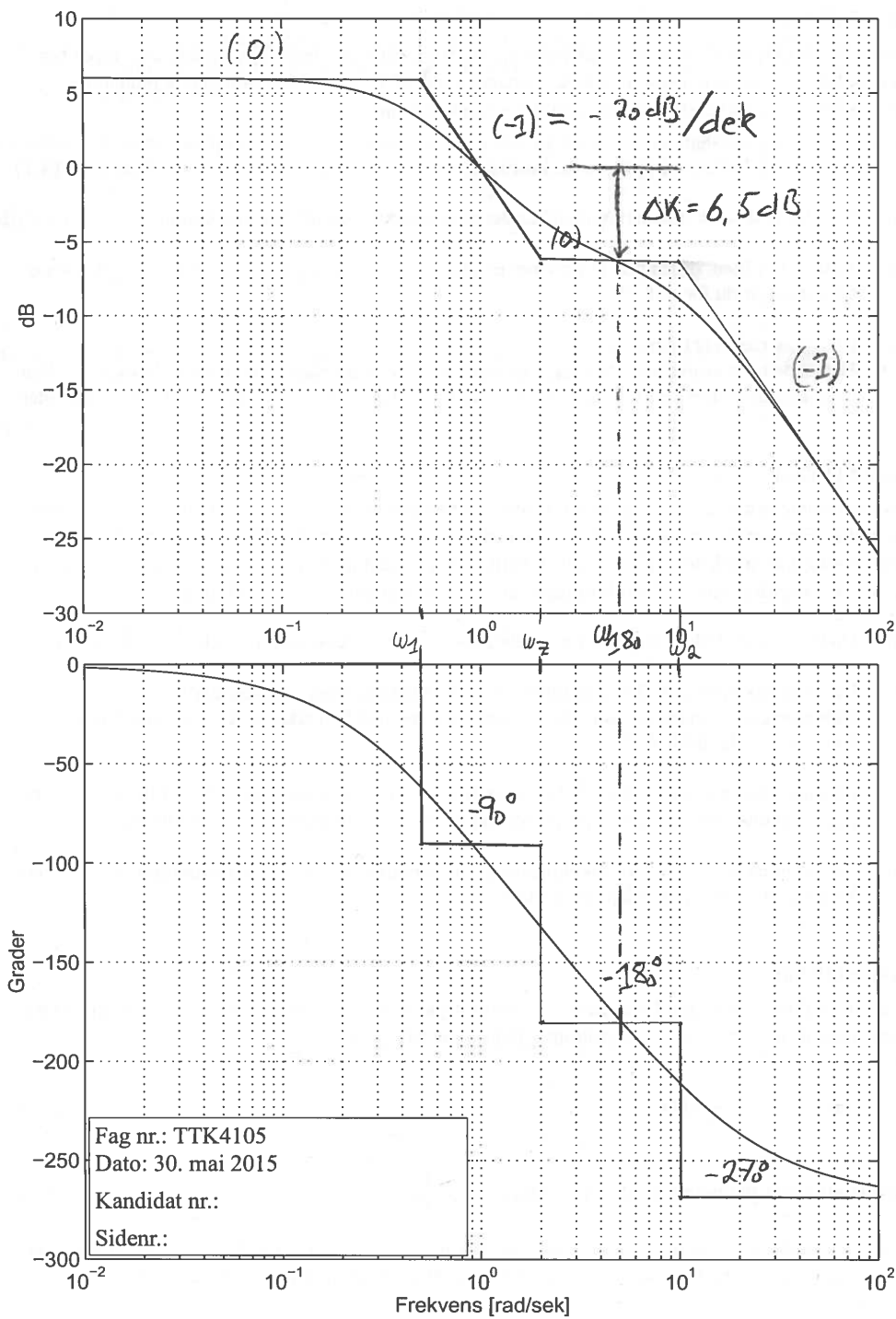
$$T_i = 0,85 \cdot T_k = 0,85 \cdot \frac{2\pi}{\omega_{180}} = 1,07 \quad (27)$$

- d) Fra figur 2:

$$\psi = 35^\circ \quad (28)$$

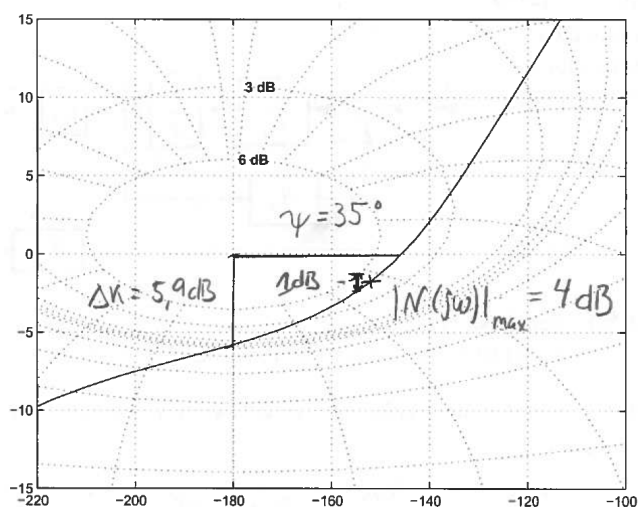
$$\Delta K = 5,9\text{dB} \quad (29)$$

Vi legger merket til at å øke forsterkningen tilsvarer å parallellforskyve Nichols diagrammet i amplitude-retning. I figur 2 ser vi at vi kan øke forsterkningen med 1 dB. Vi kan da



figur 2.1

Figur 1: Oppgave 2b Asymptoter



Figur 2: Oppgave 2d Nichols

regne ut $K_{p,ny}$ som følger (dette kreves ikke for maks poeng): Først regner vi ut forsterkningen i prosess med opprinnelig regulator $h_0(s=0) = h_r \cdot h_u(s=0) = \frac{K_p K}{T_i} = 4,99 \text{ dB}$. Vi lurer på hvor mye vi kan øke K_p med for å få en forsterkning på 1 dB mer, vi kaller økningen for K' :

$$20 \cdot \log\left(K' \frac{K_p K}{T_i}\right) = (4,99 + 1) \text{ dB} \quad (30)$$

$$K' = \frac{T_i \cdot 10^{\frac{5,99}{20}}}{K_p K} = 1,12 \quad (31)$$

$$K_{p,ny} = K' \cdot K_p = 1,07 \quad (32)$$

Kommentar: I denne oppgaven er det en feil i oppgavesettet. Høydekurvene i Nichols-diagrammet viser følgeforholdet $M(j\omega)$ og ikke avviksforholdet $N(j\omega)$ (denne delen av diagrammet er opp ned). Studenter som påpekte dette på eksamen ble belønnet med et halvt poeng ekstra. På tross av denne feilen er oppgaven like meningsfylt.

e) Først setter vi opp transferfunksjonen fra $r(t)$ til $e(t)$:

$$e = r - h_0 e \quad (33)$$

$$e = \frac{1}{1 + h_0} r = \frac{1}{1 + \frac{t_0}{n_0}} r = \frac{n_0}{n_0 + t_0} r \quad (34)$$

Innsatt for $h_0 = h_r h_u$:

$$e(s) = \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} r(s) \quad (35)$$

Vi kan nå bruke sluttverdi teoremet for å regne ut det stasjonære avviket for $e(t)$ når $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} \frac{1}{s^2} = \frac{T_i}{2K_p}$$

- f) En diskret regulator med tastetid T tilsvarer å legge til en ekstra tidsforsinkele på $T/2$. Tastetiden skal gi kun 2° mindre fasemargin:

$$\omega_c \frac{T}{2} < 2 \cdot \frac{\pi}{180} \quad (36)$$

$$T < 2 \cdot 2 \frac{\pi}{180} \frac{1}{\omega_c} = 0,05 \quad (37)$$

Dette er akseptabelt.

Oppgave 3

- a) Dette systemet er ulinær pga. det kvadratiske leddet $-cx^2$. Systemet er også autonomt fordi det ikke har noen eksterne pådrag.
- b) Vi lineariserer systemet, $\dot{x} = f(x)$, rundt punktet $x^* = 0$:

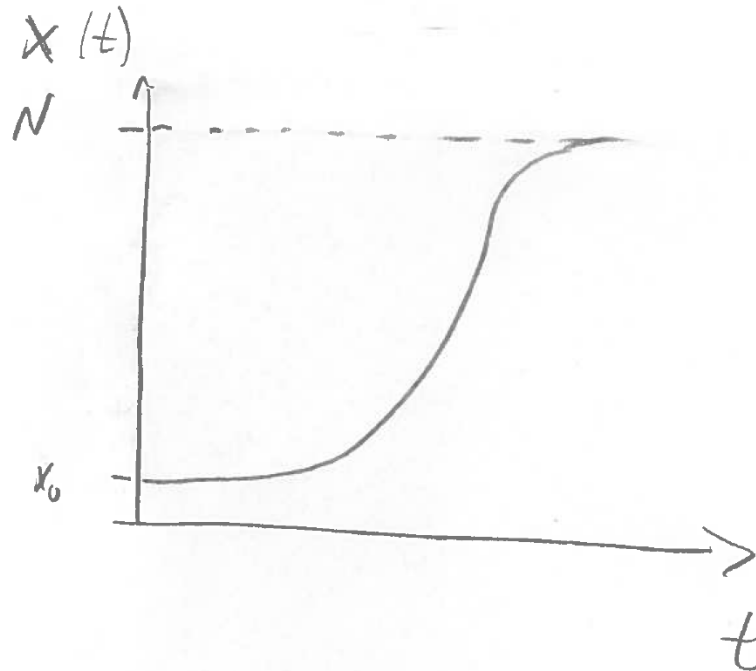
$$\dot{x} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} x = [cN - 2cx]_{x=x^*} x = cNx \quad (38)$$

Dette gir tidforløpet $x(t) = e^{cNt}$ for små x .

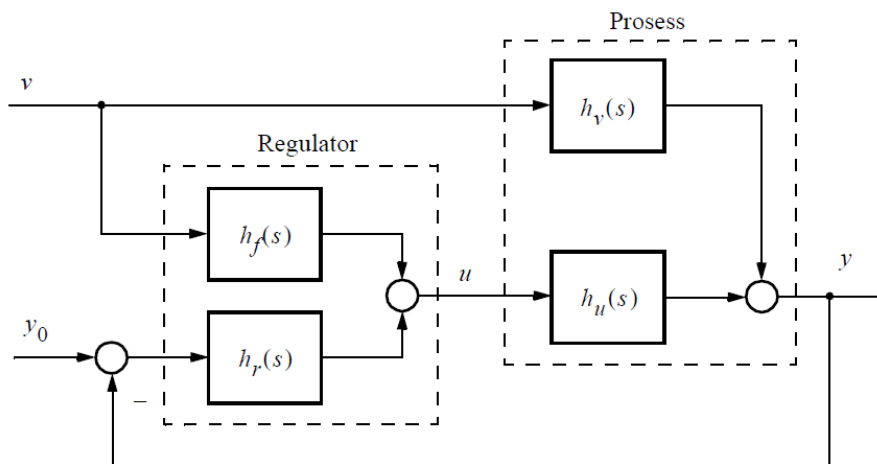
- c) Vi regner ut likevektspunkter for systemet:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = N \quad (39)$$

Vi ser at i starten vil systemet ha tidforløpet vi fant i under forrige punkt. Etter en stund vil det ulinære leddet bli dominerende og systemet vil svinge seg inn mot verdien $x(t) = N$, vist i figur 3.



Figur 3: Oppgave 3c Skisse av foreløp for smittet befolkning



Figur 4: Oppgave 4a blokkdiagram for fartøy

Oppgave 4

- a) Se figur 4
- b) Vi har Newtons 2. lov $F = ma$. I denne prosen har vi posisjonsmåling y dette gir følgende modell:

$$h_u = \frac{K}{Ts + 1} \frac{1}{ms^2} \quad (40)$$

$$h_v = \frac{1}{ms^2} \quad (41)$$

- c) Den ideelle forekopling fjerner forstyrrelsen:

$$h_{fi}(s) = -\frac{h_v}{h_u} = -\frac{Ts + 1}{K} \quad (42)$$

En mer realistisk forekopling vil være:

$$h_f(s) = -\frac{Ts + 1}{K(T\alpha s + 1)} \quad (43)$$

En statisk forekopling tilsvarer når frekvensen går mot 0 ($s \rightarrow 0$):

$$h_{fs}(s) = -\frac{1}{K} \quad (44)$$

Denne forekoplingen kan motvirke konstante forstyrrelser.

- d) Vi har to integratorer i prosessen ($\frac{1}{s^2}$), dette gjør at fasen vil starte under -180 grader. Dersom vi inkluderer en integrator i regulatoren også vil fasen starte på -270 grader. Vi trenger en regulator med derivatvirkning for å få hevet fasen opp fra -180 grader.

Oppgave 5

- a) Når skurken låner ut penger med pengestrøm $u(t)$ får vi lånet stige i tillegg til å avta:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + u(t) \quad (45)$$

Dersom vi kombinerer denne likningen med (5.1) kan vi finne en transferfunksjon fra $u(t)$ til $q(t)$:

$$x\left(s + \frac{1}{T}\right) = u \quad (46)$$

$$x = \frac{T}{Ts + 1}u \quad (47)$$

Dersom vi setter inn dette uttrykket for x i likningen for q får vi transferfunksjonen:

$$q = \left(i + \frac{1}{T}\right) \frac{T}{Ts + 1} u = \frac{1 + Ti}{1 + Ts} u = -h_0 u \quad (48)$$

Vi vet at pengestrømmen består av forbruk og gjeldsbetjening ($u = c + q$), det gir blokkdiagrammet i oppgaven.

b) Vi regner ut $h(j\omega)$:

$$h(j\omega) = -\frac{1 + Ti}{1 + Tj\omega} \cdot \frac{1 - Tj\omega}{1 - Tj\omega} = \frac{1 + Ti}{1 + T^2\omega^2} (-1 + T\omega j) \quad (49)$$

Legg merke til at vi får et negativt fortegn foran transferfunksjonen fra $u(t)$ til $q(t)$. Dette er fordi h_0 i et nyquist diagram antar en negativ tilbakekobling. Ved hjelp av dette uttrykket kan vi regne ut amplituden til $h(j\omega)$ og vinkelen. Grunnen til at vi må legge til π på vinkelen er at $\text{Re}(h(j\omega)) < 0$:

$$|h(j\omega)| = \frac{1 + Ti}{1 + T^2\omega^2} \sqrt{1 + T^2\omega^2} = \frac{1 + Ti}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \quad (50)$$

$$\angle h(j\omega) = \arctan(T\omega) + \pi \quad (51)$$

Av disse likningene er det lett å se at ved $\omega = 0$ så starter vi med amplitude $(Ti+1)$ i retning π . Når $\omega \rightarrow \infty$ går amplituden mot 0. Vinkelen øker fra π til 2π . Vi får dermed nyquist kurven vi ser i figure 5

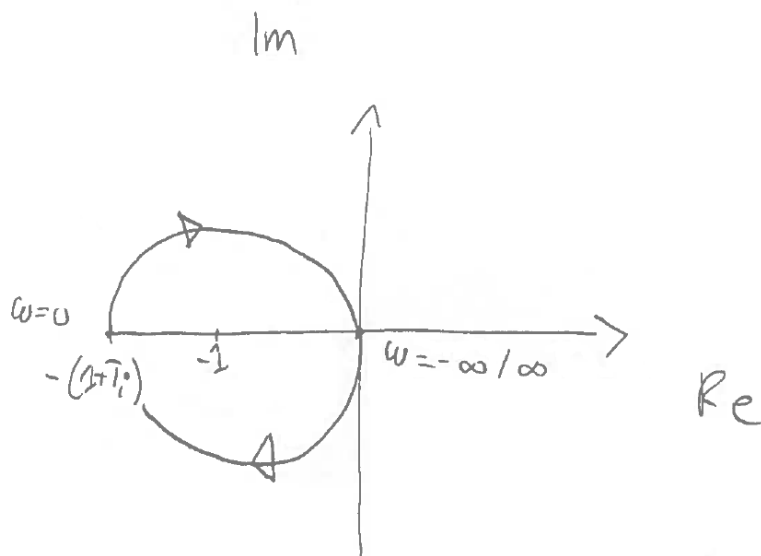
c) Vektoren $(1 + h_0)$ har en negativ dreieretning rundt punktet $(-1+0j)$, $\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi$. Transferfunksjonen h_0 har ingen poler i høyre halvplan (så lenge $T > 0$), $N_p = 0$. Vi kan ved hjelp av formel (V.11) regne ut antall poler i høyre halvplan for det lukkede systemet: $N_n = N_p - \frac{1}{2\pi} \Delta\angle(1 + h_0) = 1$. Vi har dermed en pol i høyre halvplan, hvilket vil si at systemet er ustabil. Dersom $i = 0$ vil vektoren $(1 + h_0)$ få en negativ omdreining rundt punktet $(-1+0j)$ og systemet vil være (marginalt) stabilt.

d) Fra oppgave a) har vi $x = \frac{T}{Ts+1} u$ og $u = c + q = c + \left(i + \frac{1}{T}\right)x$. Setter vi disse to likningene sammen får vi:

$$x = \frac{T}{Ts + 1} \left(c + \left(i + \frac{1}{T} \right) x \right) \quad (52)$$

$$x(Ts + 1 - Ti - 1) = Tc \quad (53)$$

$$x = \frac{T}{Ts - Ti} c = \frac{1}{s - i} c \quad (54)$$



Figur 5: Oppgave 5b Nicholsdiagram for pyarmidespill

- e) Denne oppgaven kan både løses på flere måter blant annet konvolusjon og residueregning:
 Alternativ 1 konvolusjon: Fra formelsamlingen kan vi finne at $h(t) = e^{it}$, dette gir:

$$x(t) = h(t) * c(t) = \int_0^t e^{i\tau} e^{\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{\alpha t} \int_0^t e^{(i-\alpha)\tau} d\tau \quad (55)$$

$$= e^{\alpha t} \frac{e^{(i-\alpha)t} - 1}{i - \alpha} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \quad (56)$$

Alternativ 2 residueregning: Vi har $c(s) = \frac{1}{s-\alpha}$. Dermed får vi $x(s) = \frac{1}{(s-i)(s-\alpha)}$, som vi kan bruke til å regne ut $x(t)$ ved hjelp av residueregning:

$$x(t) = (s-i) \frac{1}{(s-i)(s-\alpha)} e^{st} \Big|_{s=i} + (s-\alpha) \frac{1}{(s-i)(s-\alpha)} e^{st} \Big|_{s=\alpha} \quad (57)$$

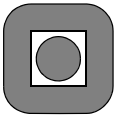
$$= \frac{e^{it}}{i-\alpha} + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha-i} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i-\alpha} \quad (58)$$

- f) Denne oppgaven kan vi også løse på flere måter. Vi kan gjenta utregningene fra forrige

oppgave med $\alpha = i$ eller vi kan bruke L'Hôpital:

$$x(t) = \lim_{\alpha \rightarrow i} x(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow i} \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \text{ L'Hôpital } \rightarrow \quad (59)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow i} \frac{-te^{\alpha t}}{-1} = te^{it} \quad (60)$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
 Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 regulerings-teknikk

mandag 23. mai 2016

Tid: 0900 - 1300

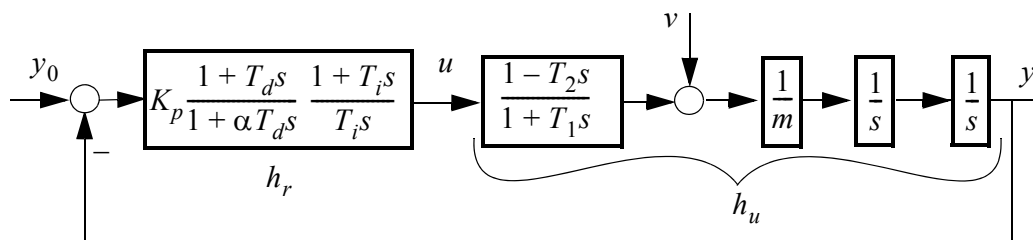
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppg 1 (59 %)

Gitt blokk-diagrammet for et regulerings-system i figur 1.1:



figur 1.1

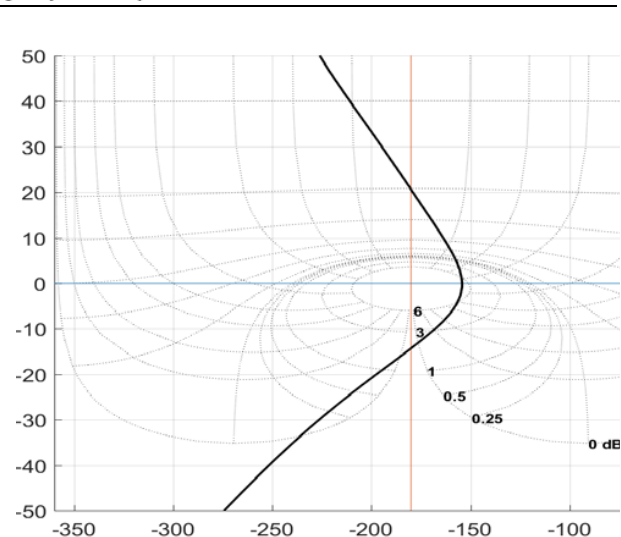
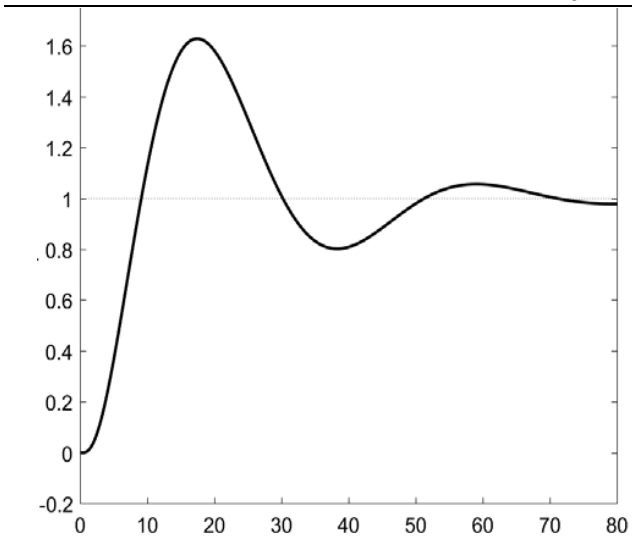
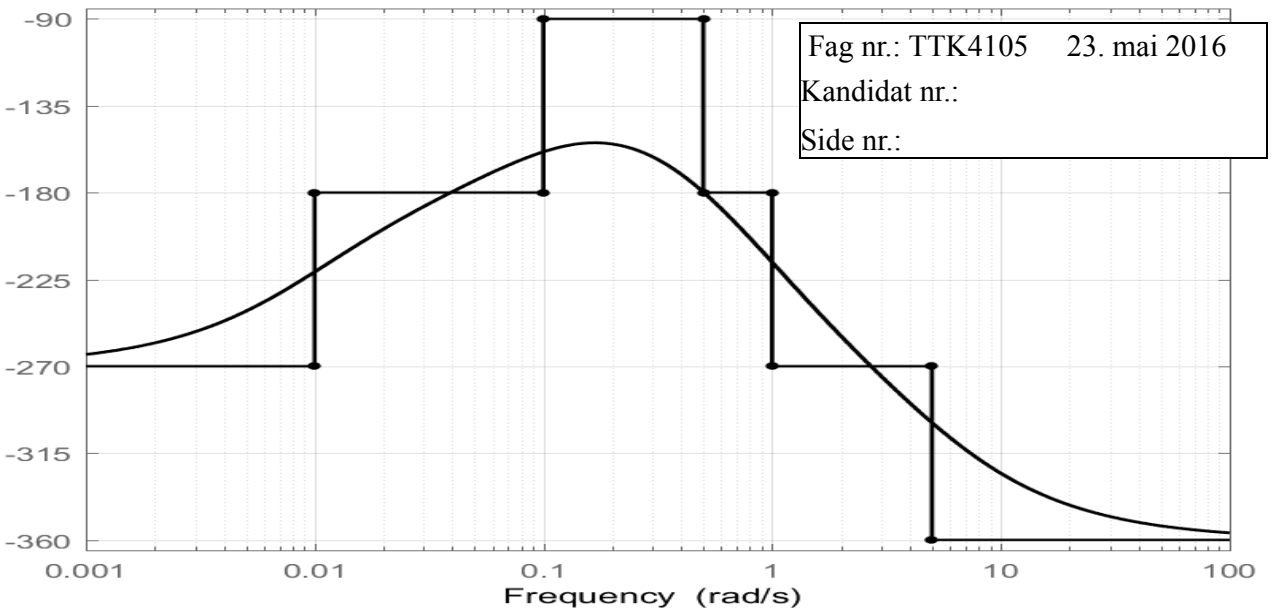
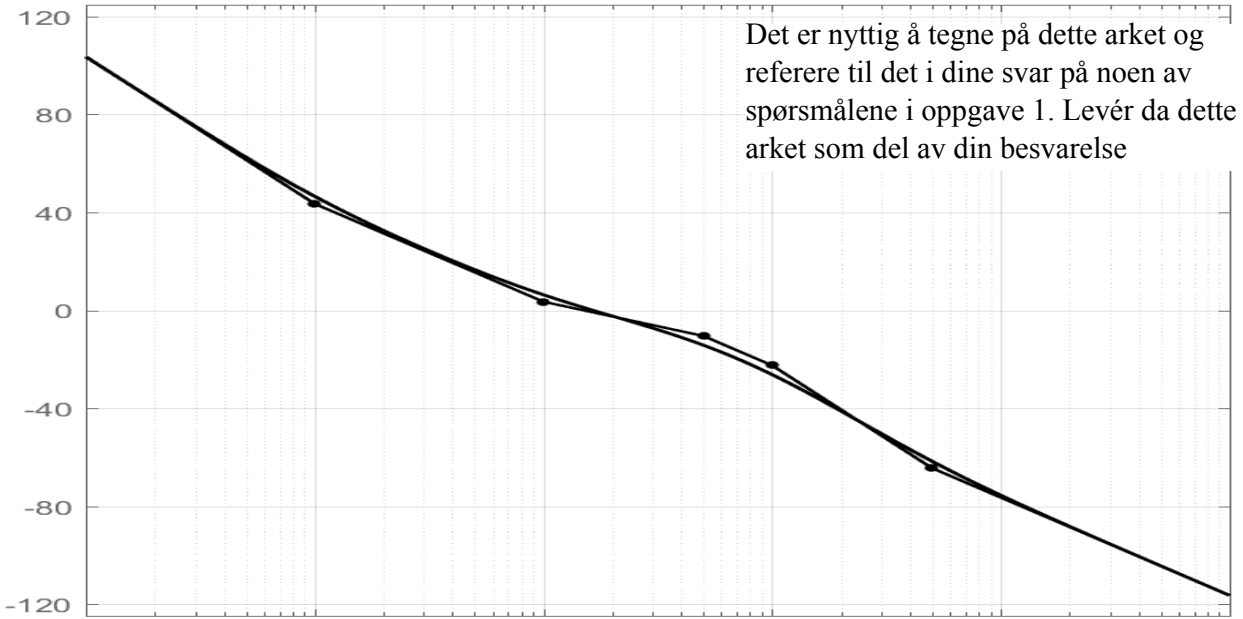
(Dette er en stor oppgave. Men den er laget slik at du kan svare fullt ut på seinere spørsmål sjøl om du ikke greier ett eller flere av de tidlige.)

- a) (5 %) Hva slags regulator er h_r ? Hva kaller vi de to delene av den? Hvilken hensikt har henholdsvis den venstre delen, og den høyre delen, av h_r ?

Prosessen som skal følge eller holdes på en referanseposisjon y_0 , er en gjenstand med masse $m = 1$ [kg] som glir tilnærmet friksjonsløst på et horisontalt underlag. Pådragsorganet med tidskonstanter T_1 og T_2 har en dynamikk vi må ta hensyn til, og som vi derfor inkluderer i prosessmodellen. Tidsenheten i denne oppgaven er sekunder.

- b) (2 %) Hva slags orden har det lukkede system, dvs. transferfunksjonen $M(s) = \frac{y}{y_0}(s)$? (Tips: dette er raskt å svare på, du trenger ikke finne $M(s)$.)
- c) (4 %) Du kan ikke bruke Ziegler-Nichols' eller SIMC-metoden for å stille inn regulator her. Hvorfor ikke?
- d) (3 %) T_i må velges svært stor for dette systemet. Hvorfor? Hva er ulempen med å ha en stor T_i ?

Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



- e) (7 %) Det oppgis at $m = 1$, $\alpha = 0.2$ og $T_2 = 0.2$. Ut fra bode-diagrammet for h_0 med asymptoter: Finn T_i , T_d , T_1 og K_p . (Tips: alle størrelser er noenlunde runde tall.) Tegn i diagrammet og levér det med besvarelsen.
- f) (4 %) Oppgi stigningstallet på asymptotene for $|h_0|$ fra venstre mot høyre. Bruk notasjonen (-1), (-2) osv. Forklar siste knekk for amplitude og fase, til høyre.
- g) (5 %) Betrakt responsen ved sprang i y_0 . Kommentér den, og se den i sammenheng med fase- og forsterkningsmarginer.
- h) (3 %) Dette systemet er *betinget stabilt*. Hvordan ser du det og hva betyr det?
- i) (5 %) Hva slags inngangssignal (sprang, rampe, parabel) vil utgangen kunne følge uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- j) (5 %) Hva slags forstyrrelse v (sprang, rampe, parabel) kan elimineres helt på utgangen uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- k) (4 %) Regulatoren skal realiseres diskret (men du skal ikke finne den her). Vi aksepterer 1° dårligere fasemargin, og skal velge taste(samplings-)tida T basert på dette. Finn T .
- l) (4 %) Vi vil nå også ha en foroverkopling fra forstyrrelsen, med en blokk h_f . Tegn denne inn i et modifisert blokkdiagram basert på figur 1.1. Kall bare regulatoren i figur 1.1 for h_r . Finn den *statistiske* foroverkopling fra v , altså en konstant forsterkning $h_f = K_f$ (tips: den blir ekstremt enkel). Hva slags v kan denne motvirke?
- m) (6 %) Vi er ikke fornøyd med seriekompensasjon i dette tilfellet, og innfører derfor en intern tilbakopling. Tegn en slik i blokkdiagrammet fra forrige punkt, eller tegn et separat diagram. Nevn to fordeler med denne løsningen.
- n) (2 %) Kan vi beholde den valgte foroverkoblingen sjøl om vi innfører intern tilbakekobling? Kort begrunnelse.

Oppg 2 (7 %)

Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et 2. ordens Butterworth lavpassfilter, med knekkfrekvens 100 rad/s. Nevn en anvendelse av lavpassfilter i et reguleringsystem.

Oppg 3 (5 %)

Forklart verbalt når det er aktuelt å anvende en Otto-Smith-regulator, og hva som er den store fordelene med en slik regulator.

Dette er en *modellbasert regulator*. Hva mener vi med det?

Oppg 4 (19 %)

En sinussvingning $y = \sin(\omega_0 t)$, $t > 0$, og 0 for $t < 0$, kan oppfattes som utgangen på en transferfunksjon $h(s)$ som utsettes for en impulsfunksjon $\delta(t)$.

- a) (2 %) Finn $h(s)$.

- b) (4 %) Finn A , b , c^T i en tilstandsrommodell for $h(s)$, $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.
- c) (7 %) Den autonome (dvs. uten pådrag) versjonen av denne modellen er gyldig for en friksjonsløs pendel nær likevektspunktet. Du skal lage en linearisert modell med likevektspunktet som arbeidspunkt. Pendelen har lengde L og masse m . Du trenger også tyngdens akselerasjon g . Tilstandene er pendelens utslagsvinkel x_1 fra likevektspunktet, og dennes deriverte x_2 . (Tips: Bruk Newtons 2. lov for rotasjon, ikke rettlinja bevegelse.)
- d) (6 %) Finn $x_1(t)$ med linearisert modell når pendelen starter i likevektsposisjonen $x_1 = 0$, men med en initiell vinkelhastighet x_{20} .
- (Tips: en måte å løse dette på er å bruke $(sI - A)^{-1}$, og det oppgis da at øvre høyre element i denne er $\frac{1}{s^2 + g/L}$.
- Men hvis du ikke har greidd oppgave b) og c) over, kan du faktisk, og raskt, finne svaret bare med utgangspunkt i opplysninger gitt i a) og c) og her i d).

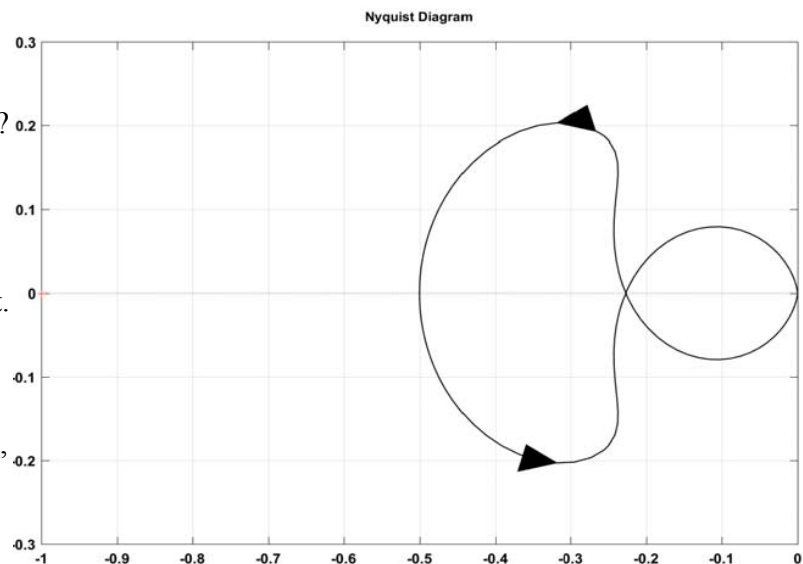
Oppg 5 (10 %)

Vi har et åpent system med proporsjonalregulator

$$h_0 = h_r h_u = K_p \frac{1}{(1 + 0.1s + 0.02s^2)(s - 2)} \quad (5.1)$$

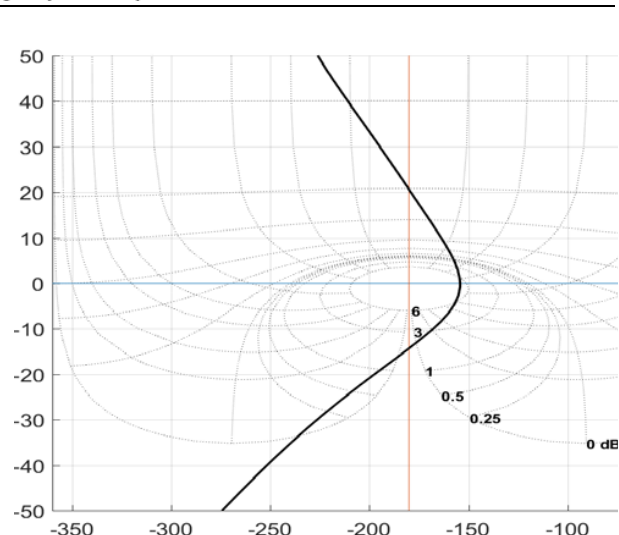
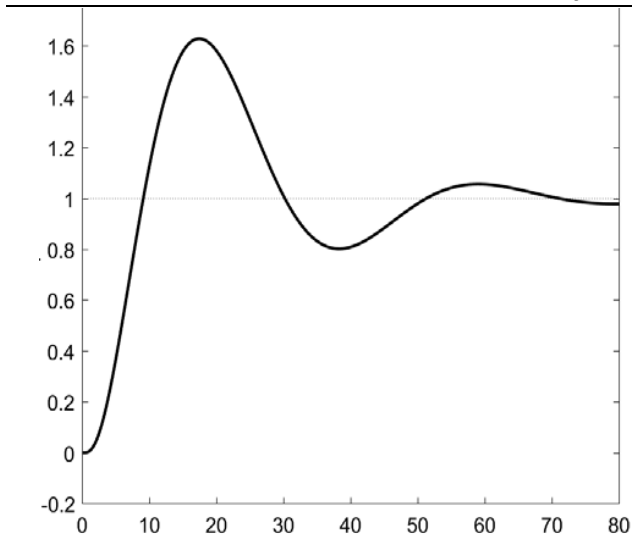
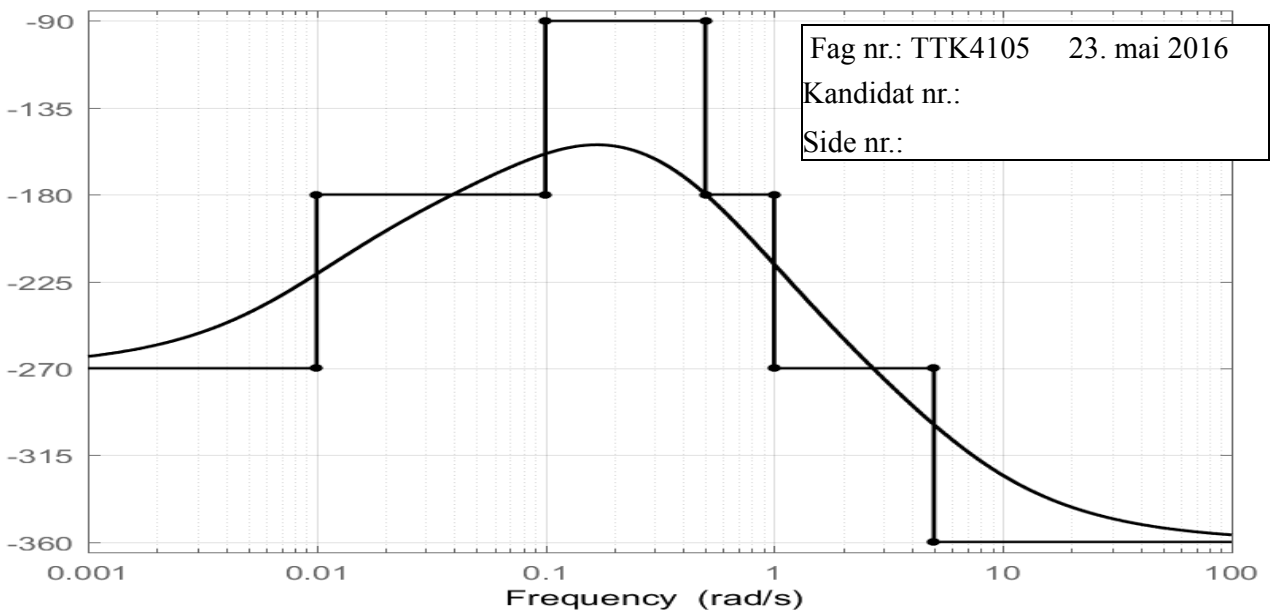
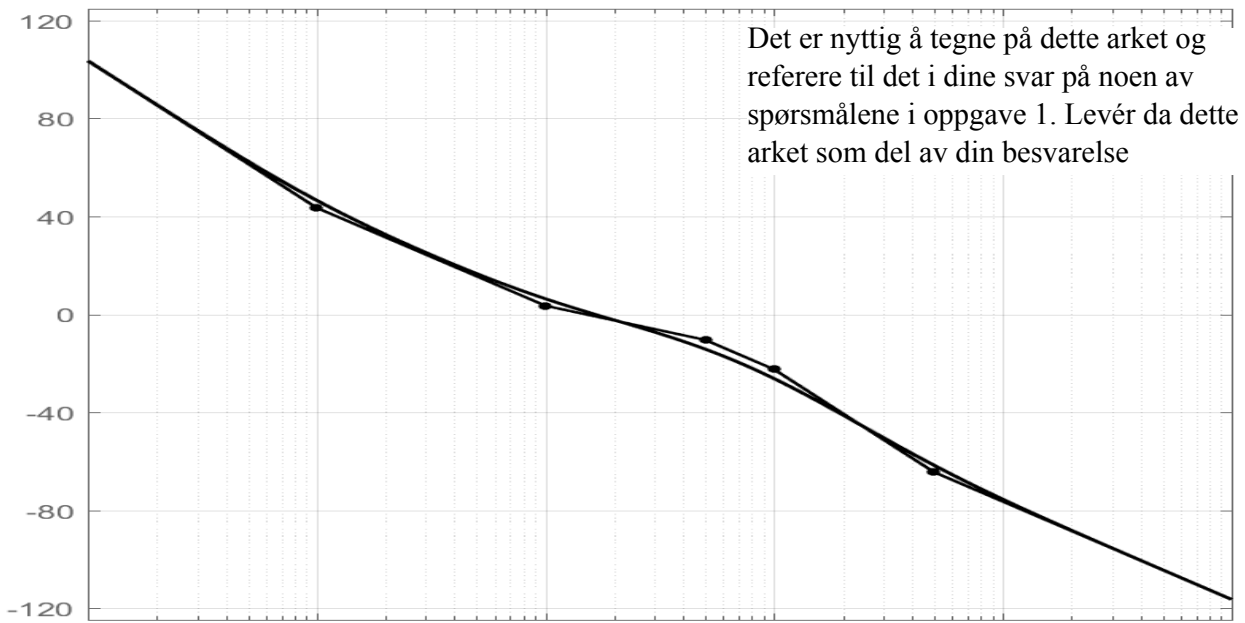
- a) (2 %) Hvor mange poler N_p har h_u i høyre halvplan? Inkluder begge ledd i nevneren i din forklaring.
- b) (4 %) Figur 5.1 viser Nyquistkurven for h_0 med $K_p = 1$. Er det lukkede system stabilt? Begrunn svaret!
- c) (4 %) Finn det området for K_p som gjør det lukkede system stabilt.

(Tips til denne oppgaven: Du kan måle ut mm med linjal, du trenger ikke regne om til skalaen langs aksene.)



figur 5.1

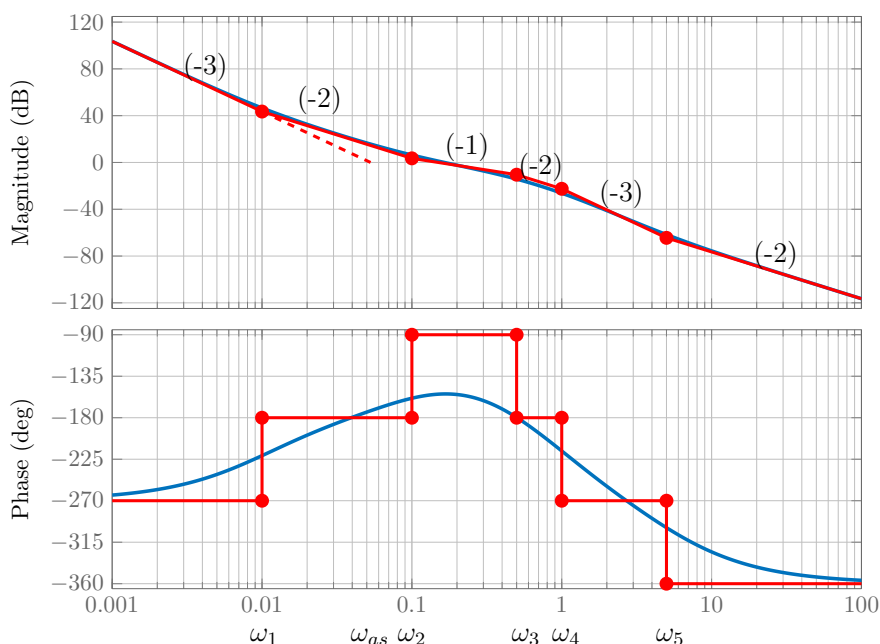
Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



(Ekstra ark oppgave 1)

Oppgave 1

- a) Dette er en PID -regulator med begrenset derivat virkning. Den høyre delen ($\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}$) er en begrenset derivat regulator, PD , denne skal stabilisere systemet. Den venstre delen ($\frac{1+T_i s}{T_i s}$) er en integral regulator, PI , denne skal fjerne stasjonært avvik.
- b) Vi har $h_0 = \frac{t_0}{n_0}$, vi får dermed $M(s) = \frac{t_0}{n_0 + t_0}$. $\text{Grad}(n_0) = 5$. $\text{Grad}(t_0) = 3$. $\text{Grad}(n_0 + t_0) = \max(5, 3) = 5$.
- c) Prosessen, h_u , har to poler i origo. Ved Z-N skal man øke K_p i lukket sløyfe med proporsjonal regulator til man når stabilitetsgrensa. Men dette lukkede systemet er på stabilitetsgrensa for alle $K_p \Rightarrow$ Z-N kan ikke brukes.
- SIMC-metoden forutsetter åpent stabil prosess, h_u , slik at vi kan få en sprang respons på den. Men prosessen h_u er ustabil (to poler i origo) \Rightarrow SIMC kan ikke brukes.
- d) Prosessen, h_u , har meget negativt faseforløp. Integral-virkningen gir et ekstra bidrag på -90° i gal retning. Ved å sette T_i svært stor, kan man begrense dette bidraget til bare lave frekvenser. Ulempen er at det tar lang tid før stasjonært avvik blir fjerna.



Figur 1: Oppgave 1e Bode-diagram

- e) Vi har merket de forskjellige knekkfrekvensene i figur 1, med målingene er oppgitt her

Merkelapp	Frekvens	Periode	Parameter
ω_1	0.01	100	T_i
ω_{as}	0.053	-	-
ω_2	0.1	10	T_d
ω_3	0.5	2	αT_d
ω_4	1	1	T_1
ω_5	5	0.2	T_2

Vi har kommet frem til parameterne som følger. Først så har vi oppgitt at $T_2 = 0.2$. Videre så vet vi at vi skal ha to perioder der den ene skal være lik den andre multiplisert med $\alpha = 0.2$. Vi ser at dette tilsvarer frekvensene ω_3 og ω_4 , hvilket gir $T_d = 10$. Da gjenstår det to perioder $\frac{1}{\omega_1} = 100$ og $\frac{1}{\omega_4} = 1$ som tilsvarer T_i og T_1 . Vi vet at T_i må være stor, og vi får dermed $T_i = 100$ og $T_1 = 1$.

Til slutt skal vi finne K_p . Vi vet at asymptoten ved lave frekvenser skjærer 0-db linjen i $\omega_{as} = K^{\frac{1}{q}}$, der q er antall integrasjoner og vi har $K = \frac{K_p}{T_i}$. Dermed får vi $K_p = T_i \omega_{as}^3 = 100 \times 0.053^3 = 0.15$. (Her godtar vi måleunøyaktigheter på $\omega_{as} \in [0.045, 0.06]$ hvilket tilsvarer $K_p \in [0.009, 0.021]$.)

- f) Se figur 1. Legg merke til siste knekk: $|h_0|$ opp, $\angle h_0$ ned. Dette skyldes leddet $(1 - T_2 s)$ i teller, hvilket gjør at vi har et ikke-minimum fase system, "negativt nullpunkt".
- g) Den er for oscillatorisk. ψ er under 30° , skulle gjerne vært over 45° . $|N|_{\max}$ er godt over 6 dB, burde vært max 6 dB. Det vil si vi er for nært stabilitetsgrensa, noe den oscillatoriske responsen også indikerer.
- h) Av bode og nichols-diagrammet ser vi at systemet kan bli ustabil ikke bare for en stor K_p , men også en liten K_p .
- i) Det er 3 integratorer i $h_0 \Rightarrow y$ får null stasjonært avvik for sprang, rampe og parabel.
- j) Det er bare en integrator foran angrepspunktet til v , dermed får vi kun null stasjonært-avvik ved sprang. Ikke for rampe og parabel. (Oppgave i) og j) kan også løses ved bruk av sluttverditteoremet)
- k) Leser av $\omega_c \approx 0.15$. Vi har da kravet $\omega_c \frac{T}{2} < 1^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$. Dermed får vi tastetid

$$T < \frac{2}{\omega_c} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{0.15} \times \frac{\pi}{180} = 0.23. \quad (1)$$

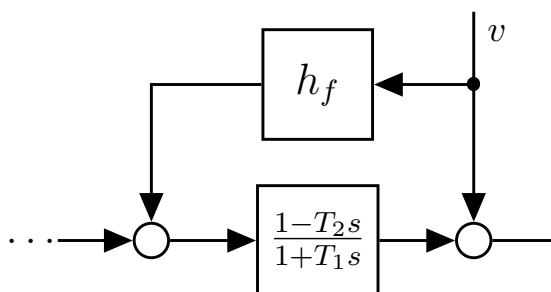
l) Se figur 2 for plassering av foroverkoblingen. En ideell foroverkobling krever

$$h_{f,i} \frac{1 - T_2 s}{1 + T_1 s} + 1 = 0 \quad (2)$$

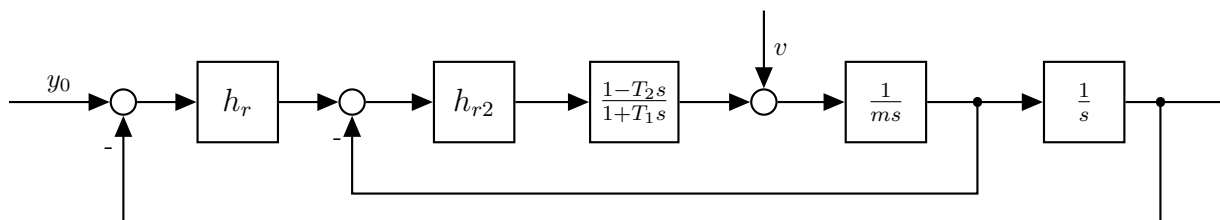
siden vi kun er ute etter en statisk foroverkobling kan vi sett $s = 0$ i uttrykket over, og vi får dermed en konstant foroverkobling

$$h_{f,i} = K_{f,i} = -1. \quad (3)$$

Denne foroverkoblingen kan kun motvirke konstante forstyrrelser.



Figur 2: Oppgave 1 l, foroverkobling



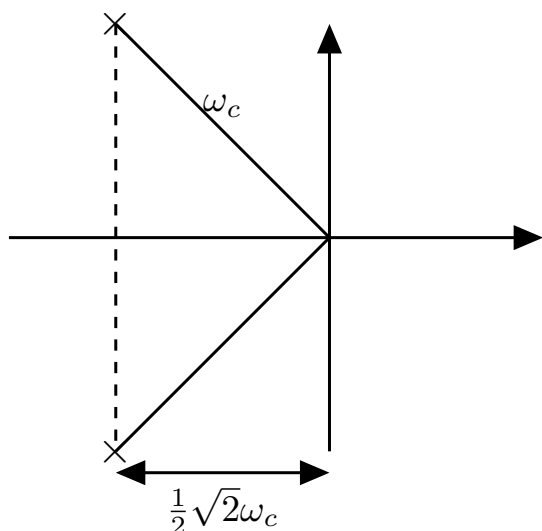
Figur 3: Oppgave 1 m, tilbakekobling

m) Se figur 3 for plassering av tilbakekoblingen. Fordeler med en slik løsning

- Raskere motvirkning av forstyrrelsen
- Raskere regulering \Rightarrow høyere båndbredde
- Økt stabilitetsmargin.

n) Ja. Foroverkobling kan velges uavhengig av tilbakekoblings-valg.

Oppgave 2



Figur 4: Plassering av polene i Butterworth lavpassfilter med orden 2

Polene i filteret ligger med avstand ω_c fra origo, plassert som en regulær mangekant med 4 sider symmetrisk om den imaginære akse. Vi har $\omega_c = 100$ og $\xi = \sin \varphi = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

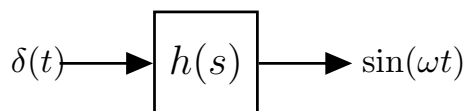
$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_c} + 1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{s}{100}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{s}{100} + 1} \\ &= \frac{100^2}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 100^2} \end{aligned} \quad (4)$$

En anvendelse av lavpassfilteret er støyfiltrering i reguleringsystem.

Oppgave 3 Otto Smith-regulator er gunstig når vi har en tidsforsinkelse, $e^{-\tau s}$, inne i lukket sløyfe. Den store fordel er at Otto Smith-regulatoren gjør om dette til et reguleringsproblem hvor tidsforsinkelsen, $e^{-\tau s}$, flyttes ut av lukket sløyfe (v.27).

Vi ser at prosessmodellen inngår i Otto Smith-regulatoren, hvilket er det vi mener med modellbasert regulator.

Oppgave 4



Figur 5: Oppgave 4a

- a) Fra formelsamlingen har vi at impulsresponsen til $\frac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}$ er $h(t) = K\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Dersom vi sammenlikner uttrykket $h(t)$ med $\sin \omega t$ får vi at $\omega_0 = \omega$ og $K = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega}$. Det gir transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{\frac{1}{\omega}\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

- b) Her finnes det flere løsninger. Dersom vi bruker (V.23) får:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [\omega \quad 0] \quad (6)$$

Løsning 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \text{ og } c = [1 \quad 0] \quad (7)$$

Løsning 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [0 \quad \omega] \quad (8)$$

Løsning 4:

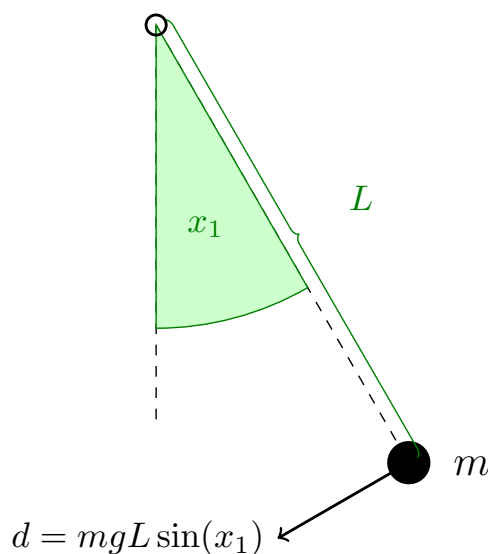
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [0 \quad 1] \quad (9)$$

- c) Først, må vi finne en modell for pendelen. Vi starter med Newtons lov for rotasjon $d = J\dot{\omega}$, der d er dreiemoment (kraft til å forandre et legemes rotasjon om sin egen akse), J er tregheten til massen og $\dot{\omega}$ er den deriverte av vinkelhastigheten. Videre har vi oppgitt i formelsamlingen at tregheten til en masse på en vektløs stang er $J = mL^2$ (V.6). Til slutt vet vi at dreiemomentet om pendelen er gitt som kraft multiplisert med arm, hvilket gir $d = mg \sin(x_1) \times L$, se figur 6. Setter vi sammen disse likningene får vi

$$\begin{aligned} d &= J\ddot{x}_1 \\ -mgL \sin(x_1) &= mL^2\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Utvider vi denne modellen med en ekstra tilstand $x_2 = \dot{x}_1$ får vi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = f(x) \quad (11)$$



Figur 6: Oppgave 4c, pendel

Likevektspunktet til dette systemet kan vi finne ved å sette $\dot{x} = 0$. Vi ser da at vi får $x_2 = 0$ og $\sin(x_1) = 0$ hvilket gir $x_1 = 0$ eller $x_1 = \pi$. Likevektspunktet $(\pi, 0)$ er ustabil og vi velger derfor likevektspunktet $(0, 0)$ som arbeidspunkt.

Vi kan nå linearisere modellen rundt arbeidspunktet $(0, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Det lineariserte autonome modellen blir dermed:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x \quad (13)$$

med A gitt i likning (12), og Δx er x linearisert om arbeidspunktet x^* .

d) Vi finner først $x(s)$ og bruker invers laplace for å finne $x_1(t)$.

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} x_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Vi har dermed at $x_1(s) = \frac{x_{20}}{s^2 + \frac{g}{L}}$, sammenlikner vi dette med impulsresponsen til $K\omega \sin(\omega t)$ (fra formelsamlingen) ser vi at $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og $K = x_{20} \frac{L}{g}$. Vi får dermed

$$x_1(t) = x_{20} \sqrt{\frac{L}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right). \quad (15)$$

Alternativ løsning (uten bruk av svaret fra forrige oppgave):

Vi vet at $x_2(t)$ har sitt maksimum ved $x_1(t) = 0$. Videre har vi at $x_1(t)$ er sinusformet. Da må $x_2(t)$ være en cosinus funksjon, siden $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Vi antar at pendelen svinger med frekvens ω . Dermed kan vi sette opp likningen:

$$x_2(t) = x_{20} \cos(\omega t) \quad (16)$$

Vi kan finne funksjonen for $x_1(t)$ ved å integrere dette uttrykket:

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt = \frac{x_{20}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (17)$$

Dette stemmer svaret fra likning (15) når vi vet at frekvensen pendelen svinger med er $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Oppgave 5

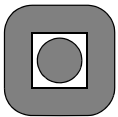
- a) I 2. ordens leddet har alle koeffisienter samme fortegn (fra Rouths kriterium se V.19 i formelsamlingen) hvilket vil si at alle røtter er i v.h.p. Dermed gjenstår kun 1. ordens leddet som har en pol i høyre halvplan. Systemet har dermed totalt en pol i høyre halvplan, $N_p = 1$.
- b) Nei, systemet er ustabil. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ har en netto vinkeldreining lik null, $\Delta\angle(1 + h_0) = 0$. Fra Nyquist stabilitetskriterium får vi da at antall poler i det lukkede systemet blir

$$N_n = N_p - \frac{\Delta\angle(1 + h_0)}{2\pi} = 1. \quad (18)$$

Siden det lukkede systemet har en pol i høyre halvplan så er systemet ustabil.

- c) For at det lukkede systemet skal bli stabilt trenger vektoren $1 + h_0(j\omega)$ en positiv om-dreining. Det får vi hvis den venstre løkken i figur 5.1 omslutter punktet $(-1,0)$. Minimum forsterkning vi trenger for å omslutte $(-1,0)$ med venstre løkke er $K_{p,\min} = K_p \frac{1}{0.5} = 2$. Maksimum blir $K_{p,\max} = K_p \frac{1}{0.227} = 4.4$. Stabilitetsgrensene for K_p blir dermed

$$2 < K_p < 4.4 \quad (19)$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Det blir to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

lørdag 10. juni 2017

Tid: 0900 - 1300

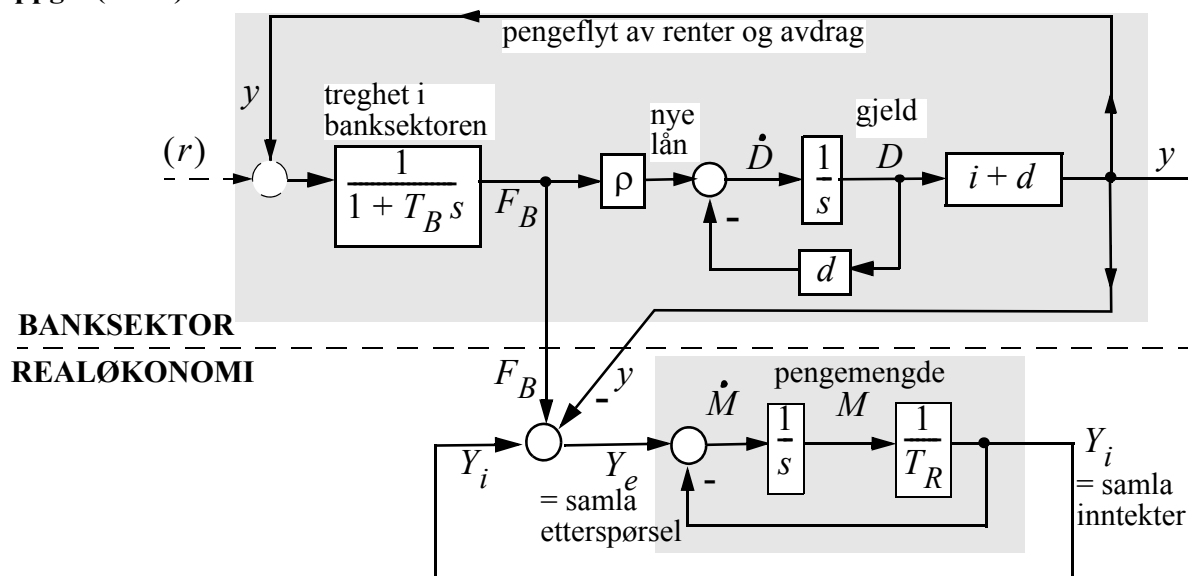
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må kort forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet".

Oppg 1 (34 %)



figur 1.1

Figur 1.1 viser en enkel samfunnsøkonomisk modell (du trenger ikke å ha tatt noen økonomifag for å løse denne oppgaven, det holder å betrakte dette som et generelt dynamisk system). Øverst er banksektoren, som tar inn renter og avdrag og låner ut penger igjen. Nederst er realøkonomien, hvor summen av individer og eiere i samfunnet mottar samla inntekt $Y_i(t)$ [\$/\$år] ("dollar per år", en strøm av penger), og bruker dette til forbruk og investeringer. For dette formål befinner det seg en total mengde penger M [\$] i realøkonomien, som sirkulerer der.

I tillegg låner realøkonomien (alle individer og bedriftseiere) penger av banksektoren, og banksektoren bruker også penger for å betale sine utgifter. Til sammen utgjør dette en pengestrøm fra banksektoren til realøkonomien F_B [\$\text{år}\$]. En andel $\rho < 1$ av F_B brukes til å gi nye lån, resten til å betale bankenes utgifter.

F_B , fratrukket $y = \text{renter} + \text{avdrag på lån}$, gir – summert med Y_i – en total etterspørsel Y_e .

Total gjeld for realøkonomien er D (“debt”), rentesatsen er i [$1/\text{år}$] (her er 6% rente = 0.06), og lån nedbetales med en faktor d [$1/\text{år}$] (slik at 0.05 her betyr at 5% av gjelda nedbetales pr. år).

Realøkonomien belastes med en pengestrøm y [\$\text{år}\$] tilbake til banksektoren for å betale renter og avdrag på gjeld, vi har $y = (i + d)D$. Pengestrømmen y passerer gjennom banksektoren med en treghet gitt av T_B , og kommer ut derfra som F_B .

(Til venstre i banksektoren er plassert en hjelpe-inngangsvariabel $r = 0$. Den er ikke nødvendig for å løse det meste av denne oppgaven, men vi bruker den blant annet for å lage et Nyquist-diagram lenger nede.)

a) (3%) Hva slags orden (n) har denne modellen? Begrunnet svar!

b) (2%) Ved $t = 0$ har vi en gjeld D_0 . Vi ønsker å finne tidsforløpet $D(t)$.
Ved å inspisere blokkdiagrammet ser vi at vi for dette formål kan ignorere realøkonomi-delen av modellen. Forklar!

c) (7 %) Vis at det karakteristiske polynom (nevneren i det lukkede systems transferfunksjon) for banksektor-modellen er $[1 - \rho(1 + i/d)] + (T_B + 1/d)s + (T_B/d)s^2$ (1.1)

d) (4 %) Vis algebraisk, f.eks. ved å bruke rett uttrykk i formelsamling, at $D(t)$ vokser (= blir ustabil) hvis $\rho > \frac{d}{i+d}$ (du trenger altså ikke finne røtter i (1.1)). (1.2)

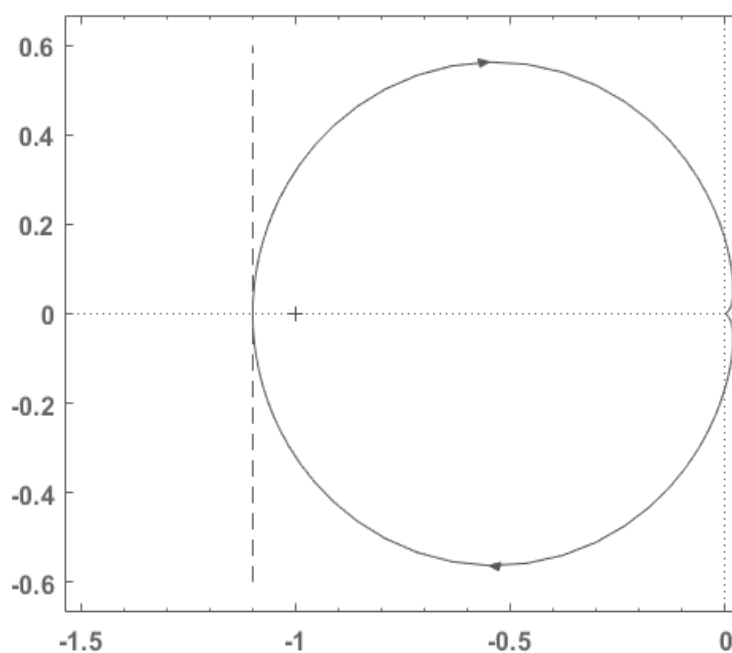
e) (8 %) Vi bruker nå tallverdier
 $\rho = 0.5$, $d = 0.05$,
 $i = 0.06$, $T_B = 0.5$.

Se Nyquist-diagrammet for h_0 til høyre.

Hvorfor må det her brukes et negativt fortegn i h_0 ?

Fra grafen: blir det lukkede system (u)stabil?

Sjekk stabilitetsgrense fra diagrammet opp mot kriteriet fra deloppgave d) og kommentér! Stemmer det?



Det oppgis at T_B er mye mindre enn $1/d$. **Bruk derfor fra nå av tilnærmelsen** $T_B = 0$.

f) (5 %) Finn løsningen $D(t)$ med startverdi $D(t=0) = D_0$.

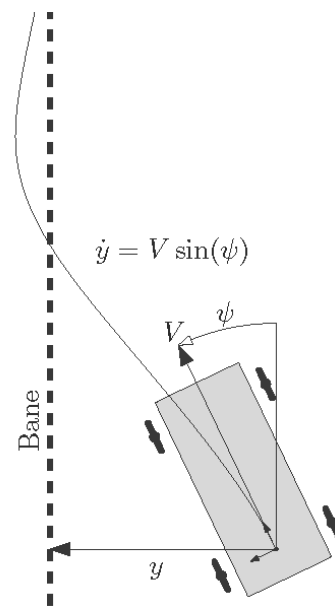
g) (3 %) Det oppgis at pengemengden i realøkonomien ved $t = 0$ er M_0 . Finn $M(t)$! (Tips: svaret er ekstremt enkelt.)

h) (2 %) Ei gjeldskrise kan utvikle seg hvis $\rho > \frac{d}{i+d}$, for da øker $D(t)$ over tid.
Et uttrykk for at man nærmer seg krise, er et voksende forhold $x = \frac{D(t)}{Y_i(t)}$.
Finn x uttrykt blant annet ved D_0, M_0, T_R .

Oppg 2 (30 %)

Selvkjørende biler er i rask utvikling og reguleringsteknikk spiller en sentral rolle. Denne oppgaven ser på en viktig funksjon; evnen til å følge en bane ved hjelp av automatisk styring. Figur viser illustrerer de viktigste variablene. Bilen holder en hastighet V [m/s] som kan antas konstant. Normalavstanden til banen angis ved y [m] og vinkelen som dannes med banen gis ved ψ [rad]. Målet er å styre y ved hjelp av et automatisk ratt. Rattvinkelen u [rad] bestemmer svingekurvaturen.

figur 2.1



I denne oppgaven antas V konstant, og ψ liten. Newtons 2. lov ($F = ma$) inngår ikke, den trengs ikke her. Det oppgis at vi kan sette $\dot{\psi}(t) = K_r V u(t)$, der K_r er en konstant.

a) (2%) Finn benevninga til K_r !

Vinkelrett avstand y fra bilen til referansebanen finnes ved å dekomponere bilens hastighet.

Dette gir $\dot{y}(t) = V \sin[\psi(t)]$ (2.1)

b) (5%) Som nevnt er ψ liten. Vi antar at y og u er det også (vi er nær midtlinja og kjører langs denne med små justeringer). Og V er altså konstant. Finn matrisa A og pådragsvektor \underline{b} i en linearisert tilstandsrommodell for systemet. Velg $x_1 = y$ og $x_2 = \psi$.

c) (4%) I dette spesielle tilfellet kan du finne transisjonsmatrisa *eksakt* ved rekkeutvikling, fordi alle ledd fra og med det tredje, forsvinner. Finn $\Phi(t)$.

d) (3%) Vis at linearisering av systemet gir følgende transferfunksjon fra rattvinkel u til avstand y :

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K_r V^2}{s^2} \quad (2.2)$$

(... egentlig Δy og Δu , siden modellen gjelder for små utslag, men vi kan skrive u og y her siden variasjonene i u og tilstandsvektoren \underline{x} er rundt arbeidspunkt 0).

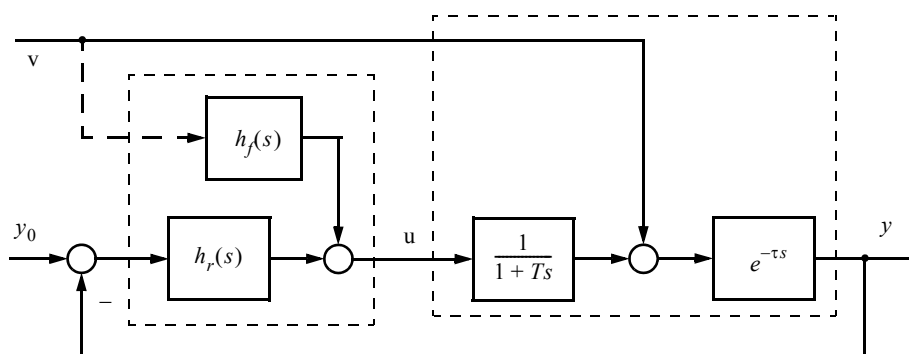
- e) (5 %) Vi prøver oss med proporsjonalregulering, $u = K_p(r - y)$. Vi har $r = 0$.
Tegn en enkel skisse av bilens bane langs referansen (tips: bilsyke!). Begrunnet svar!
- f) (5%) Velg en bedre regulator enn $h_r = K_p$ og forklar hvilket problem den løser!
- g) (6%) Denne regulatoren vil gi null stasjonært avvik for en konstant referanse, og til og med for en referanse som endrer seg lineært (rampefunksjon). Vis det siste.

Oppg 3 (4 %)

Du har en prosess som skal reguleres med diskret regulator (tasting og holdeelement). Du har først regna på dette som om du har kontinuerlig regulator, og har laga et bodediagram som viser amplitude og fase for sløfjetransferfunksjonen h_0 . Kryssfrekvensen for h_0 i bodediagrammet med kontinuerlig regulator er ω_c . Du krever at fasemarginen ψ ikke skal bli mer enn 3 grader dårligere med diskret regulator. Finn den maksimale tastetid T du da kan ha!

Oppg 4 (21 %)

Gitt et reguleringsystem som vist i figur 4.1:



figur 4.1

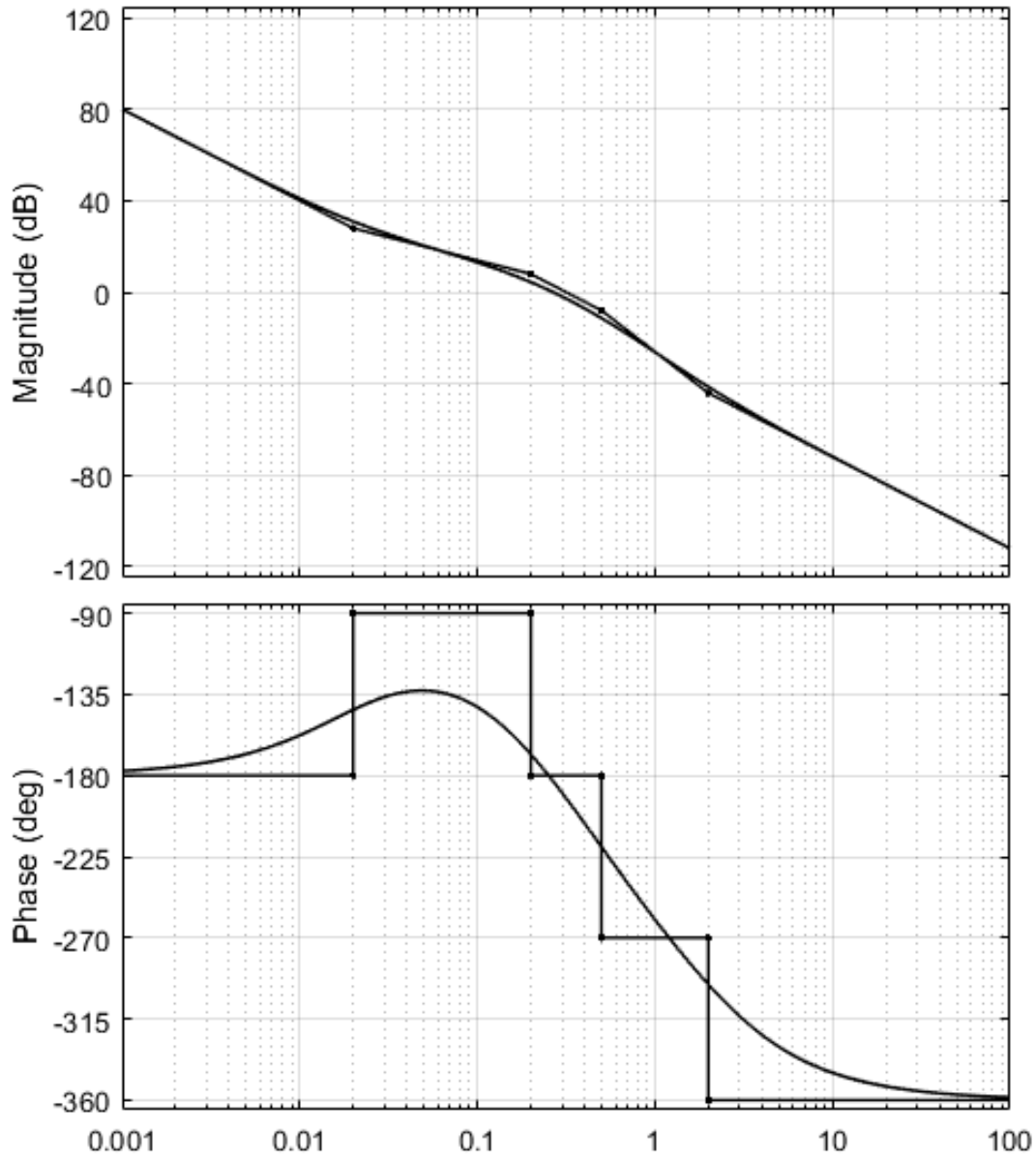
Problemstillingen er å holde y på referansen y_0 , på tross av (for det meste) en konstant forstyrrelse v . Det oppgis at $\tau = 50$ [s] og $T = 5$ [s].

- a) (3 %) **Anta først at forstyrrelsen ikke kan måles**, dette indikert med stiplet pil oppe til venstre i figuren. Du vil bruke en PI-regulator her. Hvorfor? Kort, verbalt svar tilstrekkelig.
- b) (4 %) Finn et par, K_p og T_i , ved å benytte reglene i SIMC-metoden.
- c) (2 %) Du kan få en bedre PI-løsning ved å la denne inngå i en Otto-Smith-regulator. Hvorfor?
- d) (4 %) Finn denne Otto-Smith-regulatoren $h_{r,os}(s)$, uttrykt blant annet ved K_p og T_i . Du skal ikke sette inn noen tallverdier for disse to, eller for τ og T , som også inngår i $h_{r,os}(s)$.
- e) (2 %) **Fra nå av: Du har greid å få til en måling av v** , og skal realisere en foroverkopling. Hva trenger du da å gjøre med regulatorløsninga? Kort, begrunnet svar!
- f) (4 %) Finn den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$. Finn en mer realiserbar foroverkopling $h_f(s)$. Vis at den motvirker v 100% effektivt når v er en forstyrrelse med konstant verdi!

(punkt g) i oppgaven, se neste side)

- g) (2 %) Anta nå at τ er større i forhold til T . Vil foroverkoblinga være mer effektiv sammenligna med tilbakekoblinga, ved stor τ ? Begrunnet, verbalt svar!

Oppg 5 (11 %)



figur 5.1

Figur 5.1 viser bodediagram for en sløyfetransferfunksjon $h_0 = h_r h_u$ i et reguleringsystem, med asymptoter.

- a) (7 %) Finn h_0 ved hjelp av asymptotene!
(Tips: h_0 skal uttrykkes ved en forsterkning K og noen tidskonstanter. Regulatorens forsterkning er tatt med i K . Alle parametre som inngår er "runde" tall.)
- b) (4 %) Er det lukkede system med h_0 som sløyfetransferfunksjon stabilt? Begrunnet svar! Du må justere forsterkninga en god del. Hvor mye synes du er passe, og hvorfor?

Eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

Løsningsforslag

lørdag 10. juni 2017

Oppgave 1 (34%)

a) (3%)

Det er to integratorer, og en 1. ordens blokk som inneholder en integrator. Det gir orden $n = 3$.

b) (2%)

Nedre del av modellen er bare påvirket av øvre del, men virker ikke tilbake på øvre del. $D(t)$ er altså ikke påvirket av nedre del.

c) (7%)

Finn først h_0 :

$$h_0(s) = \frac{1}{1 + T_B s} \rho \frac{1}{s + d} (i + d) = \frac{\rho(i + d)}{(1 + T_B s)(s + d)} \quad (1.1)$$

og deretter (minustegnet i nevneren kommer av positiv tilbakekobling av y):

$$\begin{aligned} \frac{y}{r}(s) &= \frac{h_0(s)}{1 - h_0(s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s) - t_0(s)} = \frac{\rho(i + d)}{(1 + T_B s)(s + d) - \rho(i + d)} \\ &= \frac{\rho(i/d + 1)}{(T_B/d)s^2 + (T_B + 1/d)s + 1 - \rho(1 + i/d)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

d) (4%)

Formel (V.18) i formelsamlinga sier at for et 2.ordens polynom er alle røttene i vhp. hvis alle koeffisientene har samme fortegn. Koeffisienten $1 - \rho(1 + i/d)$ er den eneste som ikke alltid er positiv. Løses ulikheten $1 - \rho(1 + i/d) < 0$ for ρ får man (1.2) i oppgavesettet.

e) (8%)

For å få negativ tilbakekobling må vi putte inn et negativt fortegn i forovergreina, noe vi gjorde allerede i deloppgave c). Nyquist forutsetter negativ enhetstilbakekobling, det oppnår vi på denne måten.

h_0 er åpent stabilt, $N_p = 0$. Da skal vi ikke ha omslutning av -1 for stabilitet. Det har vi her, og det lukkede systemet er ustabilt.

For $s = j\omega$ med $\omega = 0$ skjærer grafen x-aksen i -1.1 . For å komme på stabilitetsgrensa kan vi minke ρ til $\bar{\rho} = \rho/1.1$. Setter dette inn i formelen fra deloppgave d) for å sjekke:

$$\bar{\rho} = \frac{0.5}{1.1} \stackrel{?}{=} \frac{d}{i + d} = \frac{0.05}{0.05 + 0.06} = \frac{0.5}{1.1} \quad (1.3)$$

De er like, og dermed stemmer det grafiske og algebraiske kriteriet overens.

f) (5%)

Med $T_B = 0$ får vi

$$\dot{D} = \rho(i + d)D - dD = (\rho(i + d) - d)D \quad (1.4)$$

Setter vi så $\lambda = \rho(i + d) - d$ har vi $\dot{D} = \lambda D$ med $D(0) = D_0$ som gir løsningen $D(t) = D_0 e^{\lambda t}$ fra linje 3, kolonne 2, side 4 i formelsamlinga.

g) (3%)

Når $T_B = 0$ vil de to pilene fra øvre del kansellere hverandre, da $F_B = y$. Da har vi $\dot{M} = Y_i - Y_i = 0$, og $M(t) = M_0$, altså konstant.

h) (2%)

$$x = \frac{D(t)}{M(t) \frac{1}{T_R}} = \frac{D_0 T_R}{M_0} e^{\lambda t}, \quad \lambda = \rho(i + d) - d \quad (1.5)$$

Oppgave 2 (30%)

a) (2%)

$$K_r = \frac{\dot{\psi}[\text{rad/s}]}{V[\text{m/s}]u[\text{rad}]} \Rightarrow K_r[1/\text{m}] \quad (2.1)$$

b) (5%)

Fra oppgaveteksten har vi $\dot{x}_2 = K_r V u$, og linearisering av (2.1) gir $\dot{x}_1 = V x_2$. Det gir matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_r V \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

c) (4%)

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & Vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

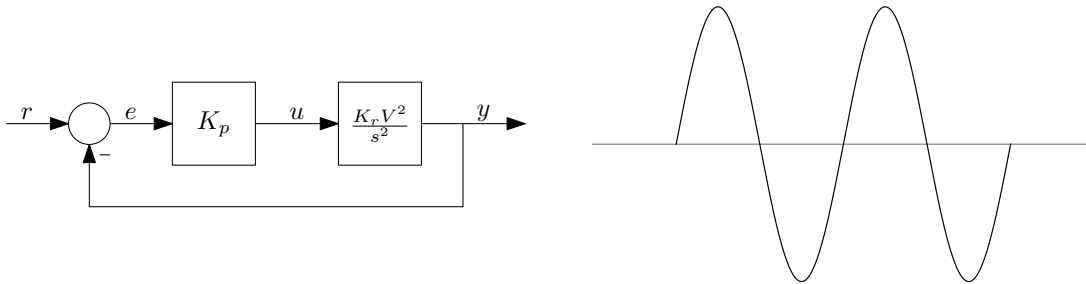
Fordi alle $\mathbf{A}^i = \mathbf{0}$ for $i > 1$.

d) (3%)

Velger vi $y = x_1$ som utgang blir målevektoren $\mathbf{c} = [1 \ 0]^T$. Da får vi

$$h_u(s) = \frac{y}{u}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -V \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ K_r V \end{bmatrix} = \frac{K_r V^2}{s^2} \quad (2.4)$$

e) (5%)



Blokkdiagram og respons med proporsjonalkontroller er vist over. Følgeforholdet $M(s)$ er gitt av

$$M(s) = \frac{\frac{K_p K_r V^2}{s^2}}{1 + \frac{K_p K_r V^2}{s^2}} = \frac{K}{s^2 + K}, \quad K = K_p K_r V^2 \quad (2.5)$$

som vi kjenner igjen som laplacetransformasjon av en sinussvingning $\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}t)$.

f) (5%)

Vi velger en begrenset PD-regulator på formen

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (2.6)$$

som flytter polene i det lukkede systemet fra imaginæraksen og inn i vhp, og gir et asymptotisk stabilt system.

g) (6%)

Med regulatoren fra forrige deloppgave får vi

$$h_0(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \frac{K_r V^2}{s^2} = K \frac{1 + T_d s}{s^2(1 + \alpha T_d s)}, \quad K = K_p K_r V^2 \quad (2.7)$$

som gir avvikforholdet

$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} = \frac{n_0}{n_0 + t_0} = \frac{s^2(1 + \alpha T_d s)}{s^2(1 + \alpha T_d s) + K(1 + T_d s)} \quad (2.8)$$

og sluttverditeoremet gir til slutt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(1 + \alpha T_d s)}{s^2(1 + \alpha T_d s) + K(1 + T_d s)} \frac{1}{s^2} = 0 \quad (2.9)$$

Oppgave 3 (4%)

Fasen til h_0 forverres med $\omega_c T/2$ ved kryssfrekvensen. Med 3 grader fasemargin får man

$$\omega_c \frac{T}{2} = 3 \frac{\pi}{180} \Rightarrow T = \frac{\pi}{30\omega_c} \quad (3.1)$$

Oppgave 4 (21%)

Systemet i denne oppgaven er hentet fra læreboka, eksempel 9.18.

a) (3%)

For å fjerne stasjonært avvik når $v = \text{konstant} \neq 0$.

b) (4%)

Bruker (V.20), og velger $T_L = \tau$:

$$K_p = \frac{T}{2K\tau} = \frac{1}{20} \quad (4.1)$$

$$T_i = \min(T, 8\tau) = 5 \quad (4.2)$$

c) (2%)

Da flyttes tidsforsinkelsen utafør den lukkede sløyfen. Dette tillater mye større K_p /mindre T_i , som gir raskere regulering.

d) (4%)

Reduserer blokkdiagrammet i (V.27), og får:

$$h_{r,os} = \frac{h_r}{1 + h_r h_p (1 - e^{-\tau s})} = \frac{K_p (1 + T_i s)(1 + T s)}{T_i s(1 + T s) + K_p (1 + T_i s)(1 - e^{-\tau s})} \quad (4.3)$$

e) (2%)

Ingenting. Valg av foroverkobling har ingen innflytelse på egenskapene i tilbakekoblinga.

f) (4%)

$$h_{fi} \left(\frac{1}{1 + T s} \right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{fi} = -(1 + T s) \quad (4.4)$$

Denne er ikke proper (Kap. 4.4.2 og eks. 6.2), og dermed ikke realiserbar. Velger derfor

$$h_f(s) = -\frac{1 + T s}{1 + \alpha T s}, \quad 0 < \alpha \ll 1 \quad (4.5)$$

For en konstant forstyrrelse får vi

$$h_f(s) \frac{1}{1 + T s} + 1 \Big|_{s=0} = -1 \cdot \frac{1}{1 + T \cdot 0} + 1 = 0 \quad (4.6)$$

g) (2%)

Foroverkoblinga blir viktigere. Den virker før τ , mens tilbakekoblinga kan først virke etter τ .

Oppgave 5 (11%)

a) (7%)

Venstre asymptote synker med 40dB/dekade, og fasen er -180° . Dermed har vi $h_0 \approx \frac{K}{s^2}$. Denne krysser 0dB-linja i $\omega_{c,as} = 0.1$. Dette gir forsterkning

$$\frac{K}{\omega_{c,as}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \omega_{c,as}^2 = 0.01 \quad (5.1)$$

Videre leser vi av følgende endringer i asymptotisk forsterkning og fase:

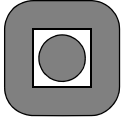
ω	$ h_0 $	$\angle h_0$	$T = 1/\omega$	Type ledd
0.02	knekk opp	+90°	50	teller $1 + T_1 s$
0.2	knekk ned	-90°	5	nevner $1 + T_2 s$
0.5	knekk ned	-90°	2	nevner $1 + T_3 s$
2	knekk opp	-90°	0.5	teller $1 - T_4 s$

som til sammen gir

$$h_0(s) = 0.01 \frac{(1 + 50s)(1 - 0.5s)}{s^2(1 + 5s)(1 + 2s)} \quad (5.2)$$

b) (4%)

I bodediagrammet ser vi at $\omega_c \approx \omega_{180}$, vi er på stabilitetsgrensa $\Rightarrow K$ må reduseres. Et godt valg er å redusere så mye at vi får maks fasemargin, som her er omtrent 45°. Dette oppnår vi med ny $\omega_c \approx 0.05$, og det får vi ved å flytte 0-dB linja 20dB oppover, dvs. K bør reduseres med 20dB.



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
 Det blir to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 Regulerings-teknikk

torsdag 31. mai 2018

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Fleire spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må kort forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet".

Det anbefales sterkt å bruke blyant og viskelær.

Oppgave 1 (7 %)

Gitt en prosess med transferfunksjon $h_1(s) = \frac{1}{\tau s^2}(1 - e^{-\tau s})$.

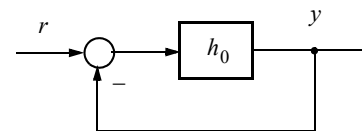
Skissér prosessens impulsrespons $h_1(t)$, slik at det framgår hvordan τ inngår.

Er prosessen asymptotisk stabil, marginalt stabil eller ustabil? (begrunn svaret!)

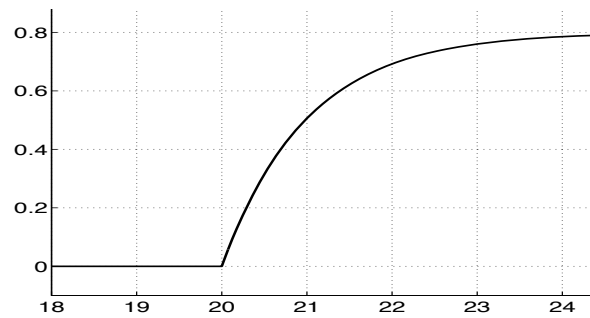
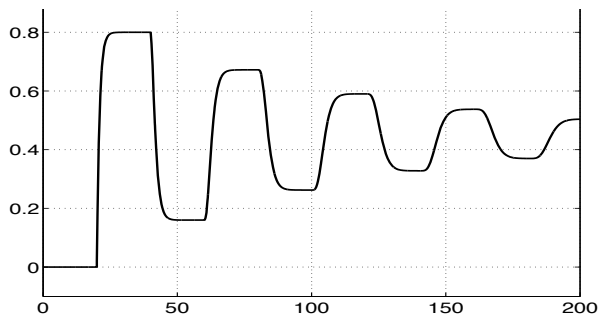
Oppgave 2 (35 %)

Gitt en en sløfetransferfunksjon $h_0 = h_r h_u = h_r \frac{e^{-\tau s}}{1 + T s}$, hvor $\tau \gg T$ (2.1)

Vi lager en enkel reguleringsstruktur som vist til høyre:

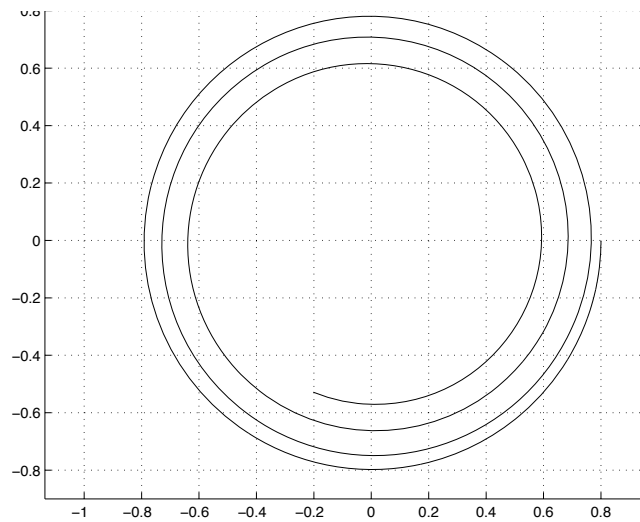


- a) (6 %) Med proporsjonalregulator $h_r = K_p$, og en valgt K_{p1} som gir stabilt system, får vi en enhetsprangrespons som vist øverst på figur 2.1 neste side, med et utsnitt i en annen tidsskala, vist til høyre. Indikér i figuren hvordan T og τ kan leses ut, og gjør det (tips: de er begge runde tall). Les også verdien til K_{p1} ut av grafen (tips: den er et "rundt" desimaltall som har bare ett siffer etter kommaet). Levér den påtegnede figur som del av din besvarelse – eller du kan grovskissere responsen på et ark og indikere hvordan du avleser, og hvilke verdier du fant, der.



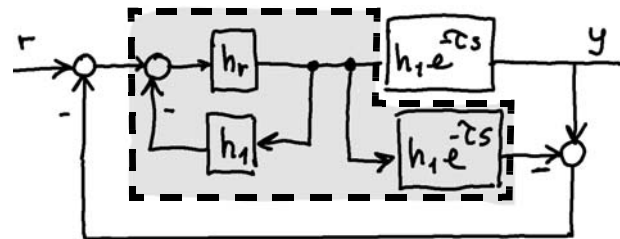
figur 2.1

- b) (6 %) Figuren til høyre viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for $h_0(j\omega)$ med K_{p1} , for $\omega > 0$. Bruk diagrammet til å finne den $K_{p,krit}$ som gjør at systemet kommer på stabilitetsgrensa. Finn forsterkningsmarginen ΔK i dB med den opprinnelige K_{p1} !



- c) (2 %) Beskriv verbalt (i én setning) hvordan Nyquistkurven blir hvis $T = 0$.

- d) (9 %) Proporsjonalregulator aleine er åpenbart ikke bra nok for denne prosessen. Vi velger en standardregulator h_r , men lar den i stedet inngå som en blokk i en mer komplisert regulatorstruktur, indikert innafor den stiplede konturen i figuren til høyre. Vis – ved å forenkle blokkdiagrammet – at følgefórhóldet



$$M(s) = \frac{y}{r}(s) = \frac{h_r h_1}{1 + h_r h_1} e^{-\tau s} ! \quad (\text{Her er } h_1 = \frac{1}{1 + T s}.)$$

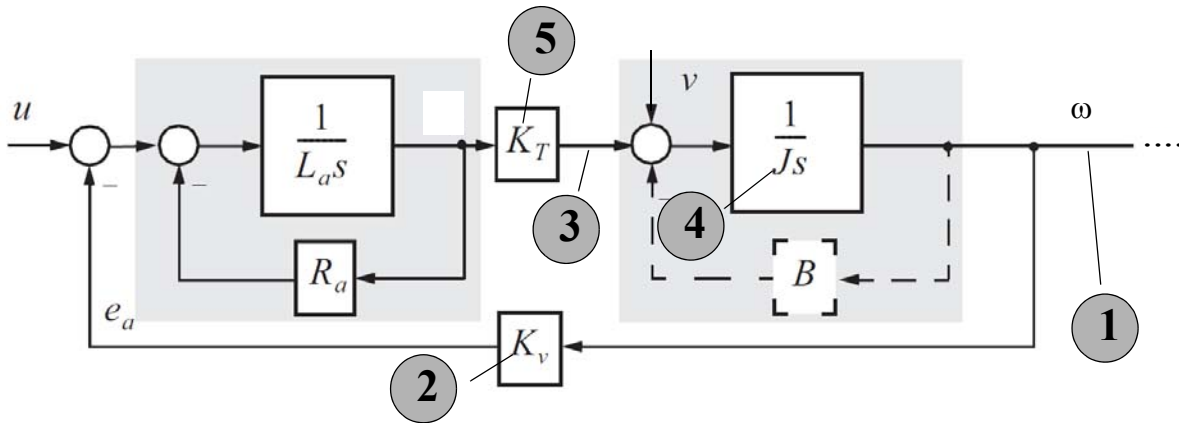
Enhetsprangresponsen med $h_r =$ proporsjonalregulator K_p blir en tidsforsinket eksponentiell innsvingning mot en stasjonær verdi. Skissér responsen grovt, og angi i skissen verdiene for asymptotisk amplitude (dvs. verdien av $y(t \rightarrow \infty)$) og tidskonstant, som funksjon av K_p og T .

- e) (5 %) Det blir stasjonært avvik ved sprang i referansen. Finn dette avviket! Hva kan du gjøre med h_r i dette tilfellet for å eliminere stasjonært avvik?
- f) (4 %) En kollega foreslår å droppe Otto-Smith-regulatoren over og i stedet bruke Skogestads SIMC-regler, med vanlig seriekompensator. Finn K_p og T_i for en PI-regulator med SIMC-metoden. Du skal her velge $T_L = \tau$ (se formelsamling).
- g) (3 %) SIMC eller Otto Smith er i dette tilfellet veldig overlegen som løsning. Hvilken av de to? Forklar hvorfor!

Fag nr.: TTK4105
Dato: 31. mai 2018
Kandidat nr.:
Sidenr.:

Oppg 3 (37 %)

Figur 3.1 viser blokkdiagrammet for en likestrømsmotor, fra spenning u til rotasjonshastighet ω .



figur 3.1

- a) (5 %) Vi skal realisere en styring av motorens vinkel**posisjon**, som da blir vår utgang y . Finn \mathbf{A} , \mathbf{b} og \mathbf{c}^T i en tilstandsrommodell $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- b) (5 %) Du skal finne korrekte benevninger i figur 3.1, nummerert fra 1 til 5, slik: 1 = [qq], 2 = [zz], osv. Til bruk inne i hakeparantesene har du følgende størrelser til rådighet: **N**(ewton), **A**(mpère), **V**(olt), **rad**(ianer), **s**(ekund), **m**(eter), **kg**.
- c) (3 %) Hvis motoren er ubelastet ($v = 0$), og man setter på en konstant spenning u_0 , vil den ruse opp til et konstant tomgangsturtall ω_0 . Finn ω_0 bare ved å hente en opplysning fra blokkdiagrammet, uten å finne transferfunksjon og bruk av sluttverdi-teoremet. (Svaret er meget enkelt).
- d) (5 %) Modellforenkling: Sett først $B = 0$. Modellen fra u til vinkel**hastighet** ω skal nå uttrykkes med en forenklet transferfunksjon som består av to 1. ordens blokker i serie:

$$\frac{\omega}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K}{(1 + T_a s)(1 + T_m s)} \quad (3.1)$$

Finn K og T_m . Til hjelp oppgis at $T_a = L_a/R_a$. I tillegg til $B = 0$ gjør vi en annen tilnærming for å få fram denne forenklede modellen. Hva er den?

- e) (5 %) Fra nå av bruker vi (3.1), med $T_a = 0.2$, $T_m = 20$, $K = 0.1$. Vi skal altså realisere en styring av motorens vinkel**posisjon**. Vi har enhetstilbakekobling og en seriekompensator (regulator) h_r . Bodediagrammet i figur 3.2 viser $h_0 = h_r h_u \frac{1}{s}$, og

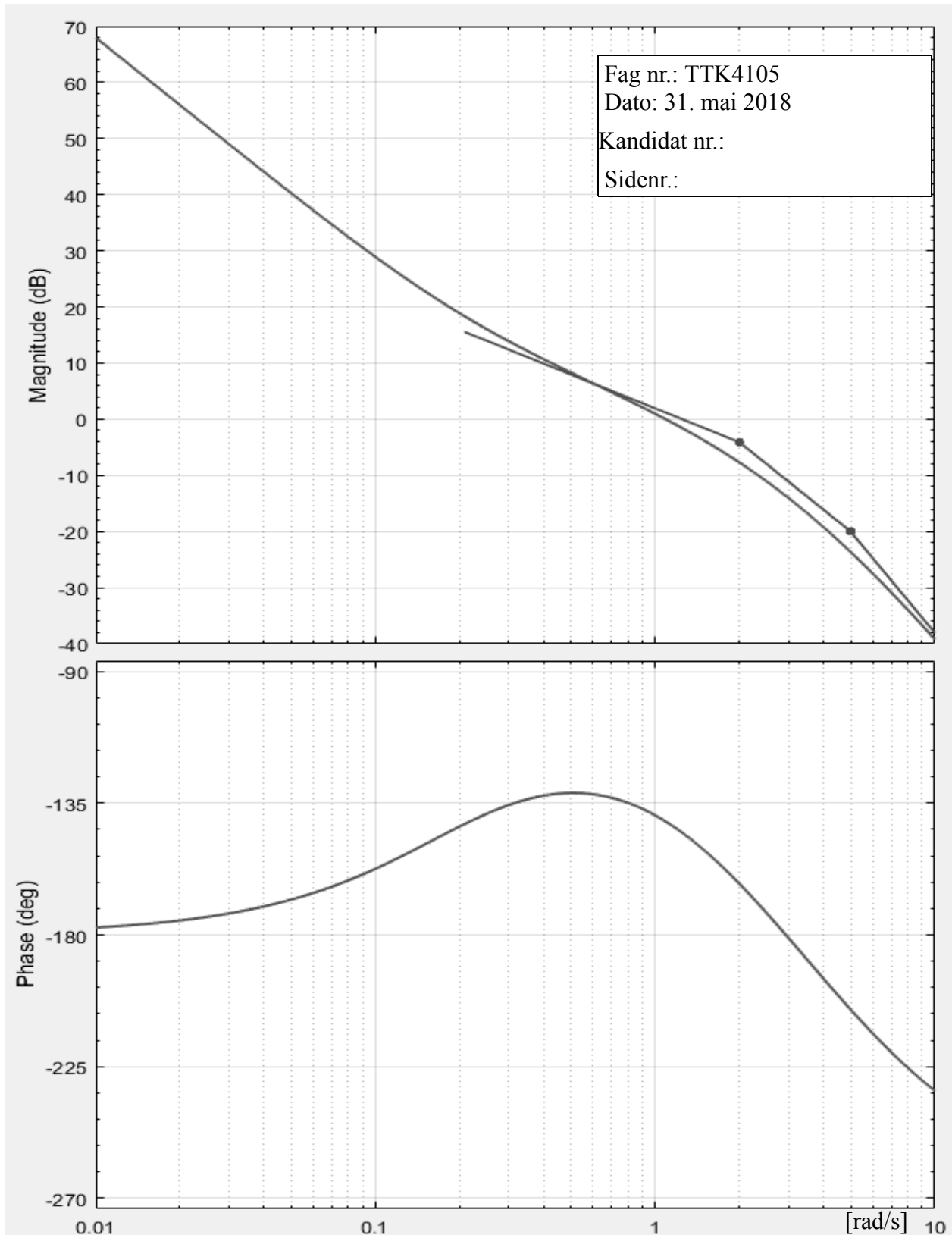
$$h_r(s) = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + \alpha T_d s)}, \text{ hvor } T_i = 20, T_d = 5, \alpha = 0.1, K_p = 50 \quad (3.2)$$

(Merk, til bodediagrammet: Et ledd i teller og nevner i h_0 forkortes bort.)

Hva slags regulator er (3.2)? Vi oppnår ting med denne regulatoren som vi ikke kunne fått til med P eller PI-regulator. Forklar! (Tips: et poeng her har med forstyrrelsen v å gjøre).

- f) (6 %) $|h_0|$ -asymptoten til venstre i figur 3.2 mangler. Tegn den inn. Det skal framgå hvordan du fikk fastlagt den – det er ikke nok å “lure den inntil” på øyemål. Fase-asymptotene mangler helt. Tegn også dem inn. Levér det påtegnede diagram som del av besvarelsen. (Ekstra diagram finnes på side 6 hvis du trenger det.)

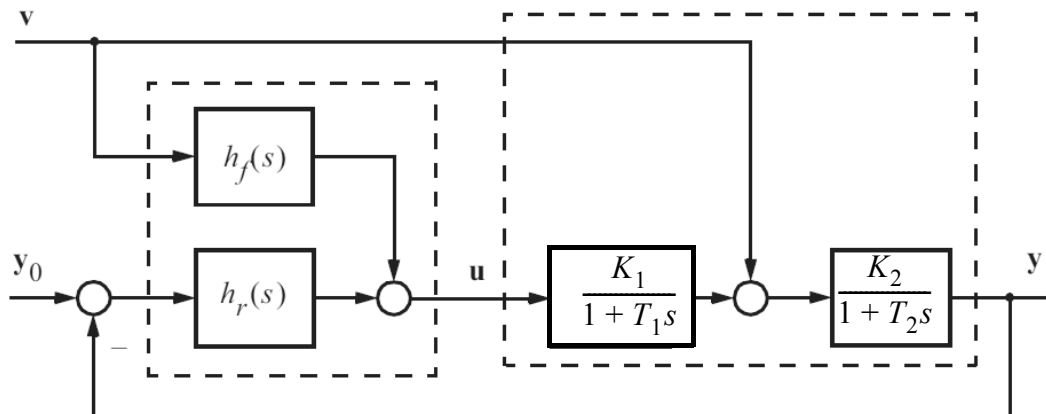
- g) (4%) Du ønsker å oppnå maksimal fasemargin ψ . Da må du endre K_p . Finn den nye K_p !
- h) (4%) Den nye K_p gjelder fra nå av (men du trenger ikke å ha funnet rett K_p for å løse denne underoppgaven): Regulatoren (3.2) skal realiseres som en diskret regulator. Da blir det dårligere fasemargin. Hvorfor?
Du aksepterer 2° dårligere fasemargin. Finn den tastetida (samplingstida) T som innfrir dette.



figur 3.2

Oppg 4 (13 %)

Figur 4.1 viser en reguleringsstruktur med forover- og tilbakekopling.



figur 4.1

a) (4 %) Hva betyr forholdet T_2/T_1 for hvor nyttig foroverkoblinga er? Har K_2 noen betydning for foroverkoblinga? Begrunn svarene!

b) (4 %) Din kollega foreslår foroverkoblinga

$$-\frac{(1+T_1s)}{K_1(1+\alpha T_1s)}, \quad 0 < \alpha \ll 1 \quad (4.1)$$

Kontrollér den ved først å regne ut den ideelle forekoblinga, og kommentér så forslaget (4.1)!

c) (3 %) Hva blir den statiske foroverkoblinga, hvis du tar utgangspunkt i den foreslåtte? Hva oppnår du med den?

d) (2 %) Hva betyr ditt valg av foroverkobling for tilbakekoblinga?

Oppg 5 (8 %)

Gitt en hare-rev populasjonsmodell. x_1 er antall harer og x_2 er antall rever:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1x_1 - c_1x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + c_2x_1x_2 \end{aligned}, \quad \text{alle } a\text{'er og } c\text{'er } > 0. \quad (5.1)$$

a) (4 %) Finn likevektspunktet $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$.

b) (4 %) Finn **A**-matrisa i en tilstandsrommodell som er gyldig nær dette likevektspunktet.

Eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

Løsningsforslag

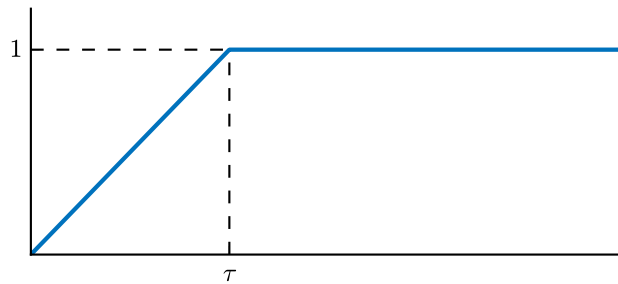
torsdag 31. mai 2018

Oppgave 1 (7%)

$$h_1(s) = \underbrace{\frac{1}{\tau s^2}}_{\text{Rampe}} - \underbrace{\frac{1}{\tau s^2} e^{-\tau s}}_{\text{Rampe m. tidsforsinkelse}} \quad (1.1)$$

som gir

$$h_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau} & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases} \quad (1.2)$$

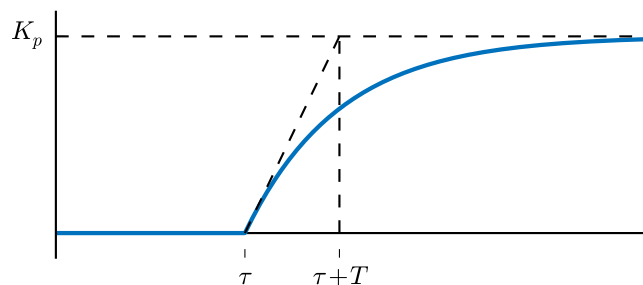


Systemet er marginalt stabilt siden $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$.

Oppgave 2 (36%)

a) (6%)

Verdiene leses av den høyre delfiguren i eksamensoppgaven som vist i figuren under:



Som gir $K_{p1} = 0.8$, $\tau = 20$, $T = 1$.

b) (6%)

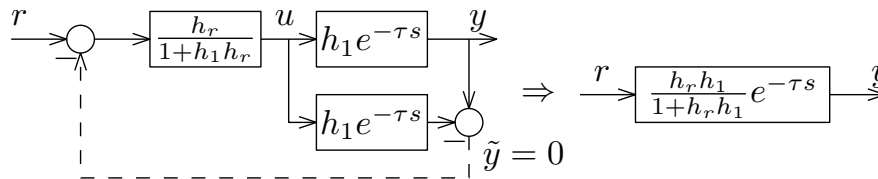
Den ytterste sirkelen skjærer y-aksen i omtrent K_{p1} . For å flytte den ut til -1 får vi altså $K_{p,krit} \approx 1$, og

$$\Delta K = 20 \log_{10} \left(\frac{K_{p,krit}}{K_{p1}} \right) \approx 1.94 \text{dB} \quad (2.1)$$

c) (2%)

For $T = 0$ får vi $h_0 = K_p e^{-\tau s}$, som er en sirkel med radius K_p .

d) (9%)



Tilbakekoblingen med h_r og h_1 forenkles etter kjente regler (Boka kap. 4.5.2). I blokkdiagrammet til venstre finner vi $\tilde{y} = 0$, og tilbakekoblinga er eliminert. Det nye blokkdiagrammet blir som til høyre i figuren, og følgefórhóldet $M(s)$ leses rett ut som

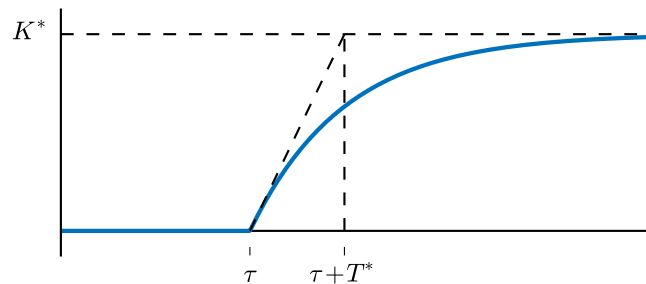
$$M(s) = \frac{h_r h_1}{1 + h_r h_1} e^{-\tau s} = \frac{\frac{K_p}{1+Ts}}{1 + \frac{K_p}{1+Ts}} e^{-\tau s} = \frac{\frac{K_p}{1+K_p}}{1 + \frac{T}{1+K_p} s} e^{-\tau s} \quad (2.2)$$

Hvor den nye forsterkningen og tidskonstanten kan leses ut som

$$K^* = \frac{K_p}{1 + K_p} \quad (2.3)$$

$$T^* = \frac{T}{1 + K_p}. \quad (2.4)$$

Sprangresponsen blir som i figuren under.



e) (5%)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 1 - K^* = 1 - \frac{K_p}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (2.5)$$

For å eliminere stasjonæravviket kan man innføre integralvirkning i regulatoren.

f) (4%)

Uten Otto-Smith-regulatoren er h_0 tilbake på formen

$$h_0(s) = h_r(s) \frac{1}{1 + Ts} e^{-\tau s} \quad (2.6)$$

som er tilsvarende formen SIMC krever. Med (V.20) i formelsamlinga setter vi inn $K = 1$, $\tau = \tau$ og $T_1 = T$, og

$$K_p = \frac{T}{2\tau} \quad T_i = \min(T, 8\tau) = T \quad (2.7)$$

hvor den endelige verdien for T_i er bestemt ved å vite at $\tau \gg T$ fra oppgaveteksten.

g) (3%)

Med $\tau \gg T$ er tidsforsinkelsen den dominerende faktoren i prosessen, og man bør derfor bruke Otto-Smith. Men selv med en liten τ vil Otto-Smith-regulatoren være overlegen, fordi den flytter $e^{-\tau s}$ ut av den lukkede sløyfa.

Oppgave 3 (37%)

a) (5%)

Velger $x_1 = i_a$, $x_2 = \omega$, $x_3 = y$. Blokkdiagrammet gir

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L_a}(-R_a x_1 - K_v x_2 + u) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(K_T x_1 - B x_2) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 \quad (3.3)$$

som igjen gir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_v}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (3.5)$$

I denne oppgaven var det misforståelser om man skulle sette $B = 0$ eller ikke, og det ble gitt full uttelling dersom gjorde dette.

b) (5%)

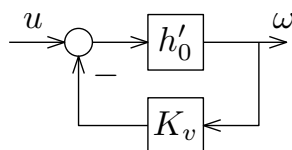
1. [rad/s]
2. [Vs/rad]
3. [Nm]
4. [Kg· m²]
5. [Nm/A]

c) (3%)

I likevekt har vi $u = e_a = K_v \omega$ som gir $\omega_0 = u_0 / K_v$.

d) (5%)

Først forenkler vi den indre blokka. Den første delen blir en 1. ordens-blokk, og den andre blir en ren integrator med forsterkning:



Som gir

$$h'_0(s) = \frac{1/R_a}{1 + T_a s} \cdot \frac{K_T}{Js} = \frac{K_\omega}{s(1 + T_a s)} \quad K_\omega = \frac{K_T}{R_a J} \quad (3.6)$$

Videre kan vi finne transferfunksjonen fra u til ω som

$$h_u(s) = \frac{h'_0}{1 + h'_0 K_v} = \frac{t'_0}{n'_0 + t'_0 K_v} = \frac{K_\omega}{s(1 + T_a s) + K_\omega K_v} = \frac{1/K_v}{1 + (K_\omega K_v)^{-1} s + T_a (K_\omega K_v)^{-1} s^2} \quad (3.7)$$

Hvor t'_0 og n'_0 er teller og nevner i h'_0 . Ved å sammenligne neveren i (3.7) med (3.1) i eksamensoppgaven får vi

$$T_a + T_m = \frac{1}{K_\omega K_v} \quad (3.8)$$

$$T_a T_m = \frac{T_a}{K_\omega K_v} \quad (3.9)$$

Hvor (3.9) gir $T_m = (K_\omega K_v)^{-1}$. I (3.8) gjør vi den andre forenklingen for å få transferfunksjonen i (3.1) i eksamenssettet, nemlig $T_m \gg T_a$ slik at $T_m + T_a \approx T_m$. Konstantene K og T_m blir

$$K = \frac{1}{K_v} \quad T_m = \frac{1}{K_\omega K_v} = \frac{R_a J}{K_T K_v} \quad (3.10)$$

e) (5%)

Dette er en begrenset PID-regulator. Denne oppnår to ting:

1. Integratorleddet fjerner stasjonært avvik ved sprang i v .
2. Med en PI-regulator ville vi fått en dobbeltintegrator i h_0 , så derivatvirkningen gir et nødvendig faseløft for at systemet ikke skal bli ustabil.

f) (6%)

Siden $T_i = T_m$ forsvinner $1 + T_i s$ fra telleren og $1 + T_m s$ fra nevneren, og transferfunksjonen $h_y(s) = \frac{1}{s} h_u h_r$ blir nå gitt ved

$$h_y(s) = \frac{K K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + T_d s}{s^2 (1 + \alpha T_d s) (1 + T_a s)} \quad (3.11)$$

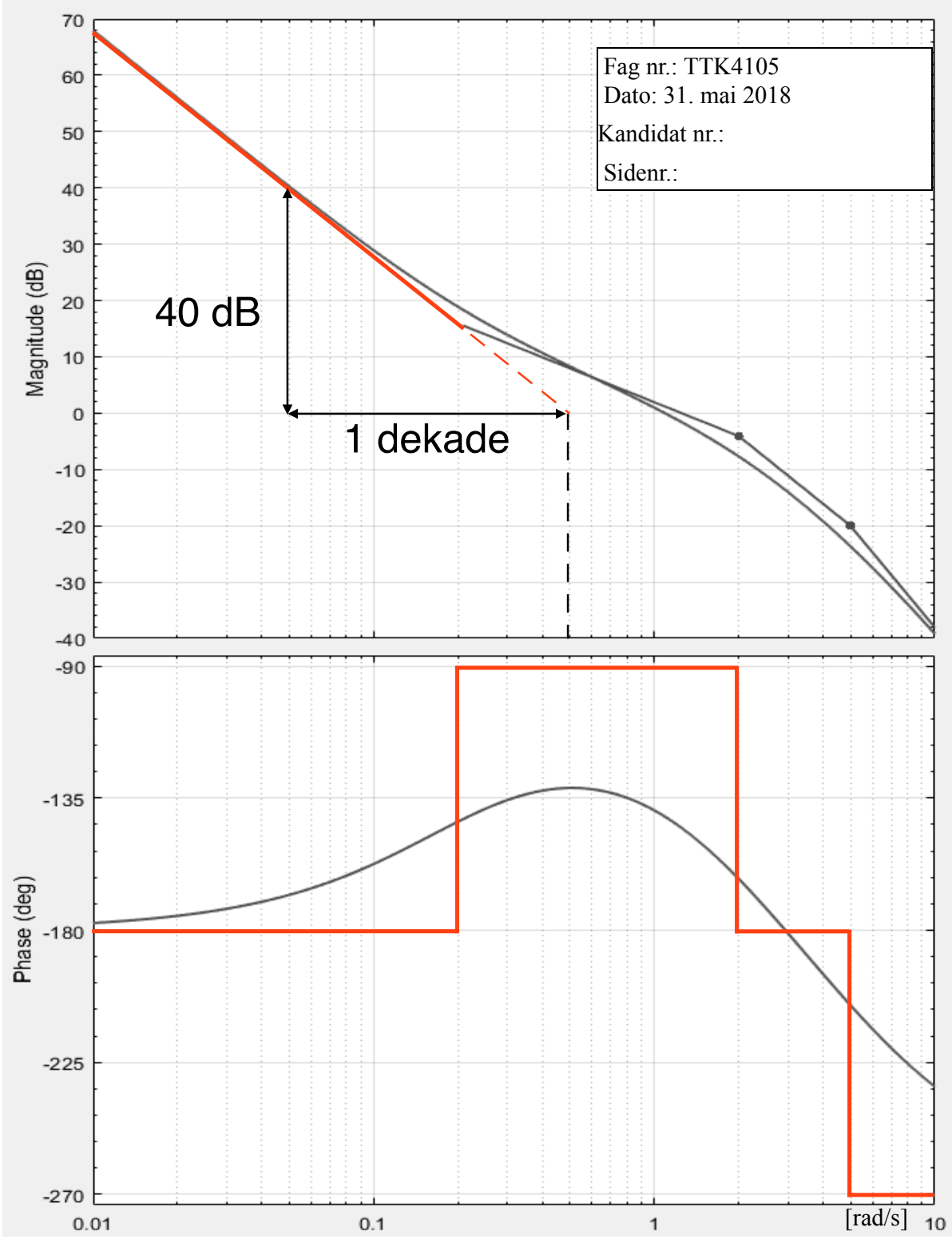
som gir amplitudeforløp og asymptotisk kryssfrekvens

$$|h_y| = \frac{K K_p}{T_i \omega^2} \text{ for } \omega < \frac{1}{T_D} \quad (3.12)$$

$$\omega_{c,as} = \sqrt{\frac{K K_p}{T_i}} = 0.5 \quad (3.13)$$

Med to integratorer faller asymptoten med 40 dB per dekad. De to integratorene gjør også at fasen starter i -180, og knekker opp ved $T_d^{-1} = 0.2$, ned ved $(\alpha T_d)^{-1} = 2$ og ned igjen ved $T_a^{-1} = 5$. Bodediagram med asymptoter er vist på neste side.

Fag nr.: TTK4105
Dato: 31. mai 2018
Kandidat nr.:
Sidenr.:



g) (4%)

Fasen er størst ved $\omega = 0.5$. Her er amplituden omtrent 8 dB, dermed må K_p reduseres med det. Den nye K_p er gitt ved

$$K_{p,ny} = 50/(10^{8/20}) \approx 20 \quad (3.14)$$

h) (4%)

Holdeelementet med samplingstid T_s gir en tidsforsinkelse på $\tau = T_s/2$, som gir en reduksjon i fasemargin på $\Delta\psi = \tau\omega/2$. Ved den nye kryssfrekvensen finnes T_s som

$$T_s \leq \frac{2\Delta\psi}{\omega_c} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi/180}{0.5} \approx 0.14s \quad (3.15)$$

Oppgave 4 (13%)

a) (4%)

- $T_2 \gg T_1$: Foroverkoblingen blir mer nyttig, siden den virker inn før tidsforsinkelsen.
- K_2 har ingen betydning for foroverkoblingen, da den inngår i transferfunksjonen etter forstyrrelsen.

b) (4%)

Den ideelle foroverkoblinga er gitt ved

$$\left(\frac{K_1}{1 + T_1 s} h_{fi} + 1 \right) v = 0 \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow h_{fi} = -\frac{1 + T_1 s}{K_1} \quad (4.2)$$

slik at den foreslåtte foroverkoblinga er h_{fi} med begrenset derivatvirkning.

c) (3%)

Den statiske foroverkoblinga er gitt ved $h_f(s=0)$, som blir $-K_1^{-1}$. Den motvirker konstante forstyrrelser.

d) (2%)

Ingenting.

Oppgave 5 (8%)

a) (4%)

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ eller } x_2 = \frac{a_1}{c_1} \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ eller } x_1 = \frac{a_2}{c_2} \quad (5.2)$$

Likevektspunktene er $(0,0)$ og $(x_{10}, x_{20}) = (a_2/c_2, a_1/c_1)$.

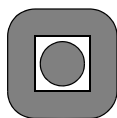
b) (4%)

I denne oppgaven vil det være tilstrekkelig å analysere likevektspunktet (x_{10}, x_{20}) . Linearisering gir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - c_1 x_{20} & -c_1 x_{10} \\ c_2 x_{20} & -a_2 + c_2 x_{10} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

For likevektspunktet gitt over får vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1 a_2}{c_2} \\ \frac{c_2 a_1}{c_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil 9189 7045
Det blir to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 Regulerings-teknikk

9. august 2018

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må kort forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det anbefales sterkt å bruke blyant og viskelær.

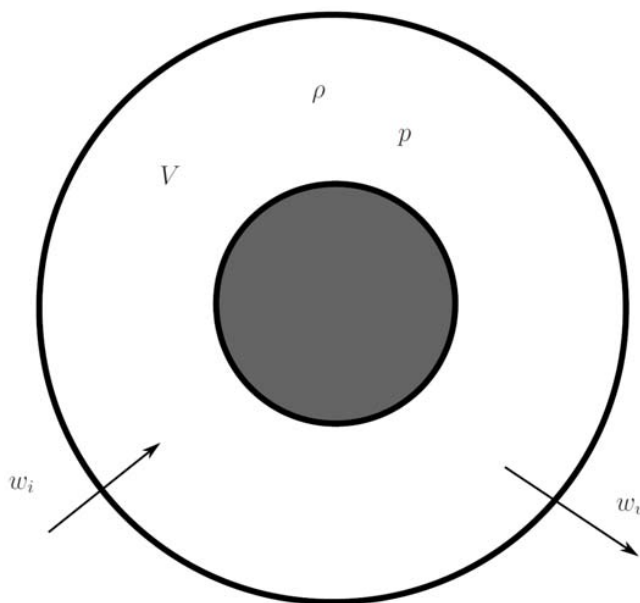
Oppgave 1 (33 %)

Et bildekk har et automatisk system for tilførsel av trykkluft, også når det roterer (tro det eller ei, men slike systemer finnes faktisk!)

Dekket har volum $V [m^3]$ som antas konstant. Trykket p i dekket har enhet $[Pascal] = [Pa] = [N/m^2] = [kg/(ms^2)]$.

$\rho [kg/m^3]$ er massetetthet for luft,

w_i og $w_u [kg/s]$ er henholdsvis massestrøm av tilført luft inn, og lekkasje ut av dekket.



a) (5 %) Du skal nå benytte massebalanse og sammenhengene

$$w_i = k(p_i - p) \quad (\text{I}) \quad \text{og} \quad \dot{p} = \dot{p}/c^2 \quad (\text{II}) \quad \text{for å finne ligning (1.1) nedenfor.}$$

p_i er trykket fra trykkluftkilden, k er en konstant, og c er lydens hastighet.

Vis at

$$\dot{p} = -\frac{c^2 k}{V} p + \frac{c^2 k}{V} p_i - \frac{c^2}{V} w_u \quad (1.1)$$

b) (3 %) Hvilken orden har differensialligninga (1.1)? Hvorfor er den lineær?
Hvilke størrelser er henholdsvis tilstand og forstyrrelse?

- c) (3 %) Finn et uttrykk for systemets tidskonstant T og vis at denne får benevnning sekund [s].
- d) (5 %) Sett $u = p_i$ og foreløpig ingen lekkasje, $w_u = 0$, slik at (1.1) blir

$$\dot{p} = -\frac{c^2k}{V}p + \frac{c^2k}{V}u \quad (1.2)$$

Regulatoren for trykket er $u = K_p e$ der avviket $e = p_{\text{ref}} - p$, og p_{ref} er en konstant referanse (ønsket trykk i dekket).

Denne regulatoren gir et stasjonært avvik $e_s = e(t \rightarrow \infty) \neq 0$. Finn et uttrykk for e_s .

- e) (5 %) Vi skal nå i stedet bruke en PI-regulator (se formelsamling!). Tegn blokkdiagram for reguleringsystemet med p_{ref} som inngang og p som utgang.
- f) (4 %) Følgende ligning **for avviket e** gjelder med PI-regulator. Vis at den er:

$$\ddot{e} + \frac{c^2k}{V}(1 + K_p)\dot{e} + \frac{c^2kK_p}{VT_i}e = 0 \quad (1.3)$$

(Tips: Siden p_{ref} er konstant får vi $\dot{e} = -\dot{p}$ og $\ddot{e} = -\ddot{p}$. Benytt også at u er en funksjon av e i reguleringsystemet, og derfor kan elimineres.)

- g) (4%) Vis ved hjelp av (1.3) at nå blir det stasjonære avviket $e_s = 0$.
- h) (4 %) Anta nå at vi har en konstant lekkasje $w_u > 0$. PI-regulatoren vil også da eliminere stasjonært avvik. Forklar! (kan gjøres kort og verbalt, eller ved regning).

Oppg 2 (17%)

Gitt systemet $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^3 + x_2 \quad (2.1)$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u \quad (2.2)$$

- a) (2 %) Systemet er nesten lineært. Hva er det som gjør det ulineært?
- b) (4 %) Anta i dette og neste punkt at $u(t) = 0$. Du skal finne en linearisert modell $\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x}$

i et vilkårlig arbeidspunkt $\underline{x}^p = \begin{bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{bmatrix}$, der $\Delta\underline{x}$ representerer små variasjoner rundt \underline{x}^p slik

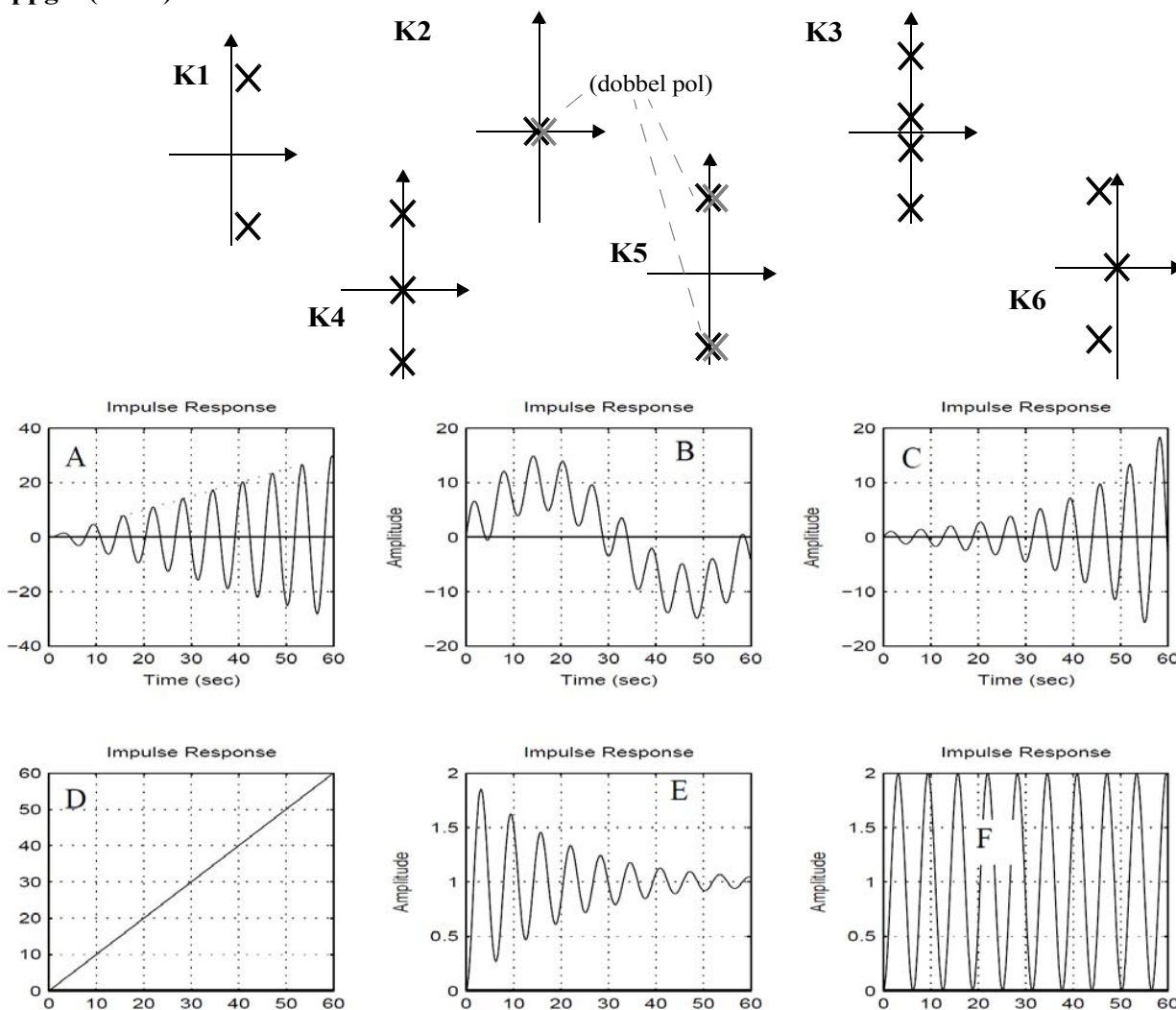
at $\underline{x} = \underline{x}^p + \Delta\underline{x}$. Vis at $A = \begin{bmatrix} 2 - 3(x_1^p)^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

- c) (7 %) Finn egenverdiene til A som funksjon av x_1^p , og kommentér systemets stabilitet nær origo (da er $x_1^p = 0$), og for store verdier av $|x_1^p|$.

d) (4 %) Anta nå begge starttilstander = 0. Systemet eksiteres av et lite, kortvarig pådrag $u(t)$. Det går en stund ($t \gg 0$). Du skal med bakgrunn i resultatene fra b) og c), velge mellom ett av tre alternativer, og begrunne ditt valg verbalt:

1. Systemet vil komme til ro igjen i origo.
2. $|x_1|$ og $|x_2|$ vil gå mot ∞ .
3. Systemet vil ikke komme til ro igjen i origo, men $|x_1|$ og $|x_2|$ vil heller ikke gå mot ∞ .

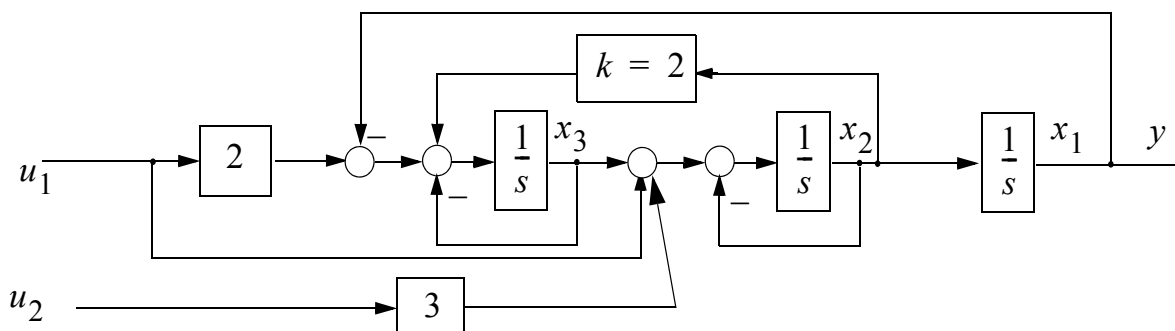
Oppg 3 (11 %)



figur 3.1

- a) (6%) I seks spørsmål (hvert teller 1 %) skal du koble rett pol-konfigurasjon for en transferfunksjon øverst, til en motsvarende **impuls**respons nedenfor, se figur 3.1. Ikke begrunn dine valg. Det opplyses at ingen av transferfunksjonene har noen nullpunkter. NB: Merk deg hvor origo ligger i impulsrespons-grafene ovenfor, før du velger.
- b) (3%) Den absolutte dempning α , på basis av responsen E i figur 3.1 ovenfor, er (velg alternativ): A: 0.005 B: 0.01 C: 0.02 D: 0.05 E: 0.1 F: 0.2 (Tips: Ta omtrentlige mål med linjal)
- c) (2 %) Anta at du ikke hadde gitt tidsresponsene ovenfor, men i stedet deres Laplacetransformer. Hvilke(n) av dem kunne du ha brukt sluttverditteoremet på? Begrunn svaret kort.

Oppg 4 (14 %) (I deloppgavene (a) - (c) her skal du gi ubegrunnet svar, bare ved å angi rett bokstav:)



figur 4.1

a) (4 %) En tilstandsrommodell for systemet i figur 4.1, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, blir

alt.:	matrisene \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}	alt.:	matrisene \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}
A	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0 \ 0 \ 1]$	D	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $[1 \ 0 \ 0]$
B	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $[1 \ 0 \ 0]$	E	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $[1 \ 0 \ 0]$
C	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $[1 \ 1 \ 1]$	F	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) (2 %) Hva blir dimensjonen på transfermatrisa $\mathbf{H}(s)$ til systemet i figur 4.1?

A: 2×2 B: 3×3 C: 3×1 D: 1×2 E: 1×3 F: 2×1

c) (4 %) Sett nå $k = 0$ i figur 4.1. Transferfunksjonen fra u_1 til y blir

A	$\frac{s+1}{s^3+2s^2+s}$	C	$\frac{s+1}{s^3+2s^2+1}$	E	$\frac{s+3}{s^3+3s^2+s}$
B	$\frac{s+1}{s^3+3s^2+1}$	D	$\frac{s+3}{s^3+2s^2+s+1}$	F	$\frac{s+1}{s^3+3s^2+s+1}$

d) (4 %) Er den valgte transferfunksjon stabil? Sjekk stabiliteten *algebraisk* ved hjelp av en regel gitt i formelsamlinga, og forklar resultatet!

Oppgave 5 (25 %) (diverse)

- a) (4 %) Når er foroverkopling mulig? Hvilken betydning har den for reguleringsystemets stabilitet?
- b) (3 %) Eksperimentell innstilling av reguleringsystemer:
Nevn en fordel ved SIMC-metoden, sammenligna med Ziegler-Nichols' metode.
- c) (4 %) Hvilken ulempe har en PI-regulator i forhold til en P-regulator? Hvilken fordel har en PD-regulator i forhold til en P-regulator?
- d) (5 %) Gitt en approksimasjon til en transferfunksjon $h_x(s)$,

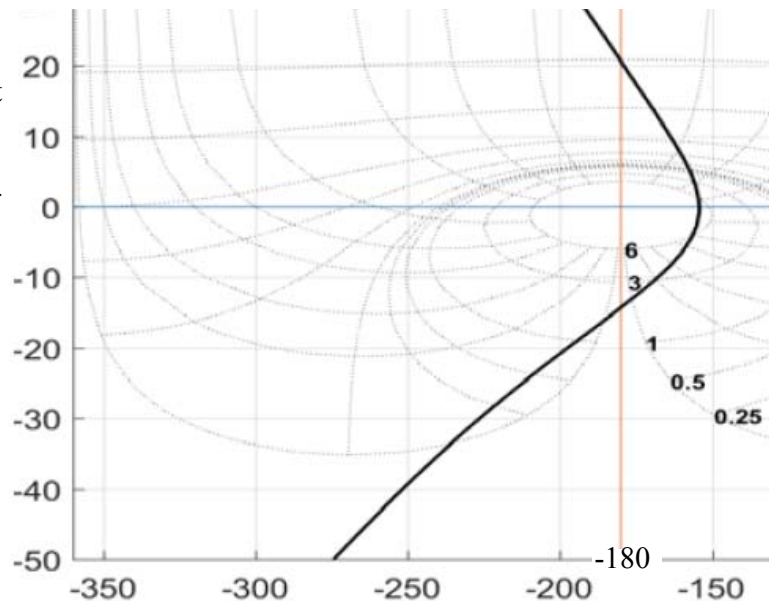
$$h_x(s) \approx \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2n}s\right)^n}{\left(1 + \frac{\tau}{2n}s\right)^n} \quad (5.1)$$

Hva er den eksakte $h_x(s)$? Vis at approksimasjonen faktisk er *eksakt* når det gjelder tallverdi, $|h_x(j\omega)|$.

Betrakt nå den virkelige $h_x(s)$. Forklar hvorfor tallverdien av denne er rimelig, ut fra et enkelt resonnement i tidsplanet.

- e) (5 %) Grafen til høyre viser Nichols-diagrammet for $h_0(s)$ i et betinget stabilt reguleringsystem med regulatorforsterkning $K_p = 1$. Hvorfor kaller vi det *betinget stabilt*?

Bruk figuren til å finne det området for forsterkninga K_p hvor reguleringsystemet er stabilt! Svaret skal ikke gis i dB, men i absoluttverdi. Tegn i figuren og lever den sammen med besvarelsen.



- f) (4%) Nichols-diagrammet viser det beste som vår ingeniør har greidd å få til ved å finstille på K_p i en valgt regulator. Men kollegaen sier at dette ikke er bra nok, og at problemet ikke kan løses ved å endre på K_p . Forklar kort kollegaens to innvendinger!

Fag nr.: TTK4105
Dato: 090818
Kandidat nr.:
Sidenr.:

Eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

Løsningsforslag

torsdag 9. august 2018

Oppgave 1 (33%)

a) (5%)

Massebalanse: endring i massen $m = \rho V$ er lik massestrøm inn minus massestrøm ut.

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = w_i - w_u \quad (1.1)$$

Antar konstant volum, siden bildekket ikke endrer størrelse. Sammen med **(I)** og **(II)** i oppgaveteksten gir det

$$\dot{\rho} = \frac{1}{V}(w_i - w_u) = \frac{1}{V}(k(p_i - p) - w_u) \quad (1.2)$$

$$\dot{p} = \frac{c^2}{V}(k(p_i - p) - w_u) = -\frac{c^2 k}{V}p + \frac{c^2 k}{V}p_i - \frac{c^2}{V}w_u \quad (1.3)$$

b) (3%)

- Det er en første ordens differensialligning.
- Den er lineær fordi den kan skrives på formen

$$\dot{x} = ax + bu + ev \quad (1.4)$$

hvor x er tilstand, u er pådrag og v er forstyrrelsen, og a , b og e er konstanter.

- Tilstand p , forstyrrelse w_i .

c) (3%)

Tidskonstanten T er gitt ved $T = a^{-1}$ i (1.4), og sammenligning med (1.3) gir

$$T = \frac{V}{c^2 k} \quad (1.5)$$

Den har benevning

$$\frac{V}{c^2 k} \left[\frac{\text{m}^3}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{m s}} \right] = T \left[\frac{\text{s}^2 \text{m}^3}{\text{s m}^3} \right] = T [\text{s}] \quad (1.6)$$

hvor enheten til k er funnet som

$$\frac{w_i}{p - p_i} \left[\frac{\text{kg s}^{-1}}{\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}} \right] = k [\text{m s}] \quad (1.7)$$

d) (5%)

$$\dot{p} = -\frac{1}{T}p + \frac{1}{T}u = \frac{1}{T}p + \frac{K_p}{T}(p_{\text{ref}} - p) \quad (1.8)$$

$$= -\left(\frac{1}{T} + \frac{K_p}{T}\right)p + \frac{K_p}{T}p_{\text{ref}} \quad (1.9)$$

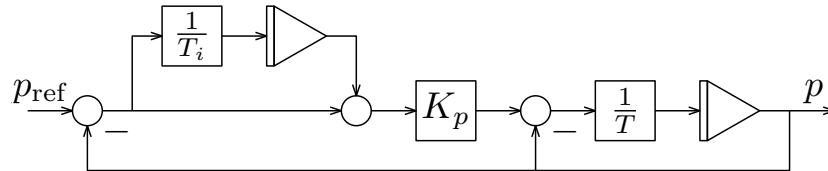
For å finne stasjonærverdi for p settes $\dot{p} = 0$, som gir

$$p = \frac{K_p}{1 + K_p}p_{\text{ref}} \quad (1.10)$$

og stasjonærfeil

$$e_s = p_{\text{ref}} - p = \frac{1}{1 + K_p}p_{\text{ref}} \quad (1.11)$$

e) (5%)



f) (4%)

$$\dot{p} = -\frac{1}{T}p + \frac{1}{T}u = -\frac{1}{T}\left(p - K_p e - \frac{K_p}{T_i} \int e(\tau) d\tau\right) \quad (1.12)$$

$$\ddot{p} = -\frac{1}{T}\left(\dot{p} - K_p \dot{e} - \frac{K_p}{T_i} e\right) \quad (1.13)$$

$$-\ddot{e} = -\frac{1}{T}\left(-\dot{e} - K_p \dot{e} - \frac{K_p}{T_i} e\right) \quad (1.14)$$

$$\ddot{e} + \frac{1}{T}(1 + K_p)\dot{e} + \frac{K_p}{TT_i}e = 0 \quad (1.15)$$

g) (4%)

Stasjonært: $\ddot{e} = \dot{e} = 0$, som gir

$$\frac{K_p}{TT_i}e_s = 0 \Rightarrow e_s = 0 \quad (1.16)$$

h) (4%)

Forstyrrelsen angriper etter integratoren (se kap. 9.4), og dermed blir det null stasjonært avvik.

Oppgave 2 (17%)

a) (2%)

Leddet x_i^3 er ulinært.

b) (4%)

Bruker (V.19) fra formelsamlingen:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3(x_1^p)^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

c) (7%)

Bruker (V.5) fra formelsamlingen:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 - 3(x_1^p)^2 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (2.2)$$

som gir

$$\lambda^2 - (2 - 3(x_1^p)^2)\lambda + 1 = 0 \quad (2.3)$$

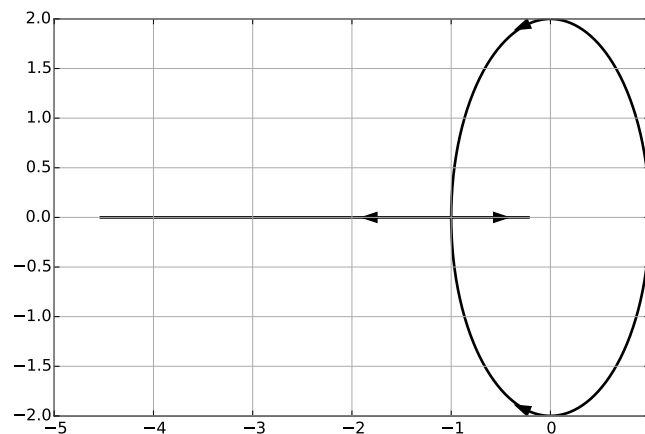
og

$$\lambda = \frac{-(3(x_1^p)^2 - 2) \pm \sqrt{(3(x_1^p)^2 - 2)^2 - 4}}{2} = \frac{2 - 3(x_1^p)^2 \pm \sqrt{9(x_1^p)^4 - 12(x_1^p)^2}}{2}. \quad (2.4)$$

Systemet har forskjellig oppførsel basert på verdien av x_1^p :

1. For $x_1^p = 0$ er det en dobbeltpol i $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
2. For $|x_1^p| \in (0, \sqrt{2/3})$ blir egenverdiene komplekskonjugerte med positiv realdel.
3. For $|x_1^p| = \sqrt{2/3}$ ligger polene på imaginæraksen.
4. For $|x_1^p| \in (0, \sqrt{4/3})$ blir egenverdiene komplekskonjugerte med negativ realdel.
5. For $|x_1^p| \geq \sqrt{4/3}$ ligger polene på realaksen, med negativ verdi.

For å få full uttelling på oppgaven er det tilstrekkelig å vise punkt 1 og 5 over. Rotkurven er vist under.

**d) (4%)**Siden systemet er ustabil for lave $|x_1^p|$ og stabil for høye $|x_1^p|$ vil alternativ 3 være korrekt.

Oppgave 3 (11%)

a) (6%)

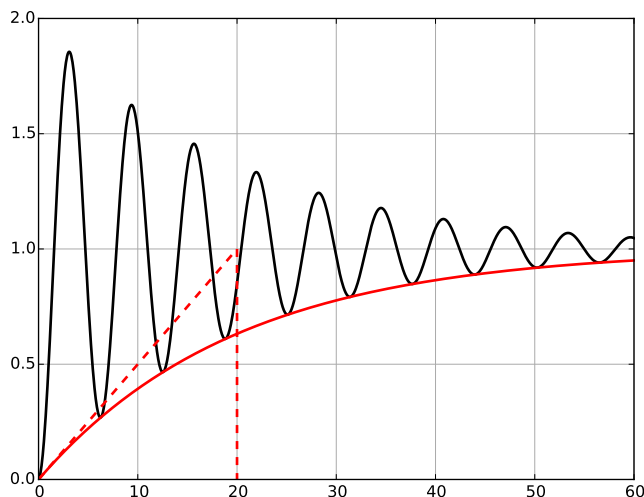
A	K5	D	K2
B	K3	E	K6
C	K1	F	K4

Forklaring:

- Rampen i D svarer til en dobbeltintegrator, altså dobbelpolen i origo i K2.
- Det asymptotisk stabile systemet K6 svarer til den eneste asymptotisk stabile responsen E.
- K4 er marginalt stabilt, som gir de stående svingningene i F.
- K3 er også marginalt stabilt, og siden det har to sett med komplekskonjugerte egenverdier forventer vi å se to forskjellige frekvenser i svingningene, som i B.
- C stiger eksponentielt, mens A stiger som en rampe. Dermed hører dobbelpolen i K5 til A, og K1 hører til C.

b) (3%)

Finntangenten til faktoren $e^{-\alpha t}$ som vist under, og les av tidskonstanten. Vi har $\alpha = T^{-1} = 0.05$, altså alternativ D.



c) (2%)

Sluttverditheoremet fungerer kun på systemer som vi vet svinger seg inn til en stasjonærverdi, så kun K6/E-paret.

Oppgave 4 (14%)

a) (4%)

For å finne svaret, sjekk følgende:

- Utgangen $y = x_1$ gir $c = [1, 0, 0]$.
- Siden $\dot{x}_1 = x_2$ må første rad i \mathbf{A} være $[0, 1, 0]$.
- Det er tre tilstander og to utganger, så \mathbf{B} må være en 3×2 -matrise.

Dette gir alternativ D.

b) (2%)

Siden y er skalar, og \mathbf{u} har to dimensjoner blir \mathbf{H} en 1×2 -matrise, altså D.

c) (4%)

$$y = \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} \left(u_1 + \frac{1}{s+1} (2u_1 - y) \right) \quad (4.1)$$

$$\left(s(s+1) + \frac{1}{s+1} \right) y = \left(1 + \frac{2}{s+1} \right) u_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{y}{u_1} = \frac{s+3}{s^3 + 2s^2 + s + 1} \quad (4.3)$$

altså alt. D.

d) (4%)

Den er stabil. Ved bruk av (V.19) ser vi at alle koeffisientene er positive, og at $a_1 a_2 = 2 > a_0 a_3 = 1$.

Oppgave 5 (25%)

a) (4%)

Når forstyrrelsen er målbar. Den påvirker ikke stabiliteten til systemet.

b) (3%)

Det er ikke nødvendig å bringe systemet til stabilitetsgrensen, som kan gi unødvendig slitasje og belastning i systemet.

c) (4%)

PI-regulator gir dårligere fase, spesielt ved lave frekvenser. Da må forsterkningen senkes. Med en PD-regulator får man et faseløft, og kan øke forsterkningen.

d) (5%)

Den eksakte $h_x(s) = e^{-\tau s}$. Amplituden av approksimasjonen er gitt ved

$$\left| \frac{(1 - \frac{\tau}{2n} s)^n}{(1 + \frac{\tau}{2n} s)^n} \right| = \left(\frac{|(1 - \frac{\tau}{2n} s)|}{|(1 + \frac{\tau}{2n} s)|} \right)^n = 1^n = 1 \quad (5.1)$$

Som er det samme som $|e^{-\tau s}| = 1$ for $s = j\omega$. Dette er en rimelig tallverdi, siden forsinkelsen kun er en forskyving av responsen i tidsplanet.

e) (5%)

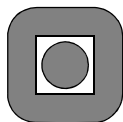
Det er betinget stabilt fordi systemet vil bli ustabil både ved økning og reduksjon av K_p . Grensene finnes som

$$K_{p,\max} \approx 10^{13/20} = 4.47 \quad (5.2)$$

$$K_{p,\min} \approx 10^{-20/20} = 0.1 \quad (5.3)$$

f) (4%)

Fasemarginen er for lav. Men ved å endre K_p vil Nichols-diagrammet kun flyttes opp og ned. Siden K_p allerede er stilt inn slik at fasemarginen er maksimal, vil problemet bare bli større av å endre K_p .



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Det blir to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 Regulerings-teknikk

13. mai 2019

Tid: 0900 - 1300

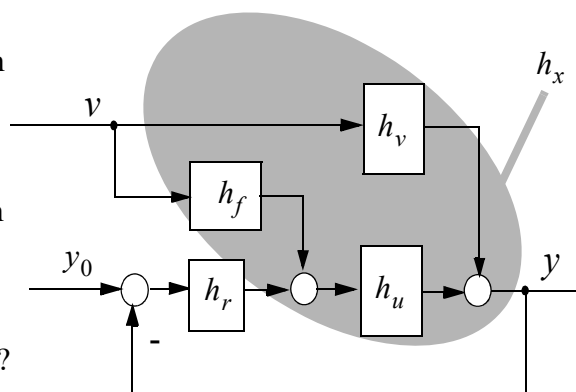
Sensur vil foreligge innen tre uker.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren. Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må kort forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det anbefales sterkt å bruke blyant og viskelær.

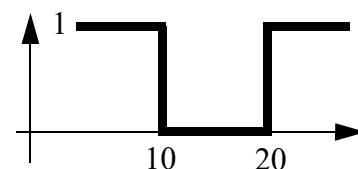
Oppg 1 (8 %)

- a) (2 %) Hvilken betydning har tilbakekoblingsløsninga du velger for hvordan du utformer foroverkobling fra en forstyrrelse?
- b) (3 %) $h_x(s)$ i figuren til høyre er transferfunksjonen fra v til y når vi ser bort fra tilbakekoblingen. Finn transferfunksjonen $h_x(s)$.
- c) (3 %) Hva blir $h_x(s)$ hvis foroverkoblinga er ideell?



Oppg 2 (10 %)

- a) (6 %) Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et båndstopppfilter (se prinsippskisse av ideell $|h(j\omega)|$ til høyre) med knekkfrekvenser 10 og 20 [rad/s] ved å benytte to 2. ordens Butterworthfilter. (Du trenger ikke sette alt på felles brøkstrek, men kan uttrykke $h(s)$ ved hjelp av to ledd.)

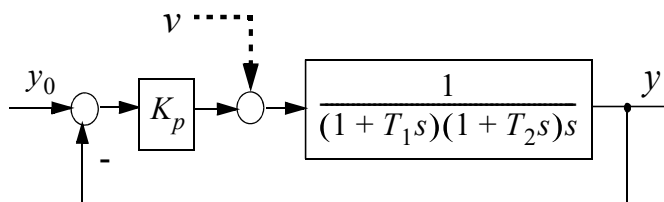


- b) (4 %) Hvor bratt faller/stiger asymptotene (i dB/dekade) for amplitudedeforløpet til $h(s)$ i de to overgangsområdene (altså rundt 10 og 20 [rad/s])? Det holder med kort begrunnet verbalt svar, utregning trengs ikke.

Oppg 3 (47 %)

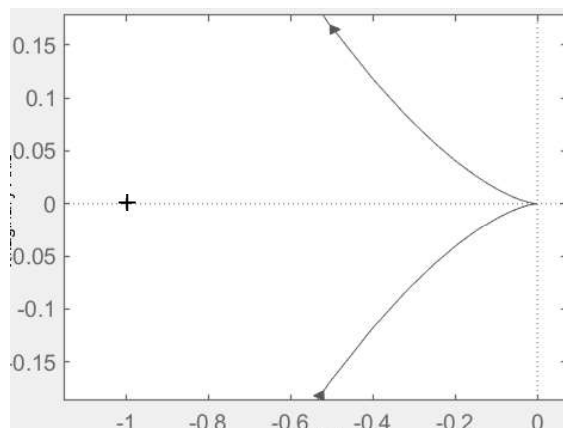
- a) (6 %) Se et blokkdiagram fra læreboka, til høyre. Vis at reguleringsystemet er stabilt for

$$0 < K_p < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (\text{Tips: formelsamling})$$

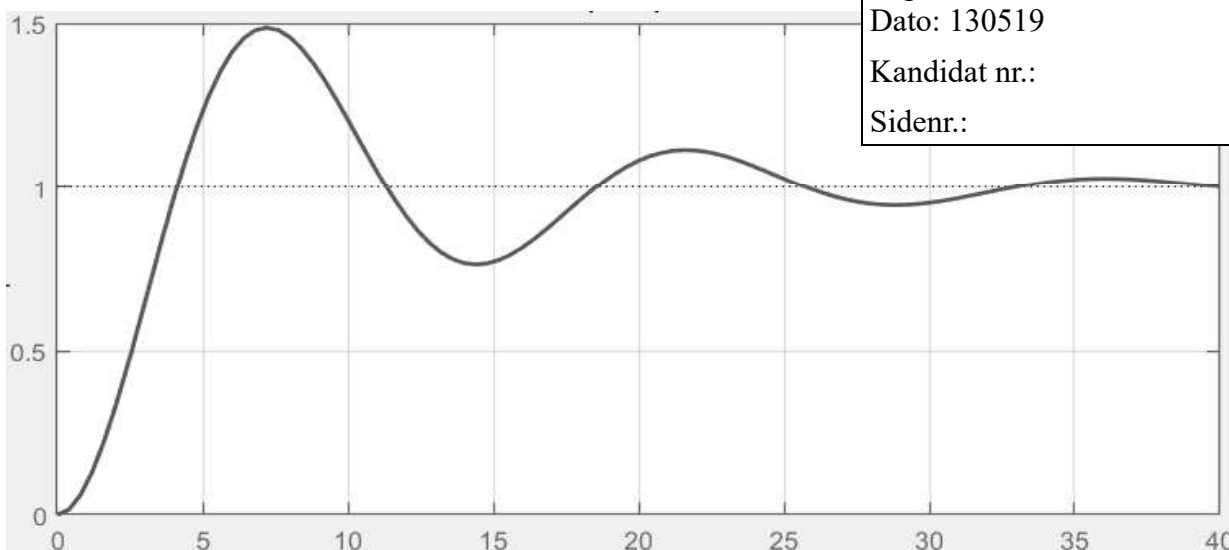


Proessen er en likestrømsmotor med vinkelstyring. Til bruk lenger nede oppgis $T_1 = 5$ og $T_2 = 1$. Vi skal også betrakte en forenklet motormodell. Vi antar da $T_2 = 0$.

- b) (3 %) Figuren til høyre viser et utsnitt av Nyquist-diagrammet med den enkleste prosessmodellen, for en viss verdi av forsterkning i proporsjonalregulatoren K_p . (Det er forskjellig skala langs aksene, uten at det betyr noe for oppgaven.) Ut fra diagrammet: Hvorfor kan reguleringsystemet aldri bli ustabilisert uansett verdi av $K_p > 0$?

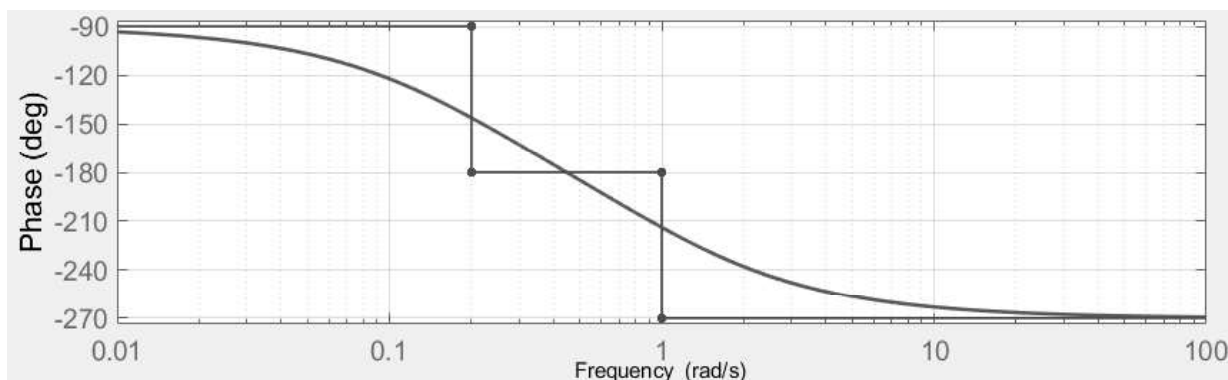


- c) (2%) Nyquist-grafen lukkes ved en uendelig stor sirkel inn i høyre halvplan som vi ikke kan tegne inn. Hva skyldes den?
- d) (6 %) Skissér *grovt og prinsipielt* inn i samme Nyquist-diagram (du skal ikke regne på dette) hvordan grafen blir for den mer realistiske modellen i figuren øverst (tegn på eget ark, eller bruk denne sida i oppgavesettet. Fyll i så fall ut her). Forklar med utgangspunkt i din skisse hvorfor man nå får ustabilitet for stor nok K_p , og finn ut hvor mange poler det da blir i høyre halvplan!
- e) (4 %) Figuren under viser enhetsprangresponsen for reguleringsystemet med den enkleste modellen fra (b) ovenfor, med $T_1 = 5$ og $K_p = 1$. Mål med linjal i figuren og finn ved hjelp av dette (omtrentlig) absolutt dempning α og udempet resonansfrekvens ω_0 .
- f) (4 %) Finn også α og ω_0 algebraisk for å kontrollere. Hva er din kommentar til denne responsen? Hva ville du eventuelt ha gjort med K_p ?



Fag nr.: TTK4105
Dato: 130519
Kandidat nr.:
Sidenr.:

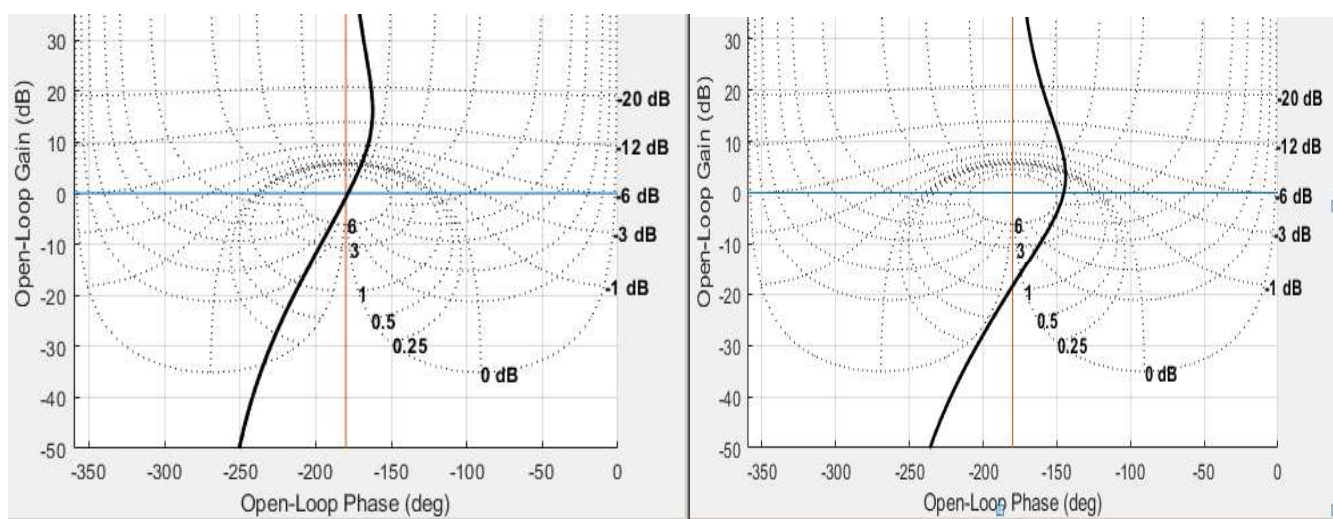
- g) (6 %) Vi bruker nå den mest realistiske modellen fra (a). Grafen rett under viser faseforløpet for den åpne sløyfes transferfunksjon $h_0(s)$ med proporsjonalregulator K_p . Du ønsker å bytte den ut med en en PI-regulator. Ved hjelp av fase-grafen og en opplysning fra (a) kan du nå finne K_p og T_i for denne regulatoren i følge Ziegler-Nichols' regler. Gjør det! (Tips: formelsamling).



- h) (6 %) Men i dette tilfellet gir Ziegler-Nichols' regler et nesten ustabil resultat. Se Nicholsdiagram til venstre under. Omtrent hvor mye (i dB) ville du endra K_p i PI-regulatorene for å forbedre situasjonen med utgangspunkt i dette diagrammet?

Men sjøl da blir ikke resultatet godt nok. Hvorfor ikke?

Hva ville du gjort i tillegg? Utfallet av noe vi kan gjøre med PI-regulatorene i tillegg, er vist i høyre Nicholsdiagram. Hva har vi gjort (kvalitativt svar)? Hvorfor er resultatet endelig akseptabelt?



- i) (3%) Men du kunne her ha brukt en annen regulator enn PI? Hva slags regulator, og hvorfor?
- j) (7 %) En konstant dreiemoment-forstyrrelse inntreffer og belaster motoren. Forstyrrelsen kan ekvivaleres med en spenning v som kommer inn slik det er indikert med stiplet linje i figuren øverst på forrige side. Vi ønsker at reguleringssystemet skal styre seg mot null avvik i referansevinkelen. Vis at en PI-regulator oppfyller dette kravet (sett $v =$ enhetssprang).

Oppg 4 (5 %)

Vis at en enhetssprang-respons alltid er integralet av impulsresponsen for samme lineære system!

(Tips: impulsresponsen til en integrator er et enhetssprang, og oppgaven kan besvares med meget enkel og rask manipulering i blokkdiagram.)

Oppg 5 (12%)

a) (6 %) Du skal realisere en diskret versjon av en begrensa PD-regulator $h_r = \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$.

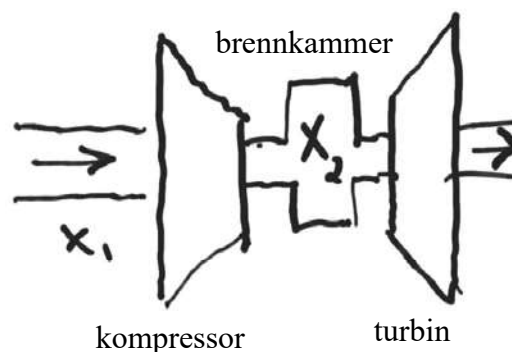
Kall tastetida T . Finn a_1 og b_1 i et rekursivt uttrykk for den diskrete regulatoren,

$$u[k] = a_1 u[k-1] + b_0 e[k] + b_1 e[k-1]. \text{ Til regnehjelp oppgis at } b_0 = \frac{1 + 2T_d/T}{1 + 2\alpha T_d/T}$$

b) (6 %) Sett $\alpha = 0.1$ og $T_d = 20$. Sløyfetransferfunksjonen $h_0 = h_r h_u$ har kryssfrekvens $\omega_c = 0.16$.
Finn den tastetiden T som gjør fasemarginen ψ for reguleringsystemet 2° dårligere (et akseptabelt tall) med diskret PD-regulator, enn om den tilsvarende regulatoren hadde vært tidskontinuerlig.

Oppg 6 (18%)

Figuren til høyre viser enkel prinsippskisse av en gassturbin. Luft suges inn av kompressoren, presses sammen til høyt trykk og strømmer til brennkammeret. Der forbrennes lufta sammen med drivstoff som injiseres. Den ekspanderende avgassen forlater brennkammeret med stor hastighet og driver turbinen, som igjen driver kompressoren. Vi skal se på en ytterst forenkla modell med bare to tilstander, og hvor alle verdier er normaliserte og benevningsløse. Men modellen kan oppvise et viktig fenomen, en form for ustabilitet (tilbakeslag av gass motsatt vei fra brennkammer gjennom kompressoren).



Modellen er:

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1) - x_2, \text{ hvor } g_1(x_1) = 0.3 + 4x_1^2 - 6x_1^3 \quad (6.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - g_2(x_2), \text{ hvor } g_2(x_2) = \gamma \sqrt{x_2} \quad (6.2)$$

x_1 er massestrøm av luft som suges inn, og x_2 er trykket i brennkammeret. Parameter γ uttrykker hvor trangt det er i gassturbinens utløp (trangere ved liten γ).

Før du går videre, en trøst: Du trenger ikke å forstå denne modellen for å løse oppgaven.

- a) (6 %) Finn matrisa \mathbf{A} i en linearisert modell som gjelder rundt et arbeidspunkt (x_1^P, x_2^P)
- b) (5 %) Vis at et mulig stasjonært arbeidspunkt med $\gamma = 0.8$, er ca. $(x_1^P = 0.564, x_2^P = 0.496)$.
- c) (7 %) Vis at det karakteristiske polynom $= |\mathbf{sI} - \mathbf{A}|$ for den lineariserte modellen rundt dette arbeidspunktet er ca. $s^2 + 1.78s + 1.69$.
Er gassturbinen stabil rundt dette arbeidspunktet? Begrunnet svar!

(Bare til opplysning, så vil gassturbinen ha et ustabilt arbeidspunkt og komme i farlige svingninger hvis utløpet blir trangt nok – altså liten γ – og trykket i brennkammeret da blir for stort. Men det er ikke tema i denne eksamen.)

Eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

Løsningsforslag

Mandag 13. mai 2019

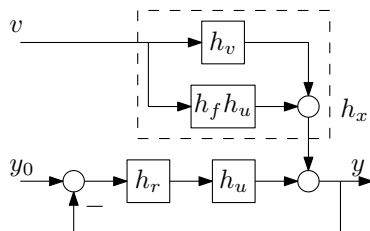
Oppgave 1 (8%)

a) (2%)

Ingen. Forover- og tilbakekobling designes uavhengig av hverandre.

b) (3%)

Ved å flytte summeringspunktet for $h_f v$ til etter blokken med h_u får vi blokkdiagrammet under:



Nå finnes h_x som

$$h_x = h_v + h_f h_u \quad (2.1)$$

som er uavhengig av h_r .

c) (3%)

Den ideelle foroverkoblinga h_{f_i} fjerner virkningen av forstyrrelsen. Altså er $h_x = 0$, som gir

$$h_{f_i} = -\frac{h_v}{h_u} \quad (2.2)$$

Oppgave 2 (10%)

a) (6%)

La $\omega_L = 10\text{rad/s}$, $\omega_H = 20\text{rad/s}$. Et båndstoppfilter realiseres som et lavpassfilter med knekkfrekvens ω_L i parallell med et høypassfilter med knekkfrekvens ω_H , altså

$$h(s) = h_L(s) + h_H(s). \quad (2.1)$$

Plassering av polene i et Butterworthfilter er beskrevet i kap. 11.3.2 i læreboka, og også i (V.17) og (V.18) i formelsamlinga. For et 2. ordens Butterworthfilter plasseres polene ved $\pm 45^\circ$. Sammenlignes denne polplasseringen med plasseringen for en 2. ordens transferfunksjon med $\zeta < 1$ (se formelsamlinga, s. 5, linje 3), får vi

$$h_L(s) = \frac{\omega_L^2}{s^2 + 2\zeta\omega_L s + \omega_L^2} = \frac{\omega_L^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_L s + \omega_L^2} \quad (2.2)$$

siden $\zeta = \sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$. Transferfunksjonen $h_L(s)$ finnes ved å designe et lavpassfilter, og erstatte s med ω_H^2/s , som gir

$$h_H(s) = \frac{\omega_H^2}{\left(\frac{\omega_H^2}{s}\right)^2 + \sqrt{2}\omega_H \frac{\omega_H^2}{s} + \omega_H^2} = \frac{\omega_H^2 s^2}{\omega_H^2 s^2 + \sqrt{2}\omega_H^3 s + \omega_H^4} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_H s + \omega_H^2} \quad (2.3)$$

b) (4%)

Siden dette er et 2. ordens filter vil asymptotene stige og synke med 40dB/dekade.

Oppgave 3 (47%)

a) (6%)

Vi ønsker å bruke (V.19) fra formelsamlinga. Transferfunksjonen til det lukkede systemet blir

$$\frac{y}{y_0}(s) = M(s) = \frac{h_0}{1 + h_0} = \frac{t_0}{t_0 + n_0} \quad (3.1)$$

hvor t_0 og n_0 er teller og nevner i h_0 . Innsatt og ganget ut gir det

$$M(s) = \frac{K}{K + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3} \quad (3.2)$$

Hvor vi ser at alle koeffisientene er positive så lenge $K > 0$, som er et krav for stabilitet i (V.19). Det andre kravet er at koeffisientene $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$, som innsatt verdiene fra dette systemet blir

$$T_1 + T_2 > K T_1 T_2 \quad \Rightarrow \quad K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (3.3)$$

b) (3%)

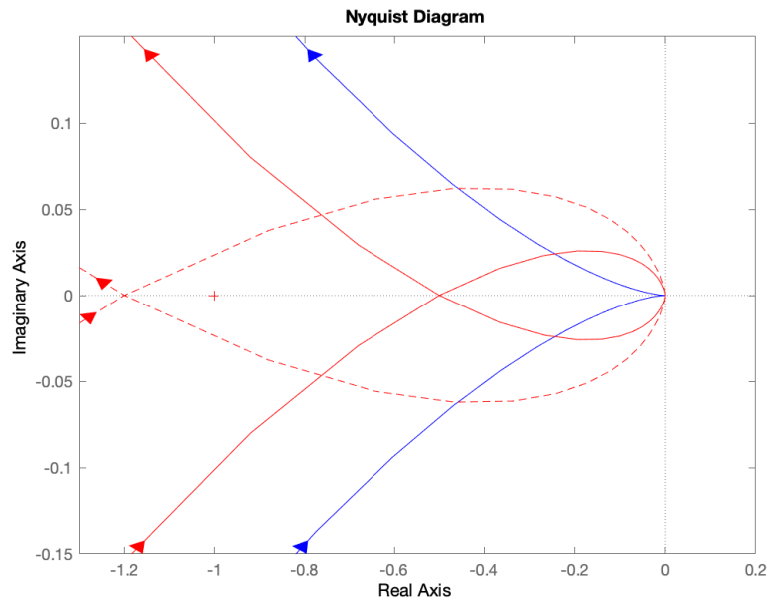
Uansett hvor mye K økes vil kurven aldri omslutte -1, da den kun krysser realaksen i origo.

c) (2%)

Den skyldes integratoren i prosessen.

d) (6%)

Nyquistdiagram er vist i figuren under. Den blå kurven tilsvarer den enkle modellen med en K valgt i det stabile området, som vist i figuren i oppgaven. De røde linjene er Nyquistdiagrammer for den mer realistiske modellen. Den heltrukne linja er for K valgt i det stabile området, og den stiplede linja er for en K i det ustabile området. I dette området omslutter kurven -1, og man får to rotasjoner med klokka, som gir to poler i høyre halvplan.



e) (4%)

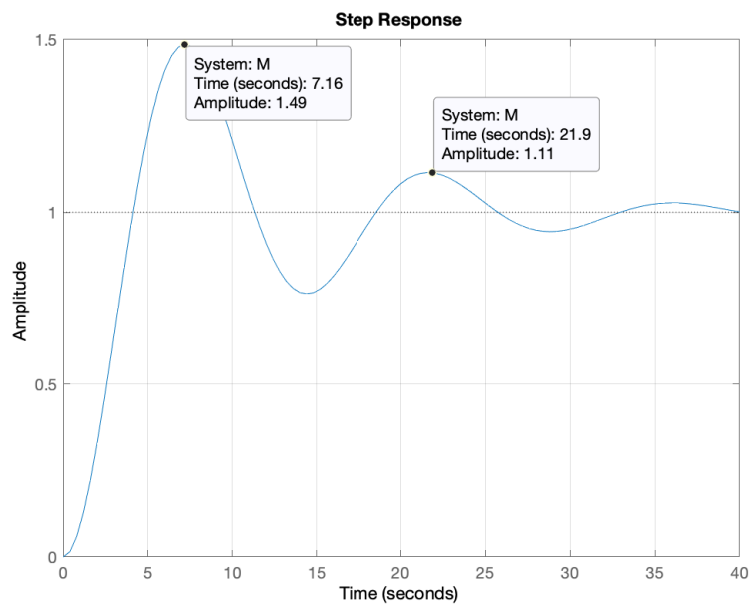
Sprangresponsen til dette systemet er gitt av linje 3 på s. 5 i formelsamlinga, altså

$$k(t) = K \left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \phi) \right) \quad (3.4)$$

Hvis vi leser av grafen ved topppunktene i svingningen får vi $\cos(\beta t - \phi) = 1$, og

$$\frac{k(t_1 + T) - K}{k(t_1) - K} = \frac{e^{\alpha(t_1+T)}}{e^{\alpha t_1}} = e^{-\alpha T} \quad (3.5)$$

Verdiene leses av som vist i figuren under, hvor det tillates en del måleusikkerhet.



Altså er

$$\alpha = -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{k(t_1 + T) - K}{k(t_1) - K} \right) = -\frac{1}{21.9 - 7.16} \ln \left(\frac{1.11 - 1}{1.49 - 1} \right) \approx 0.1 \quad (3.6)$$

Tips: I stedet for å lese av grafens verdi kan man måle lengden fra likevektspunktet med linjal, og bruke disse verdiene i brøken i ln-uttrykket. Videre finnes ω_0 som

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2\pi/T)^2} = \sqrt{0.1^2 + 4\pi^2/14.74^2} \approx 0.44 \quad (3.7)$$

f) (4%)

Med den forenklede modellen er den transferfunksjonen for lukket sløyfe gitt ved

$$M(s) = \frac{\frac{K}{T_1}}{s^2 + \frac{1}{T_1}s + \frac{K}{T_1}} \quad (3.8)$$

Ved å sette koeffisientene i nevneren lik de fra uttrykket for en 2. ordens transferfunksjon fra s. 5 i formelsamlinga finner vi

$$2\alpha = \frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2T_1} = \frac{1}{10} = 0.1 \quad (3.9)$$

og

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3.10)$$

Prosessen har en del oversving, så her kan det være lurt å redusere K_p .

g) (6%)

Fra deloppgave a) har vi at

$$K_{pk} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{6}{5} \quad (3.11)$$

og fra faseforløpet kan vi lese ut at $\omega_{180} \approx 0.45$. Fra formelsamlinga har vi da

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (3.12)$$

$$T_i = 0.85T_k \approx 11.9 \quad (3.13)$$

$$K_p = 0.45K_{pk} = 0.54 \quad (3.14)$$

h) (6%)

Dersom K_p reduseres med omtrent 16dB ned vil den få maks fasemargin. Men selv denne fasemarginen er veldig lav (omtrent 20°). For å få bedre resultat kan T_i økes. Resultatet er akseptabelt siden N_{\max} nå er mindre enn 6dB.

i) (3%)

Her kunne vi innført derivatvirkning for å få et faseløft. Vi ville fått samme effekt ved å innføre intern tilbakekobling.

j) (7%)

Vi ser av blokkdiagrammet at $h_v = h_u$ (flytt summasjonspunktet til etter prosessen). Med (V.11) får vi

$$\frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) = -h_u(s)N(s) = \frac{-h_u(s)}{1 + h_u(s)h_r(s)} \quad (3.15)$$

som, siden $h_u(s)$ er gitt i oppgaven og $h_r(s)$ er

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (3.16)$$

får vi

$$\frac{e}{v}(s) = \frac{-\frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}}{1 + K_p \frac{1+T_1s}{T_1s} \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}} = \frac{-KT_1s}{T_1s^4 + T_1(T_1 + T_2)s^3 + T_1s^2 + K_pKT_1s + K_pK} \quad (3.17)$$

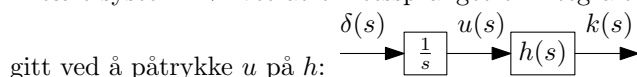
Og sluttverditeoremet med $v(s) = 1/s$ (sprang) gir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e}{v}(s) v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e}{v}(s) = 0 \quad (3.18)$$

Dette kan også besvares verbalt. Les avsnitt 9.4 i læreboka. Siden det er en integrator i $h_v(s)$ må vi ha (minst) to integratorer for å få null stasjonært avvik ved sprang i forstyrrelsen. Siden det er bare en integrator i $h_u(s)$ må det også være en integrator i $h_r(s)$ for å få null stasjonært avvik.

Oppgave 4 (5%)

La $\delta(s) = 1$ være en impuls, $u(s)$ være enhetssprang, og $h(s)$ være transferfunksjonen til et vilkårlig lineært system. Vi vet at enhetsspranget er integralet til impulsen og at sprangresponsen, kalt $k(s)$ er



Hvis vi nå bytter rekkefølge på blokkene får vi samme respons, k , på utgangen: Men nå er det impulsresponsen $h(s)$ som er resultatet av den første blokka, og dermed er integralet av denne lik sprangresponsen.

Oppgave 5 (12%)

a) (6%)

For å designe en diskret regulator erstattes alle s med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$. Det gir

$$\begin{aligned} h_r(z) &= \frac{1 + T_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}{1 + \alpha T_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z + 1 + \frac{2T_d}{T}(z-1)}{z + 1 + \frac{2\alpha T_d}{T}(z-1)} = \frac{(1 + \frac{2T_d}{T})z + (1 - \frac{2T_d}{T})}{(1 + \frac{2\alpha T_d}{T})z + (1 - \frac{2\alpha T_d}{T})} \\ &= \frac{(1 + \frac{2T_d}{T}) + (1 - \frac{2T_d}{T})z^{-1}}{(1 + \frac{2\alpha T_d}{T}) + (1 - \frac{2\alpha T_d}{T})z^{-1}} = \frac{b_0^* + b_1^*z^{-1}}{a_0^* + a_1^*z^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Videre setter vi $h_r = u/e$ og ganger ut, for å få

$$u(z)(a_0^* + a_1^*z^{-1}) = e(z)(b_0^* + b_1^*z^{-1}) \quad (5.2)$$

som, etter å ha benyttet z sin egenskap som tidsforskyvingsoperator, gir

$$u[k] = -\frac{a_1^*}{a_0^*}u[k-1] + \frac{b_0^*}{a_0^*}e[k] + \frac{b_1^*}{a_0^*}e[k-1] \quad (5.3)$$

slik at

$$a_1 = -\frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \quad b_0 = \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \quad b_1 = \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \quad (5.4)$$

b) (5%)

Regulatoren gir en ekstra tidsforsinkelse på $T/2$, som gir et negativt fasebidrag på $T\omega/2$. Ved kryssfrekvensen får vi da

$$\frac{T\omega_c}{2} = 2^\circ \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180}}{0.16} = 0.44s \quad (5.5)$$

Oppgave 6 (18%)

a) (6%)

Bruk av (V.9) i formelsamlinga gir

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 8x_1 - 18x_1^2 & -1 \\ 1 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{x_2}} \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{x}^p} \quad (6.1)$$

b) (5%)

Innsatt i (6.1) og (6.2) i oppgavesettet får vi, med det oppgitte arbeidspunktet, $\dot{x}_1 \approx 0$ og $\dot{x}_2 \approx 0$.

c) (7%)

I arbeidspunktet oppgitt i oppgaven er \mathbf{A} gitt ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.21 & -1 \\ 1 & -0.57 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

og dermed er det karakteristiske polynomet gitt ved

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left| \begin{bmatrix} s + 1.21 & 1 \\ -1 & s + 0.57 \end{bmatrix} \right| = (s + 1.21)(s + 0.57) + 1 = s^2 + 1.78s + 1.69. \quad (6.3)$$

Systemet er stabilt rundt dette likevektspunktet. Det kan vises raskt ved bruk av (V.19) i formelsamlinga.

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_i \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \Bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p\u00e5 vektlos stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.8})$$

$$\text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.9})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$

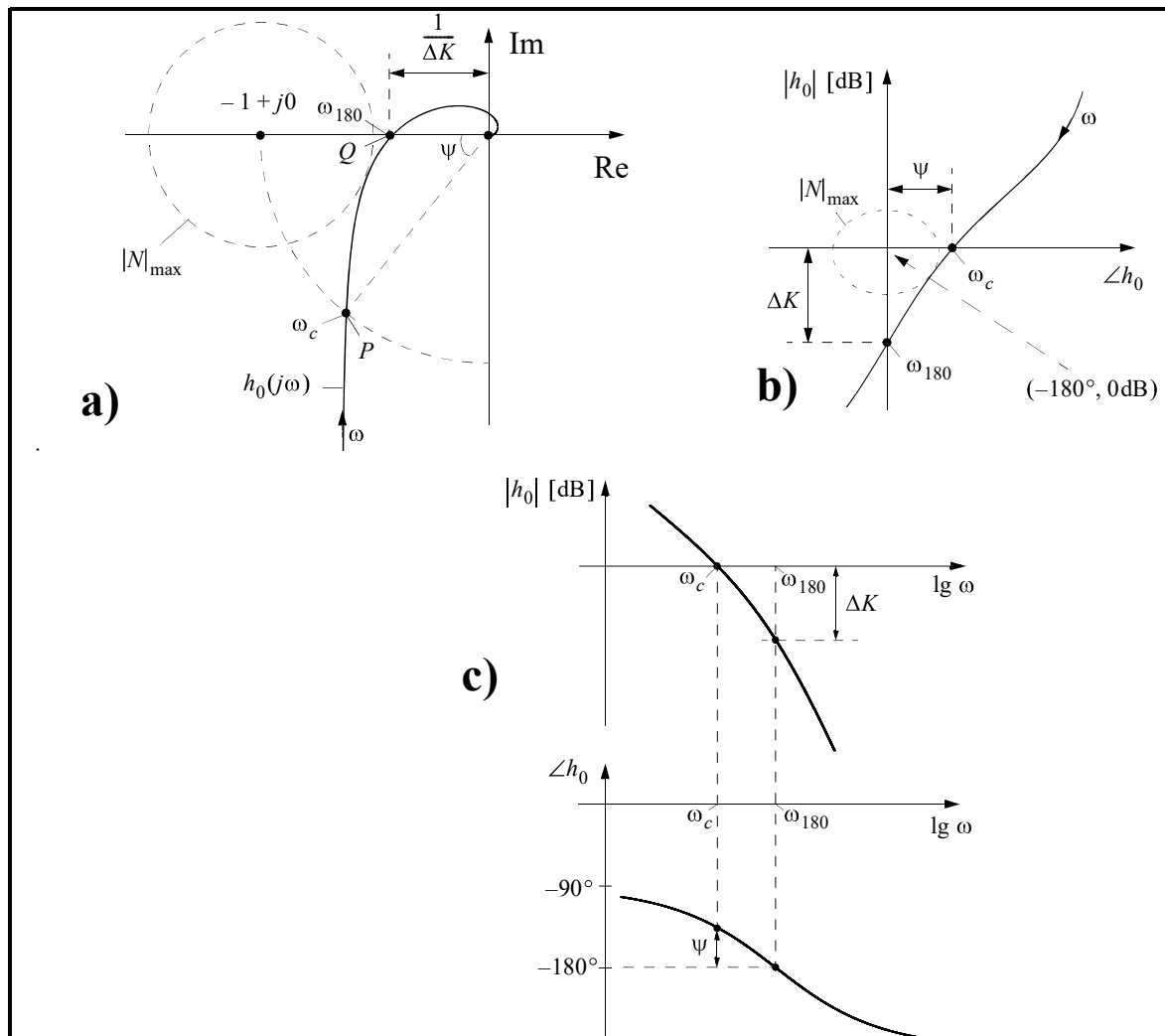
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.11})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en \u00e5pen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i h\u00f8yre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ f\u00e5r en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{n\u00e5r } \omega \text{ g\u00e5r fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)



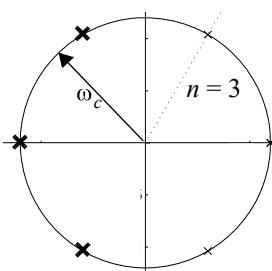
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$ (V.16)



Butterworth lavpassfilter av orden n: De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn. For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves *tillegg* $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.19)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og τ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\tau + T_L)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$, hvor T_L er ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. T_L bør velges som $T_L > 0.3\tau$, f. eks. $T_L = \tau$. (V.20)

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$

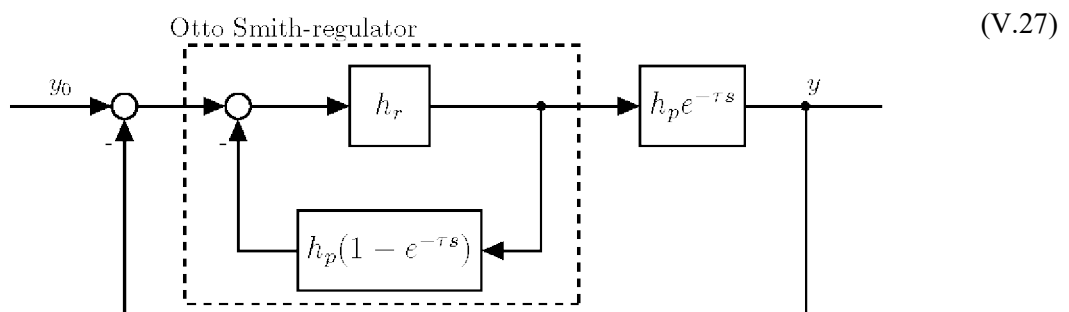
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.24})$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$ ¹⁾
4.	Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$	$A = M\Lambda M^{-1} \quad , \quad e^{\mathbf{A}t} = Me^{\Lambda t}M^{-1} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$ ²⁾
6.	$(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \left(\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts} \right)$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8.	Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$	³⁾ $h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}$ ⁴⁾ $\xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot u(s)$

2) NB: $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

Eigenverdier følger av: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

Laplace: $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \mathbf{B} \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

\Rightarrow poler = egenverdier

Orden

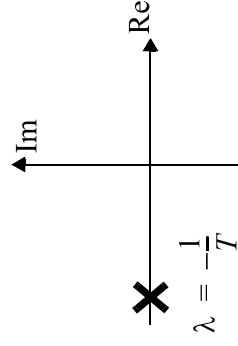
Transferfunksjon $h(s)$

Poler

Impuls- og sprangresponser

1. orden

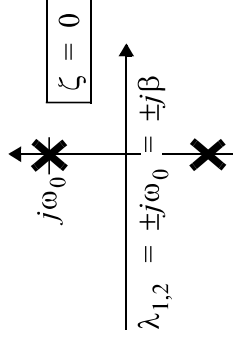
$$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$$



impulsresponser:
 $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$
 sprangresponser:
 $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$

2. orden, $\zeta = 0$

$$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

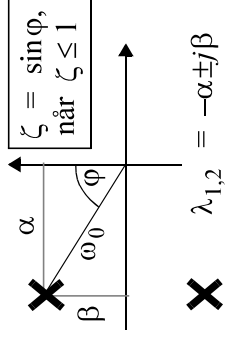


$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$
 $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$

2. orden, $\zeta < 1$

$$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

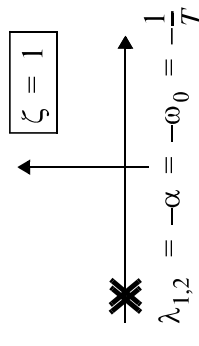
$$= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$



$h(t) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t} \sin \beta t$
 $k(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \phi)\right)$

2. orden, $\zeta = 1$

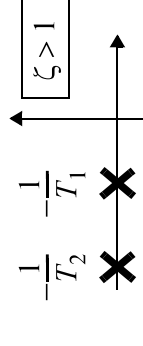
$$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{K}{T^2} \left(s + \frac{1}{T}\right)^2$$



$h(t) = \frac{K}{T^2}te^{-t/T}$
 $k(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$

2. orden, $\zeta > 1$

$$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

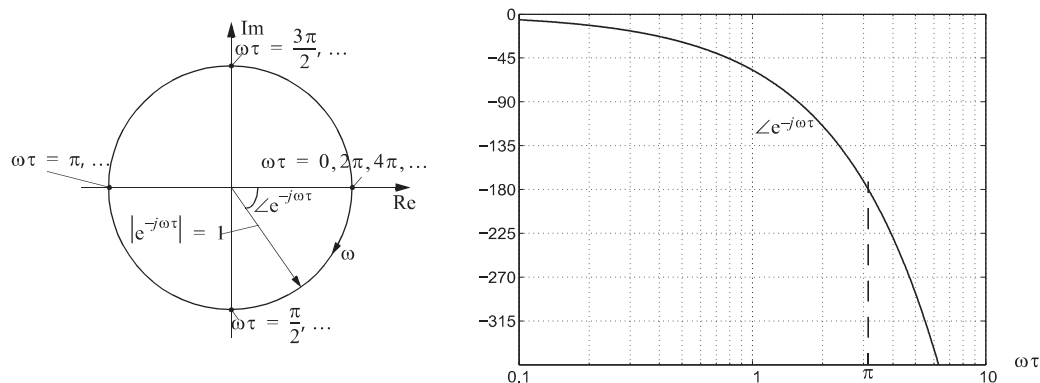


$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
 $k(t) = K \left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, $\zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$, gjelder for alle $\lambda \neq 0$

6.4.1. Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Figur 6.17
Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bodediagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω " med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{1/q}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript as betyr “asymptotisk verdi av”). Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2s)(1 + T_3s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_4s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg |h(j\omega)| = & \lg K + \lg |1 + j\omega T_2| + \lg |1 + j\omega T_3| \\ & - \lg \omega - \lg |1 + j\omega T_1| - 2 \lg |1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

Figur 6.18
Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram

