

# METODA NÁSOBNÉHO DOMINANTNÍHO PÓLU PRO REGULÁTORY SE DVĚMA STUPNI VOLNOSTI A PROPORCIONÁLNÍ SOUSTAVY S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM

Miluše Vítečková\* - Antonín Víteček\*\*

\*,\*\*VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní

17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba, Česká republika

\*\*Technická univerzita v Kielcích, Polsko

Tel.: \* +420 597 324 493, \*\* +420 597 323 485 Fax: +420 59 691 6129

e-mail: [miluse.viteckova@vsb.cz](mailto:miluse.viteckova@vsb.cz), [antonin.vitecek@vsb.cz](mailto:antonin.vitecek@vsb.cz)

**Abstrakt:** Příspěvek je věnován použití metody násobného dominantního pólu pro seřízení regulátorů PI a PID se dvěma stupni volnosti pro proporcionální regulovanou soustavu se setrvačností prvního řádu a dopravním zpožděním. Je to velmi jednoduchá analytická metoda, která dává kvalitní regulační pochod, a proto je předpoklad jejího použití jak v technické praxi, tak i ve výuce.

**Klíčová slova:** regulátory 2DOF, metoda násobného dominantního pólu, dopravní zpoždění

## 1 ÚVOD

V průmyslové praxi se velmi často vyskytují proporcionální soustavy, jejichž vlastnosti mohou být popsány přenosem

$$G_p(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1} e^{-T_d s} \quad (1)$$

kde  $k_1$  je koeficient přenosu,  $T_1$  – časová konstanta,  $T_d$  – dopravní zpoždění.

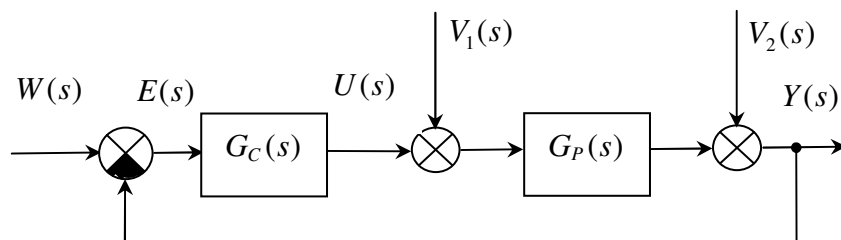
Rovněž častý bývá požadavek na aperiodický regulační proces bez překmitu [Hudzovič, Kozáková, 2001; Harsányi at al., 1998; Rosinová, Markech, 2008; Vítečková, Víteček, 2008]. V tomto případě jako vhodná metoda pro seřízení standardních regulátorů PI a PID se jeví metoda násobného dominantního pólu (MNDP), která je velmi jednoduchá a účinná [Vítečková, Víteček, 2008].

MNDP dává kvalitní výsledky pro regulované soustavy s přenosem (1) v případě dominantního dopravního zpoždění. Pokud dopravní zpoždění je malé, může odezva regulačního obvodu na žádanou veličinu obsahovat veliký překmit. Pokud takový překmit je nepřijatelný, pak je výhodné použití regulátorů PI a PID se dvěma stupni volnosti (2DOF = **2 degrees of freedom**).

## 2 SEŘÍZENÍ STANDARDNÍCH REGULÁTORŮ

MNDP vychází z předpokladu, že násobný dominantní pól regulačního obvodu je reálný a stabilní a že má dominantní vliv na výsledné chování daného regulačního obvodu. Jeho násobnost je o 1 větší, než je počet stavitelných parametrů  $p$  zvoleného regulátoru. Současně se předpokládá, že nedominantní póly mají na regulační pochod zanedbatelný vliv [Górecki, 1971; Vítečková, Víteček, 2008].

Je uvažován jednoduchý regulační obvod se standardním regulátorem na obr. 1, kde kde  $W(s)$  je žádaná veličina,  $V_1(s)$  – poruchová veličina působící na vstupu regulované soustavy,  $V_2(s)$  – poruchová veličina působící na výstupu regulované soustavy,  $E(s)$  – regulační odchylka,  $U(s)$  – akční veličina,  $Y(s)$  – regulovaná veličina,  $G_C(s)$  – přenos standardního regulátoru PI nebo PID,  $G_P(s)$  – přenos regulované soustavy (1).



Obr. 1 Schéma regulačního obvodu se standardním regulátorem

Násobný dominantní pól  $s_{p+1}^*$  se získá řešením soustavy rovnic

$$\frac{d^i N(s)}{d s^i} = 0 \text{ pro } i = 0, 1, \dots, p \quad (2)$$

kde  $N(s)$  je charakteristický kvazimnohočlen regulačního obvodu.

Předpokládá se, že standardní regulátor PID má přenos

$$G_C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (3)$$

ze kterého pro  $T_D = 0$  se obdrží přenos standardního regulátoru PI

$$G_C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (4)$$

kde  $K_P$  je zesílení regulátoru,  $T_I$  – integrační časová konstanta,  $T_D$  – derivační časová konstanta.

Oba regulátory (3) i (4) zajišťují nulové trvalé regulační odchylky pro skokové změny polohy všech vstupních veličin, tj.  $w(t)$ ,  $v_1(t)$  a  $v_2(t)$ .

Např. pro standardní regulátor PI (4) a proporcionální soustavu (1) se v souladu s (2) pro  $p = 2$  dostane soustava rovnic

$$\begin{aligned} (T_1 s^2 + s) e^{T_d s} + k_1 K_P \left( s + \frac{1}{T_I} \right) &= 0 \\ [T_d T_1 s^2 + (T_d + 2T_1) s + 1] e^{T_d s} + k_1 K_P &= 0 \\ T_d^2 T_1 s^2 + (4T_d T_1 + T_d^2) s + 2T_d + 2T_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

jejímž řešením se obdrží násobný dominantní pól a stavitelné parametry regulátoru

$$s_3^* = -\frac{2}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}} \quad (6)$$

$$K_P^* = -\frac{1}{k_1} [T_d T_1 s_3^{*2} + (T_d + 2T_1) s_3^* + 1] e^{T_d s_3^*} \quad (7)$$

$$T_I^* = -\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (T_d + 2T_1)s_3^* + 1}{s_3^{*2}(T_d T_1 s_3^* + T_d + T_1)} \quad (8)$$

Při výpočtu trojnásobného dominantního pólu (6) bylo uvažováno před odmocninou znaménko plus, jinak by pól nebyl dominantní. Dosazením pólu (6) do vztahů (7) a (8) je lze ještě upravit [Górecki, 1971], ale podstatného zjednodušení se tím nedosáhne.

Podobným způsobem byly odvozeny vztahy pro stavitelné parametry standardního regulátoru PID. Vypočtené vztahy jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1 Hodnoty stavitelných parametrů regulátorů PI a PID

REGULÁTOR		REGULOVANÁ SOUSTAVA $\frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_d s}$
PI	$s_3^*$	$-\frac{2}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}}$
	$K_P^*$	$-\frac{1}{k_1} [T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1] e^{T_d s_3^*}$
	$T_I^*$	$-\frac{T_d T_1 s_3^{*2} + (2T_1 + T_d)s_3^* + 1}{(T_d T_1 s_3^* + T_1 + T_d)s_3^{*2}}$
	$b^*$	1 pro $T_d \geq 0,6T_1$ $\frac{1}{T_I^*  s_3^* }$ pro $T_d < 0,6T_1$
PID	$s_4^*$	$-\frac{3}{T_d} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{3}{T_d^2} + \frac{1}{4T_1^2}}$
	$K_P^*$	$\frac{1}{k_1} [T_d^2 T_1 s_4^{*3} + T_d(3T_1 + T_d)s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1] e^{T_d s_4^*}$
	$T_I^*$	$-2 \frac{T_d^2 T_1 s_4^{*3} + T_d(3T_1 + T_d)s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1}{s_4^{*3} T_d (T_d T_1 s_4^* + 2T_1 + T_d)}$
	$T_D^*$	$-\frac{1}{2} \frac{T_d^2 T_1 s_4^{*2} + T_d(4T_1 + T_d)s_4^* + 2T_d + 2T_1}{T_d^2 T_1 s_4^{*3} + T_d(3T_1 + T_d)s_4^{*2} + T_d s_4^* - 1}$
	$b^*$	1 pro $T_d \geq 1,1T_1$ $\frac{2}{T_I^*  s_4^* }$ pro $T_d < 1,1T_1$
	$c^*$	1 pro $T_d \geq 0,6T_1$ $\frac{1}{T_I^* T_D^* s_4^{*2}}$ pro $T_d < 0,6T_1$

Přenosy řízení regulačního obvodu na obr. 1 pro regulovanou soustavu (1) a standardní regulátory PID (3) a PI (4) seřízené MNDP podle tab. 1 mají tvary

$$G_{wy}(s) = \frac{T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1}{\frac{T_I^* T_1^*}{k_1 K_P^*} s^2 + \frac{T_I^*}{k_1 K_P^*} s + (T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1) e^{-T_d s}} e^{-T_d s} \approx \frac{T_D^* T_I^* s^2 + T_I^* s + 1}{\left( \frac{1}{|s_4^*|} s + 1 \right)^4} e^{-T_d s} \quad (9)$$

$$G_{wy}(s) = \frac{T_I^* s + 1}{\frac{T_I^* T_1^*}{k_1 K_P^*} s^2 + \frac{T_I^*}{k_1 K_P^*} s + (T_I^* s + 1) e^{-T_d s}} e^{-T_d s} \approx \frac{T_I^* s + 1}{\left( \frac{1}{|s_3^*|} s + 1 \right)^3} e^{-T_d s} \quad (10)$$

Mnohočleny v čitatelích přenosů řízení (9) a (10) jsou Hurwitzovy, a proto jejich nuly přechodný proces urychlují. Pro malé hodnoty dopravního zpoždění  $T_d$  vzhledem k hodnotě setrvačné časové konstanty  $T_1$  mohou však způsobit nepřipustně veliký překmit. Jednou z cest jak tento problém řešit je použití regulátorů se dvěma stupni volnosti, tj. 2DOF PI a 2DOF PID.

### 3 SEŘÍZENÍ REGULÁTORŮ SE DVĚMA STUPNI VOLNOSTI

Regulátor 2DOF PID může být popsán vztahem [Åström, Hägglund, 2006; Vítěčková, Vítěček, 2008]

$$U(s) = K_P \left\{ bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s} [W(s) - Y(s)] + T_D s [cW(s) - Y(s)] \right\} \quad (11)$$

ze kterého pro  $T_D = 0$  se obdrží vztah pro regulátor 2DOF PI

$$U(s) = K_P \left\{ bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_I s} [W(s) - Y(s)] \right\} \quad (12)$$

kde  $b$  je váha žádané veličiny u proporcionální složky,  $c$  – váha žádané veličiny u derivační složky.

Předpokládá se, že obě váhy se mohou měnit v rozmezí od 0 do 1. Pro  $b = c = 1$  vztah (11) popisuje standardní regulátor PID s přenosem (3) a pro  $b = 1, T_D = 0$  popisuje standardní regulátor PI s přenosem (4).

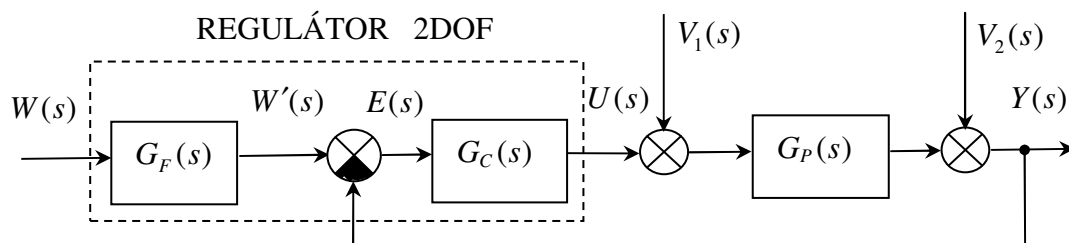
Regulační obvod s regulátorem 2DOF může být transformován na regulační obvod se standardním regulátorem s přenosem  $G_C(s)$  a vstupním filtrem s přenosem  $G_F(s)$  v souladu s obr. 2.

Pro regulátor 2DOF PID (11) ve schématu na obr. 2  $G_C(s)$  je přenos standardního regulátoru PID (3) a přenos vstupního filtru je dán vztahem

$$G_F(s) = \frac{cT_I T_D s^2 + bT_I s + 1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1} \quad (13)$$

a podobně pro regulátor 2DOF PI (12) ve schématu na obr. 2  $G_C(s)$  je přenos standardního regulátoru PI (4) a přenos vstupního filtru má tvar

$$G_F(s) = \frac{bT_I s + 1}{T_I s + 1} \quad (14)$$



Obr. 2 Regulační obvod s regulátorem 2DOF

Z přenosů vstupních filtrů (13) a (14) vyplývá, že jejich jmenovatelé kompenzují čitatele v odpovídajících přenosech řízení (9) a (10). Dojde tak k výraznému zpomalení odezvy.

Čitatele přenosů řízení (9) a (10) urychlují odezvy, a proto pokud nezpůsobují velké překmity, použití regulátorů 2DOF není vhodné. Použití regulátorů 2DOF je proto žádoucí při vystupování nepřijatelně velikých překmitů. Odpovídající volbou vah žádané veličiny  $b$  a  $c$  lze odezvy zase urychlit. Při požadavku aperiodických průběhů čitatele vstupních filtrů (14) nebo (13) při vhodně zvolených váhách  $b$  a  $c$  mohou kompenzovat jeden (PI) nebo dva (PID) dvojčleny ve jmenovatelích aproximovaných přenosů řízení (10) a (9).

Pro regulátor 2DOF PI lze tedy psát

$$b^* T_I^* s + 1 = \frac{1}{|s_3^*|} s + 1 \Rightarrow b^* = \frac{1}{T_I^* |s_3^*|} \quad (15)$$

Podobně pro regulátor 2DOF PID se dostane

$$c^* T_I^* T_D^* s^2 + b^* T_I^* s + 1 = \left( \frac{1}{|s_4^*|} s + 1 \right)^2 \Rightarrow b^* = \frac{2}{T_I^* |s_4^*|}, \quad c^* = \frac{1}{T_I^* T_D^* s_4^{*2}} \quad (16)$$

Lze např. ukázat, že pokud by ve vztahu (10) pro standardní regulátor PI platila přesná rovnost, překmit teoreticky vystoupí pro

$$T_d < T_1 \quad (17)$$

Vzhledem k přibližné rovnosti překmit prakticky vystoupí pro

$$T_d < 0,6T_1 \quad (18)$$

Podobné závěry platí i pro standardní regulátor PID. Vystupování překmitu bylo určeno simulačně. Vztahy pro výpočet vah žádané veličiny  $b$  a  $c$  spolu s podmínkami vystoupení překmitu jsou uvedeny v tab. 1.

V souladu s obr. 2 odchylkové přenosy jsou dány vztahy:

$$G_{we}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{G_F(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)} \quad (19)$$

$$G_{v1e}(s) = \frac{E(s)}{V_1(s)} = -\frac{G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)} \quad (20)$$

$$G_{v2e}(s) = \frac{E(s)}{V_2(s)} = -\frac{1}{1 + G_C(s)G_P(s)} \quad (21)$$

Je zřejmé, že pro standardní regulátory platí

$$G_F(s) = 1 \quad (22)$$

Ze tvarů odchylkových přenosů (19) ÷ (21) vyplývá, že regulátory 2DOF mají vliv pouze na odezvu na žádanou veličinu  $w(t)$ . V případě použití standardních regulátorů platí (22), a proto odezvy na žádanou veličinu  $w(t)$  a poruchovou veličinu  $v_2(t)$  působící na výstupu regulované soustavy se liší pouze znaménkem.

## 4 PŘÍKLADY

### Příklad 1

Pro proporcionální regulovanou soustavu s přenosem

$$G_P(s) = \frac{1}{4s+1} e^{-6s}$$

je třeba seřadit MNDP regulátory PI a PID tak, aby odezvy na skokové změny polohy všech vstupních veličin byly aperiodické bez překmitů (časová konstanta a dopravní zpoždění je v sekundách).

#### Řešení:

Na základě tab. 1 pro  $k_1 = 1$ ,  $T_1 = 4$  s a  $T_d = 6$  s se dostane:

**Regulátor PI:**  $s_3^* \doteq -0,1915$ ;  $K_P^* = 0,2538 \doteq 0,25$ ;  $T_I^* = 4,0412 \doteq 4,04$ .

Protože platí  $T_d = 6 > 0,6T_1 = 2,4$ , standardní regulátor zajistí všechny odezvy aperiodické bez překmitů.

**Regulátor PID:**  $s_4^* \doteq -0,3104$ ;  $K_P^* = 0,5027 \doteq 0,50$ ;  $T_I^* = 5,5074 \doteq 5,51$ ;  $T_D^* = 1,0966 \doteq 1,10$ .

Podobně jako v předchozím případě, protože platí  $T_d = 6 > 1,1T_1 = 4,4$ , standardní regulátor PID zajistí všechny odezvy aperiodické bez překmitů.

Získané odezvy jsou na obr. 3. Podle očekávání jsou všechny aperiodické bez překmitů.

### Příklad 2

Podobně jako v předchozím příkladě pro proporcionální regulovanou soustavu s přenosem

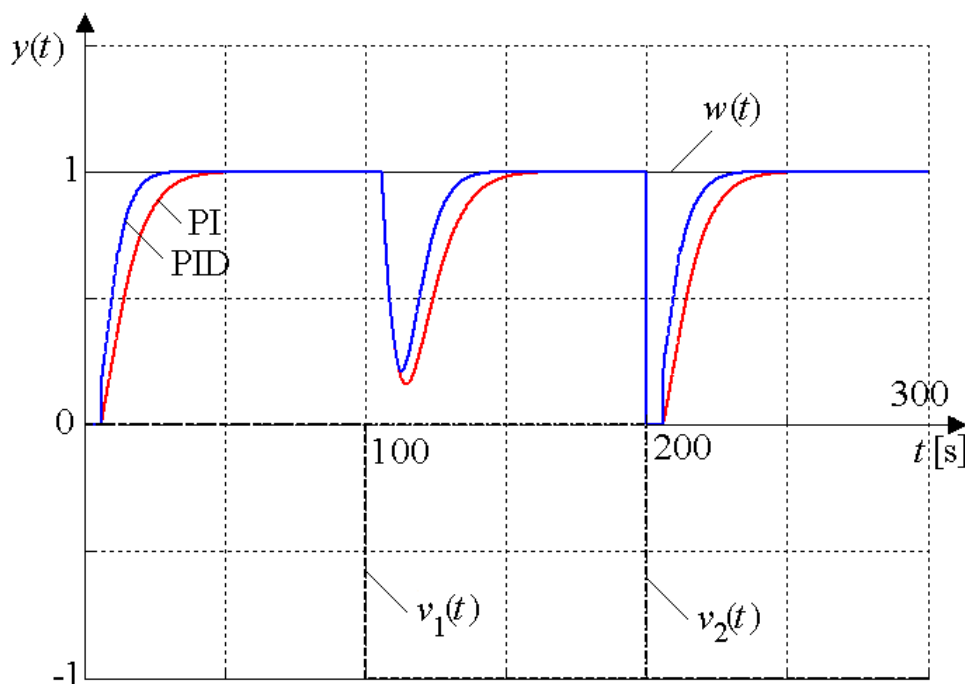
$$G_P(s) = \frac{1}{4s+1} e^{-s}$$

je třeba seřadit MNDP regulátory PI a PID tak, aby odezva na skokovou změnu polohy žádané veličiny byla aperiodická bez překmitu (časová konstanta a dopravní zpoždění jsou v sekundách).

#### Řešení:

Na základě tab. 1 pro  $k_1 = 1$ ,  $T_1 = 4$  s a  $T_d = 1$  s se dostane:

**Regulátor PI:**  $s_3^* \doteq -0,7053$ ;  $K_P^* = 1,6587 \doteq 1,66$ ;  $T_I^* = 3,0982 \doteq 3,10$ .



Obr. 3 Průběhy odezvy regulačního obvodu se standardními regulátory seřízenými MNDP – příklad 1

Protože  $T_d = 1 < 0,6T_1 = 2,4$ , standardní regulátor PI ( $b = 1$ ) nezajistí aperiodickou odezvu na skokovou změnu polohy žádané veličiny  $w(t)$ , a proto je třeba použít regulátor 2DOF PI s váhou žádané veličiny u proporcionální složky vypočtenou podle tab. 1, tj.  $b^* = 0,4576 \doteq 0,46$ .

**Regulátor PID:**  $s_4^* \doteq -1,3884$ ;  $K_P^* = 2,9851 \doteq 2,99$ ;  $T_I^* = 2,5945 \doteq 2,59$ ;  $T_D^* = 0,2462 \doteq 0,25$ .

Protože platí  $T_d = 1 < 0,6T_1 = 2,4$ , je třeba použít regulátor 2DOF PID a vypočíst váhy žádané veličiny u proporcionální a derivační složky podle tab. 1, tj.  $b^* = 0,5552 \doteq 0,56$  a  $c^* = 0,8121 \doteq 0,81$ .

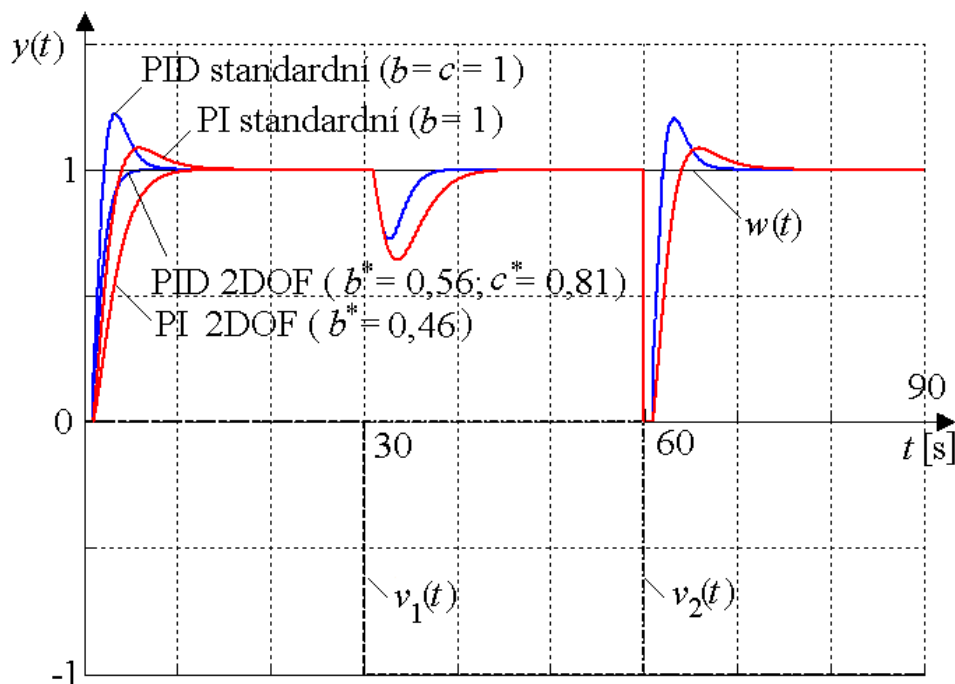
Odezvy regulačního obvodu se standardními regulátory i regulátory 2DOF jsou ukázány na obr. 4.

Z obr. 4 je zřejmé, že regulátory 2DOF zajistily aperiodické průběhy bez překmitů pro skokovou změnu žádané veličiny  $w(t)$ . Ostatní odezvy zůstaly beze změn.

## 5 ZÁVĚR

V příspěvku je metoda násobného dominantního pólu rozšířena na seřízení regulátorů PI a PID se dvěma stupni volnosti pro proporcionální regulovanou soustavu se setrvačností prvního řádu s dopravním zpožděním. Popsaný postup umožňuje získat aperiodické odezvy bez překmitu na skokové změny polohy žádané veličiny a poruchové veličiny působící na vstupu regulované soustavy.

Příspěvek vznikl v rámci řešení grantového úkolu GAČR č. 102/09/0894.



Obr. 4 Průběhy odezev regulačního obvodu se standardními regulátory i regulátory 2DOF seřízenými MNDP – příklad 2

## LITERATURA

- ÅSTRÖM, K. J., HÄGGLUND, T. (2006): *Advanced PID Control*. ISA – The Instrumentation, Systems, and Society, Research Triangle Park
- GÓRECKI, H. (1971): *Analiza i synteza ukkadów regulacji z opóznieniem*. Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa
- HUDZOVIČ, P. KOZÁKOVÁ, A. (2001): A Contribution to the Synthesis of PI Controllers. *In Proceedings of the International Conference “Cybernetics and Informatics”*, Piešťany, Slovak Republic, p. 31-34
- HARSÁNYI, L., MURGAŠ, J., ROSINOVÁ, D., KOZÁKOVÁ, A. (1998): *Teória automatického riadenia*. STU v Bratislave
- ROSINOVÁ, D., MARKECH, M. (2008): Robust Control of Quadruple Tank Process. *ICIC Express Letters*. Volume 2, Number 3, June, p. 231-238
- ŠULC, B., VÍTEČKOVÁ, M. (2004): *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Vydavatelství ČVUT, Praha
- VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. (2008): *Základy automatické regulace*. VŠB – TUO, Ostrava