

MODELOVANIE A RIADENIE VÝUKOVÉHO MODELU GULIČKA NA PLOCHE S VYUŽITÍM MPT TOOLBOXU

Luboš Popovič, Vratislav Hladký, Ján Sarnovský

Technická univerzita v Košiciach, Fakulta elektrotechniky a informatiky
Letná 9, 042 00 Košice, Slovenská republika
Tel.: +421 55 602 4214
e-mail: lubos.popovic,vratislav.hladky,jan.sarnovsky@tuke.sk

Abstrakt: Článok sa zaoberá modelovaním nelineárneho dynamického systému guľička na ploche s podporou MPT Toolboxu a poukazuje tiež na možnosti využitia funkcií MPT Toolboxu na syntézu regulátorov pre sledovanie referenčnej trajektórie, založenú na moderných metódach teórie riadenia.

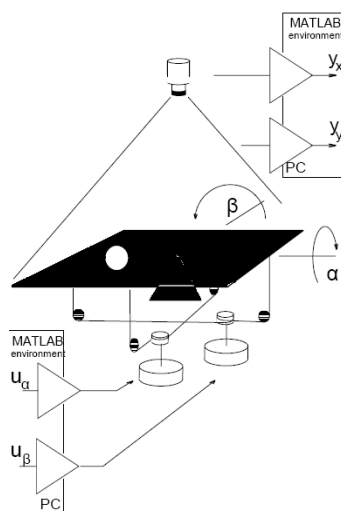
Kľúčové slová: laboratórny výukový model guľička na ploche, nelineárny dynamický systém, optimálne riadenie, multiparametrický (MPT) regulátor, sledovanie referenčnej trajektórie

1 ÚVOD

Autori v tomto článku poukazujú na možnosti aplikačného využitia laboratórneho modelu guľička na ploche a MPT Toolboxu ako voľne dostupné rozšírenie funkcií programového balíka Matlab/Simulink pre modelovanie a riadenie dynamických systémov s cieľom vytvorenia nelineárneho simulačného modelu a návrhu stavového optimálneho algoritmu riadenia pre sledovanie zvolenej referenčnej trajektórie.

2 VÝUKOVÝ MODEL GULIČKA NA PLOCHE

Jedná sa o laboratórny model firmy Humusoft pod označením CE 151, ktorý sa skladá z guľičky pohybujúcej sa po ploche, ktorá sa môže nakláňať v smere osi x a y , ako je možné vidieť na Obr. 1.

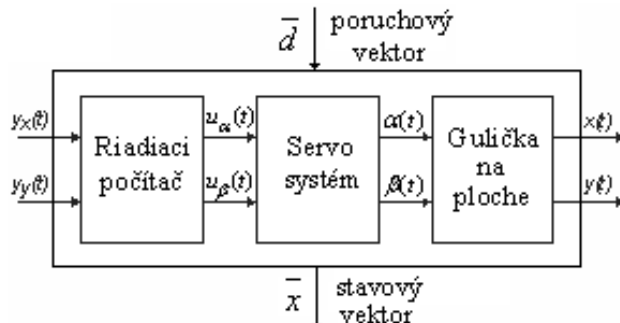


Obrázok 1: Principiálna schéma výukového modelu guľička na ploche

Plocha je riadená dvojicou krokových motorov (servosystém) a poloha guľičky je snímaná kamerou, ktorá je umiestnená nad plochou. Obraz z kamery je spracovávaný počítačom, výsledkom čoho je aktuálna poloha guľičky na ploche.

Na základe polohy guľičky riadiaci počítač vyšle adekvátne hodnoty napätia na krokové motory, ktoré naklonia plochu o taký uhol, aby sa guľička dostala do požadovanej pozície [1].

Keďže neexistuje žiadna spätná väzba medzi guľičkou a nakláňajúcou sa plochou, je možné model rozdeliť na dve nezávislé časti – servosystém a guľičku voľne sa pohybujúcu po ploche – Obr. 2.



Obrázok 2: Bloková schéma výukového modelu guľička na ploche s riadiacim počítačom

Popis vstupov/výstupov:

$y_x(t), y_y(t)$ - pozícia guľičky na ploche získaná z obrazu kamery	[m, m]
$u_\alpha(t), u_\beta(t)$ - napätie ovládajúce jednotlivé krokové motory	[V, V]
$\alpha(t), \beta(t)$ - uhly reprezentujúce naklonenie roviny	[rad, rad]
$x(t), y(t)$ - reálna pozícia guľičky	[m, m]

Matematický popis dynamiky systému guľičky voľne sa pohybujúcej po ploche získame na základe nelineárnych Euler-Lagrangeových diferenciálnych rovníc, ktorých všeobecný tvar je:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W_k}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

kde q_i - i-tá všeobecná súradnica, \dot{q}_i - prvá derivácia i-tej všeobecnej súradnice podľa času, W_k - kinetická energia systému, W_p - potenciálna energia systému, Q_i - i-tá všeobecná sila.

Tento systém ma štyri stupne voľnosti, dva v pohybe guľičky po ploche a dva v sklone tejto plochy. Po deriváciách, aplikácii známych fyzikálnych vzťahov a úpravách, ktoré sú potrebné k získaniu vyššie uvedenej formy Euler-Lagrangeových rovníc, dostaneme nasledujúcu množinu nelineárnych diferenciálnych rovníc :

$$x: \left(m + \frac{I_b}{r_b^2} \right) \ddot{x} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + mg \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$y: \left(m + \frac{I_b}{r_b^2} \right) \ddot{y} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}x + \dot{\beta}^2y) + mg \sin \beta = 0, \quad (3)$$

$$(I_p + I_b + mx^2) \ddot{\alpha} + m(\ddot{\beta}xy + \dot{\beta}\dot{x}y + \dot{\beta}x\dot{y} + 2\dot{\alpha}\dot{x}x) + mgx \cos \alpha = F, \quad (4)$$

$$(I_p + I_b + my^2) \ddot{\beta} + m(\ddot{\alpha}xy + \dot{\alpha}\dot{x}y + \dot{\alpha}x\dot{y} + 2\dot{\beta}\dot{x}x) + mgx \cos \beta = F. \quad (5)$$

Rovnice (2) a (3) popisujú pohyb guľičky po ploche, teda ako zrýchlenie pohybu guľičky závisí od uhlu a uhlovej rýchlosti naklonenia plochy. Rovnice (4) a (5) popisujú, ako je dynamika nakláňania plochy ovplyvňovaná externou riadiacou silou, pozíciou a rýchlosťou guľičky.

Presný význam a fyzikálne rozmery jednotlivých premenných je možné nájsť v [1].

Množinu nelineárnych diferenciálnych rovníc (2) až (5) je možné jednoducho previesť na nelineárny stavový model. Tento stavový model by bol ale veľmi zložitý a veľmi ťažko použiteľný k ďalšej analýze a k úspešnému návrhu regulátora. Preto je potrebné tento nelineárny model zjednodušiť.

Nástroje MPT Toolboxu poskytujú možnosť modelovať aj nelineárne systémy, pričom je potrebné hore uvedený nelineárny model guľičky voľne sa pohybujúcej po ploche zjednodušiť pre použitie v tomto toolboxe.

Faktom je, že frekvencia krokových motorov je o dosť menšia ako akceleračný limit, z čoho vyplýva, že nedôjde k strate žiadneho kroku a veľkosť záťažového momentu teda nemôže ovplyvniť aktuálnu pozíciu krokového motora. Tento predpoklad má za následok zanedbanie rovníc (4) a (5). Vychádzajúc z rovnice (2), dosadením za premennú I_b vzťah pre zotrvačnosť guľičky na naklonenej rovine, $I_b = \frac{2}{5}mr^2$ a vykonaním základných matematických úprav dostaneme vzťah:

$$m \left(\left(1 + \frac{2}{5}r^2 \right) \ddot{x} - (\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + g \sin \alpha \right) = 0. \quad (6)$$

Keďže hmotnosť m a polomer r guľičky nadobúdajú veľmi malé hodnoty oproti ostatným veličinám, môžeme ich v ďalšom zanedbať. Potom pre os x dostaneme:

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} \left((\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) - g \sin \alpha \right), \quad (7)$$

a pre os y dostaneme:

$$\ddot{y} = \frac{5}{7} \left((\dot{\alpha}\dot{\beta}x + \dot{\beta}^2y) - g \sin \beta \right). \quad (8)$$

Na zápis takto získaných nelineárnych diferenciálnych rovníc pre vytvorenie modelu v MPT Toolboxe, je potrebné ich najprv previesť na substitučný kanonický tvar, použitím náhrady derivácie diferenciou $\frac{dx(t)}{dt} \cong x(k) = \frac{x(t+T_s) - x(t)}{T_s}$ (so známou periódou vzorkovania T_s),

keďže MPT realizuje syntézu regulátorov práve v diskkrétnej oblasti. Označme teda:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ \dot{x}(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{pozícia guľičky v smere osi } x \text{ [cm]} \\ \text{pozícia guľičky v smere osi } y \text{ [cm]} \\ \text{rýchlosť guľičky v smere osi } x \text{ [cm.s}^{-1}\text{]} \\ \text{rýchlosť guľičky v smere osi } y \text{ [cm.s}^{-1}\text{]} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

a pre vstupy nech platí:

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \\ \dot{\alpha}(k) \\ \dot{\beta}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{uhol náklonu plochy v smere osi } x \text{ [rad]} \\ \text{uhol náklonu plochy v smere osi } y \text{ [rad]} \\ \text{uhlová rýchlosť plochy v smere osi } x \text{ [rad.s}^{-1}\text{]} \\ \text{uhlová rýchlosť plochy v smere osi } y \text{ [rad.s}^{-1}\text{]} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Po prepísaní dostaneme štyri diferenčné rovnice prvého rádu (11) – (14), ktoré zapíšeme v maticovom tvare do príslušnej časti funkcie MPT Toolboxu určenej pre nelineárne systémy, kde takisto dodefinujeme obmedzenia vyplývajúce z fyzikálnej podstaty modelu. Tento postup je teda rovnaký, ak by sme tieto štyri rovnice prvého rádu riešili využitím funkcií Matlabu.

$$x_1(k+1) = x_1(k) + T_s x_3(k) \quad (11)$$

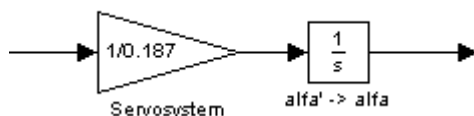
$$x_2(k+1) = x_2(k) + T_s x_4(k) \quad (12)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + T_s \frac{5}{7} \left((u_3(k)u_4(k)x_2(k) + u_3(k)^2 x_1(k)) - g \sin u_1(k) \right) \quad (13)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) + T_s \frac{5}{7} \left((u_3(k)u_4(k)x_1(k) + u_4(k)^2 x_2(k)) - g \sin u_2(k) \right) \quad (14)$$

Druhou nezávislou časťou celého modelu je servosystém (krokové motory), ktorého úlohou je nakláňanie plochy v smere osi x a y . Krokový motor je vo všeobecnosti reprezentovaný ideálnym integrátorom, ktorý má konštantné otáčky. Jeho rýchlosť ale závisí na frekvencii impulzov od karty, ktorá tieto motory ovláda. Práve softvérové ovládače karty a jej elektronika predstavuje dodatočné nelinearity. S touto časťou modelu sú späté dva parametre, t.j. statické zosilnenie K_α (K_β) a nominálna rýchlosť krokového motora. Ich hodnoty sú určené na základe experimentálnej identifikácie, pričom podrobnosti a zjednodušujúce predpoklady možno nájsť v [1].

Keďže pri návrhu regulátorov v MPT Toolboxe musí byť vo väčšine prípadov známy linearizovaný model systému, je potom potrebné určiť linearizovaný model servosystému – Obr. 3 a linearizovaný model guľičky voľne sa pohybujúcej po ploche.



Obrázok 3: Linearizovaný model servosystému pre os x

Odvedenie linearizovaného modelu kompletnej dynamiky celého systému guľičky na ploche zhrňa experimentálnu identifikáciu parametrov modelu, zjednodušujúce predpoklady pre guľičku, ktorú uvažujeme ako homogénnu (nepôsobí na ňu trenie).

Stavový vektor pre os x celého systému (servosystém a guľička na ploche) v časovej oblasti má nasledovný tvar:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_x(t) \\ \dot{y}_x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{pozícia guľičky [-]} \\ \text{rýchlosť guľičky [s}^{-1}] \\ \text{náklon plochy [-]} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Ak budeme uvažovať podľa Obr. 2 ako vstup do systému napätie u_α ovládajúce krokový motor nakláňajúci plochu v smere osi x , pričom $u_\alpha \in \langle -1, +1 \rangle$ a ako výstup budeme uvažovať y_x , ktorý predstavuje pozíciu guľičky v smere osi x , pričom $y_x \in \langle -1, +1 \rangle$ môžeme vytvoriť stavový opis modelu v časovej oblasti (16) a (17), v substituálnom kanonickom tvare:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{\alpha}(t), \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T_m} \end{bmatrix} u_{\alpha}(t), \quad (16)$$

$$y_x(t) = Cx(t), \quad y_x(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t). \quad (17)$$

Pre os y je stavový opis rovnaký. Z uvedených rovníc vyplýva, že prezentovaný model z hľadiska teórie riadenia predstavuje nestabilný systém tretieho rádu s astatizmom druhého rádu.

3 RIADENIE NELINEÁRNEHO VÝUKOVÉHO MODELU GULIČKA NA PLOCHE

Ako už bolo uvedené MPT Toolbox umožňuje návrh tzv. multiparametrických regulátorov, jedná sa o triedu optimálnych a prediktívnych regulátorov, ktoré transformujú problém riadenia (optimalizačný problém) na matematickú úlohu lineárneho, kvadratického či multimaparametrického programovania. Cieľom tohto toolboxu je zabezpečiť efektívny výpočtový aparát, práve pre návrh spätnoväzobných regulátorov rôznych typov optimalizačných úloh s ohraňeniami v programovom prostredí Matlab. Práve využitím multiparametrického programovania je možné riešiť lineárne a kvadratické optimalizačné úlohy off-line i on-line. V našom prípade riešime túto úlohu off-line, čiže realizujeme návrh tzv. explicitného regulátora. Zjednodušene povedané, princíp spočíva v rozdelení stavového priestoru na množinu mnohostenov, ktoré reprezentujú tzv. regióny, pričom pre každú takúto časť je vypočítaný akčný zásah ako presne definovaná afinná funkcia stavu [2].

Naším cieľom je návrh takého stavového regulátora pre nelineárny dynamický systém guľička na ploche, ktorý je vytvorený takisto s podporou funkcií MPT Toolboxu, ktorý bude schopný sledovať zvolenú referenčnú trajektóriu napr. tvaru štvorca, elipsy, alebo hviezdy.

Syntéza optimálneho regulátora podľa kvadratického kritéria pre sledovanie referenčnej trajektórie vychádza zo stavového opisu systému (16) a (17), prepísaného do diskkrétnej oblasti, použitím zvolenej periódy vzorkovania. Keďže sa nejedná o konštantnú hodnotu referenčnej trajektórie, ale jej hodnoty sa menia v čase, je potrebné vhodne rozšíriť matice stavového priestoru. Zo stavového opisu (16) a (17) vyplýva, že referenčnú trajektóriu by mala sledovať prvá stavová premenná (pozícia guľičky). Z toho dôvodu je potrebné rozšíriť stavový vektor \bar{x} referenčným vektorom \bar{y}_{ref} , t.j. pridať ho do stavového opisu modelu. Keďže v kroku k je vlastne vstupom do systému zmena vstupu $\Delta u(k)$, potom $u(k-1)$ je tiež potrebné zahrnúť do stavového vektora [2]:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \\ y_{ref}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ y_{ref}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (18)$$

Ďalej predpokladajme, nech je účelová funkcia definovaná v tvare:

$$J = x(N)^T P_N x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) + (y(k) - y_{ref}(k))^T Q_y (y(k) - y_{ref}(k)) \quad (19)$$

pričom objekt riadenia a fyzikálne obmedzenia vstupov, stavov a výstupov sú definované ako:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f_{dyn}(x(k), u(k)) \\ u_{\min} &\leq u(k) \leq u_{\max} \\ y_{\min} &\leq g_{dyn}(x(k), u(k)) \leq y_{\max}\end{aligned}\tag{20}$$

kde P_N je pozitívne semidefinitná váhová matica koncového stavu, Q je pozitívne semidefinitná váhová matica stavov, Q_y je pozitívne semidefinitná váhová matica výstupov, R je pozitívne definitná váhová matica vstupov a N je konečný počet krokov.

Vyriešením takto zadefinovanej optimalizačnej úlohy, ako matematickej úlohy kvadratického programovania pre rozšírený systém (14), získame regulátor pre sledovanie zvolenej referenčnej trajektórie, pričom akčný zásah v k -tom kroku je definovaný v tvare:

$$u(k) = F^r x(k) + G^r,\tag{21}$$

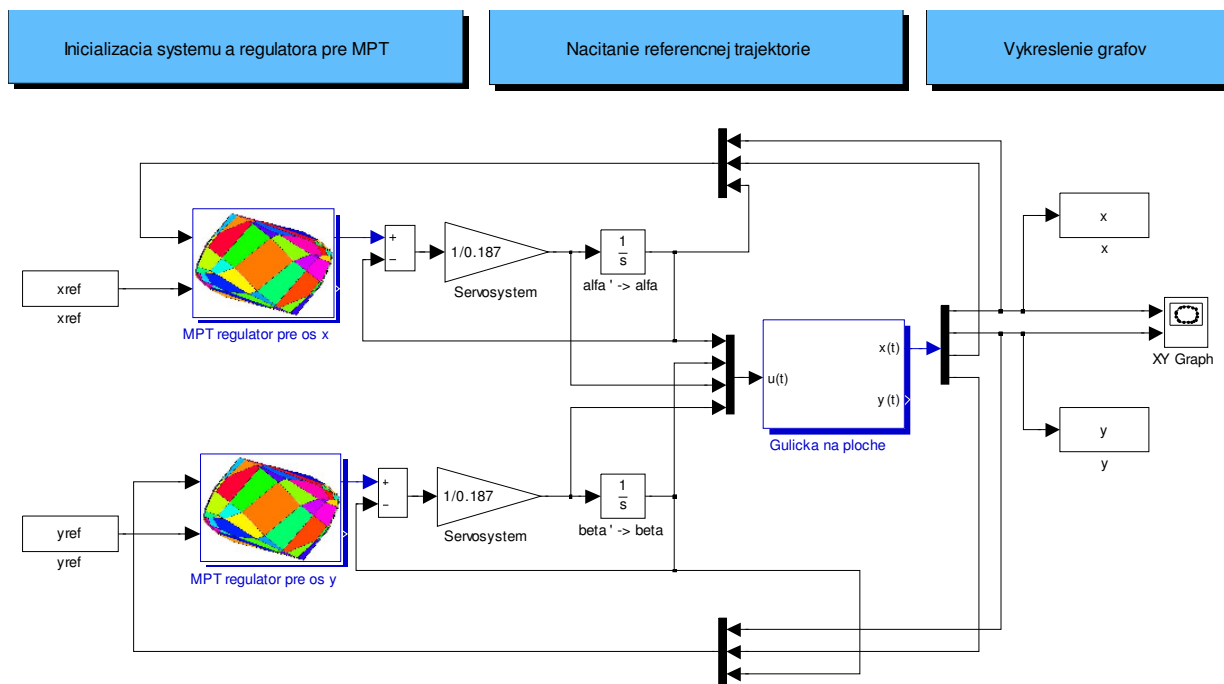
kde horný index r označuje aktívny región, t.j. región (časť) stavového priestoru, ktorý obsahuje daný stav $x(k)$. Postup na získanie akčného zásahu pre daný stav $x(k)$ sa redukuje na jednoduchý test príslušnosti do regiónu [2]. Ako náhle je región identifikovaný, je možné vypočítať akčný zásah podľa (21).

V prípade, že je problém optimalizácie formulovaný pre konečný počet krokov N , ktorý v literatúre možno nájsť pod skratkou CFTOC (Constrained Finite Time Optimal Control) - optimálne riadenie s ohraničeniami na konečnom časovom intervale, tak výpočtom akčných zásahov podľa (21) dostaneme vektor riadenia, ktorý bude minimalizovať daný funkcionál:

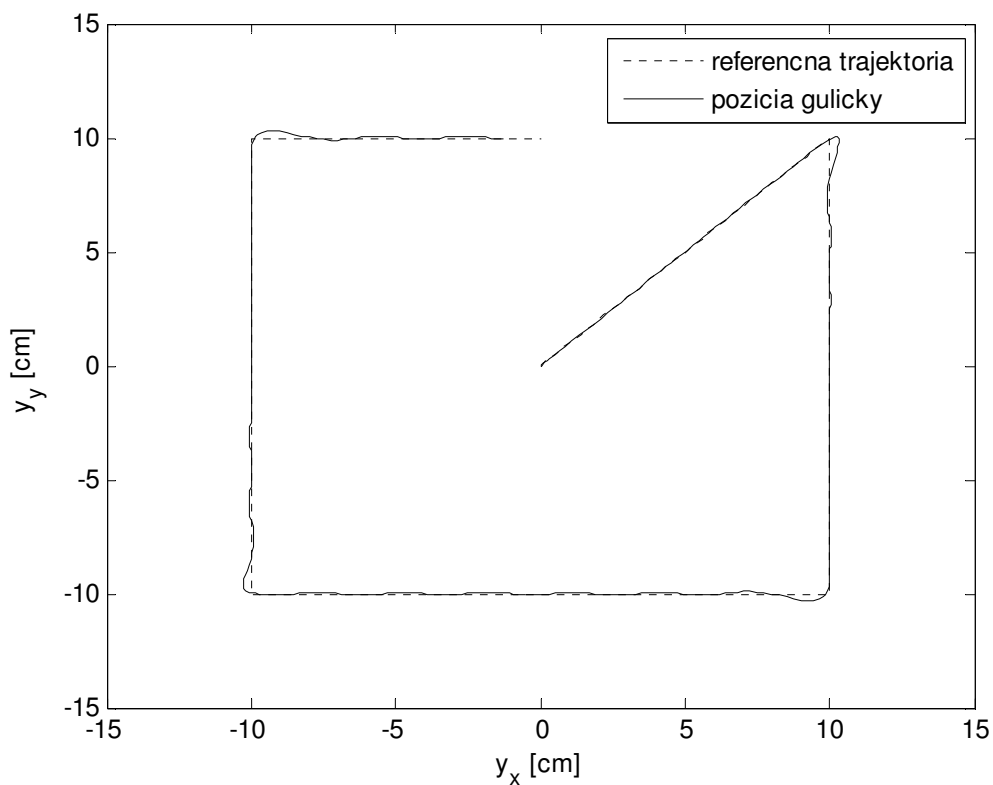
$$U = [u(0)^T \ u(1)^T \ \dots \ u(N)^T]^T\tag{22}$$

Takto off-line vypočítané akčné zásahy sú použité na riadenie systému v uzavretom regulačnom obvode, ale len prvý člen $u(0)$ postupnosti akčných zásahov je privedený na vstup systému. Táto stratégia sa nazýva metódou ustupujúceho horizontu. Podrobnejší popis algoritmov možno nájsť v [1], [4] a [5].

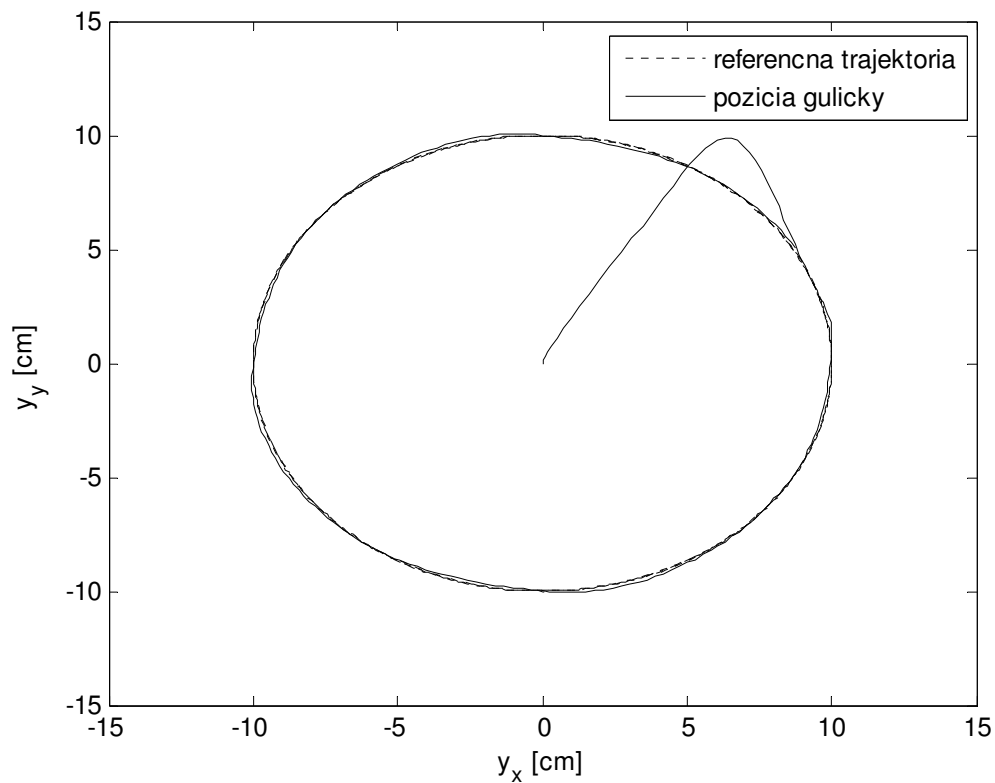
Keďže návrh regulátora realizujeme na základe linearizovaného simulačného modelu a riadime ním nelineárny simulačný model, ktorý reprezentuje len dynamiku guľičky voľne sa pohybujúcej po ploche je potrebné do návrhu simulačnej schémy – Obr. 4, zahrnúť aj dynamiku servosystému – Obr. 3. Výsledky sledovania vybranej referenčnej trajektórie rôznych tvarov je možné vidieť na Obr. 5, Obr. 6 a Obr. 7.



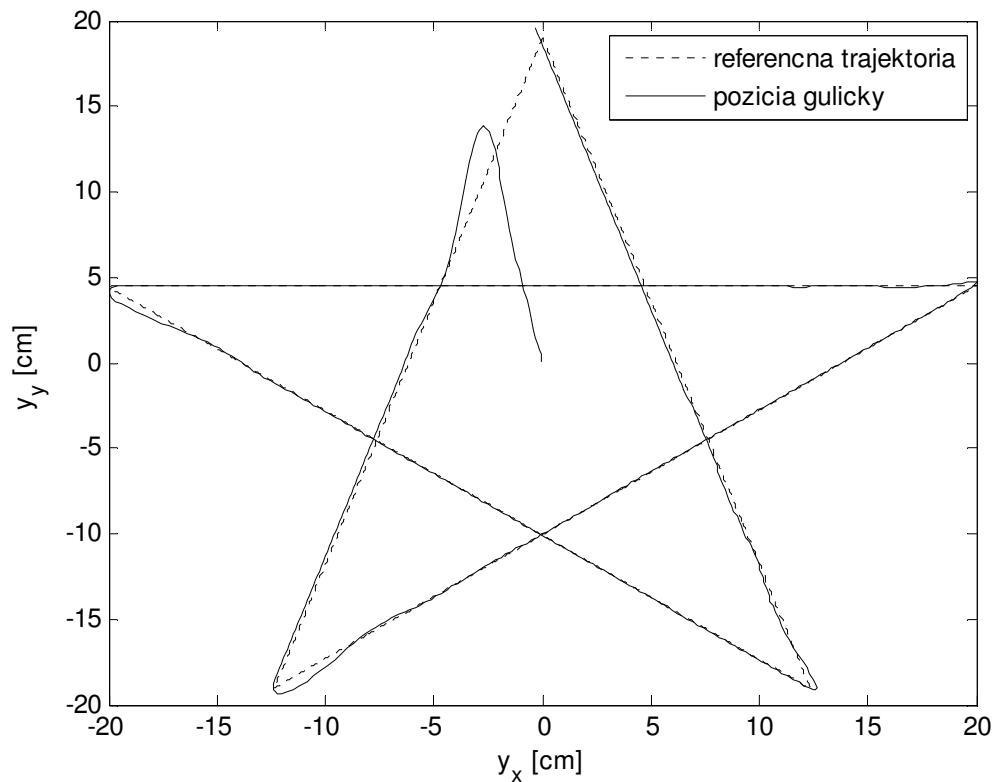
Obrázok 4: Simulačná schéma riadenia nelineárneho modelu guľička na ploche s využitím funkcií MPT Toolboxu



Obrázok 5: Pozícia guľičky na ploche pri sledovaní trajektórie štvorca



Obrázok 6: Pozícia guľičky na ploche pri sledovaní trajektórie kruhu



Obrázok 7: Pozícia guľičky na ploche pri sledovaní trajektórie hviezdy

4 ZÁVER

Tento článok poukazuje na možnosti využitia MPT Toolboxu, ako voľne dostupného rozšírenia programového prostredia Matlab na modelovanie a riadenie simulačného výukového modelu guľička na ploche. Nakoľko simulačný model vychádza z reálneho modelu, ktorý zahŕňa aj obmedzenia, dá sa na možnosť ich zadávania v tomto toolboxe pozerat' ako na výhodu. Ďalej prezentuje návrh optimálneho stavového regulátora pre sledovanie referenčnej, predpoklady pre jeho syntézu a návrh simulačnej schémy pre riadenie odvodeného simulačného nelineárneho modelu. Keďže výsledky sledovania referenčnej trajektórie pre simulačný model sú viac než dobré, ďalším dôležitým krokom bude využitie MPT Toolboxu pre riadenie reálneho výukového modelu guľička na ploche.

Na základe týchto faktov možno povedať, že MPT Toolbox poskytuje adekvátne prostriedky pre modelovanie lineárnych, nelineárnych a hybridných dynamických systémov, hlavným prínosom však stále ostáva návrh regulátorov.

POĎAKOVANIE

Tento článok bol vytvorený realizáciou projektu „Centrum informačných a komunikačných technológií pre znalostné systémy“, na základe podpory operačného programu Výskum a vývoj financovaného z Európskeho fondu regionálneho rozvoja a bol podporovaný Vedeckou grantovou agentúrou Ministerstva školstva Slovenskej republiky a Slovenskej akadémie vied na základe grantu Multiagentové sieťové riadiace systémy s automatickou rekonfiguráciou (1/0617/08).

LITERATÚRA

- [1] HUMUSOFT: „CE151 Ball and Plate Apparatus – Educational Manual“, 1996-2004
- [2] KVASNICA, M., GRIEDER, P., BAOTIĆ, M., CHRISTOPHERSEN, F. J.: Multi-Parametric Toolbox – User's Manual, Zürich, Automatic Control Laboratory (Institut für Automatik), 79 pages, 2005.
- [3] SARNOVSKÝ, J., HLADKÝ, V., JADLOVSKÁ, A., POPOVIČ, L.: Modelovanie, riadenie a simulácia výukového modelu guľička na ploche. *In Odborný seminár – Nové trendy v kybernetike, automatizácii a informatike*, 7.-9. september, ÚZ Gabčíkovo, Slovenská republika
- [4] BAOTIĆ, M.: An Efficient Algorithm for Multi-Parametric Quadratic Programming. Technical Report, Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, Švajčiarsko, Február 2002.
- [5] BEMPORAD, A., MORARI, M., DUA, V., PISTIKOPOULOS, E.N.: The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems. *Automatica*, (No. 38), 3 – 20, Január 2002