Rotasjon av Stive Legemer
Prosjektoppgave i TDAT3024

Hans J. Rivertz

8. november 2020

Innhold

1 Praktisk

1.1 Innlevering

En zip-fil som inneholder en rapport (pdf-fil) samt alle produserte filer Rapporten skal fortelle hva dere har gjort og hvordan dere har gjort det. Den skal være bygd opp med (minst) følgende kapitler.

- **Innledning** (Hvilken oppgave skal løses, og hvorfor)
- **Teori /Metode** (Hvordan er oppgaven løst – metode og teorien bak metoden. Her er det naturlig å ta utgangspunkt i dette dokumentet og læreboka, men bruk gjerne andre kilder også. Men ikke skriv av/oversett det som står, studer det slik at dere forstår det, og tenk dere deretter at dere skal forklare det til en medstudent. Husk referanser – og referanser til vitenskapelige artikler gjør seg ekstra godt.)
- **Resultater** (Gjerne inkludert tabeller og/eller figurer)
- **Diskusjon/Konklusjon** (Hvorfor blir resultatene slik som de blir? Hva ville dere forventet ut fra teorien, og hva skjer i praksis? Hva har dere lært? Har dere forslag til ting som kunne vært undersøkt videre og/eller ting som kunne vært gjort annerledes/bedre?)
- **Referanseliste** (Fullstendig URI (URL og/eller bok/artikkel-henvisning) til de og bare de referansene dere har nevnt tidligere i rapporten.)
- **Vedlegg** (Utskrift av alle programmer dere har laget)
- **Erklæring** Hver student skal levere en erklæreing på at vedkommende har samarbeidet og bidratt konstruktivt i besvarelsen. Denne skal underskrives av de andre på gruppen.

2 Introduksjon

Kilden for denne fremstillingen er boken "Physics for Science and Enginering" av Marion og Hornyak. Matematikken er hentet fra Sauer [4] og en bok av Helgasson [2]. Andre fremstillinger av matematikken bak kan også finnes i artikler av Munthe Kaas [3] som er en pionerer på området. Geometrien i prosjektet bygger på arbeidene til Sophus Lie fra Nordfjordeid.

Det er ikke meningen at dere skal forstå alt som står i dette dokumentet eller i kildene som eg har oppgitt.

3 Rotasjon av stivt legeme om dets massesenter

Vi skal se på fysikken bak et roterende stivt legeme. Grunnlaget for teorien bak ble lagt av en student i 1666-67. Hans navn var Isaac Newton. En viktig anvendelse av Newtons lover er teorien for roterende legemer. Valg av koordinatsystem som er tilpasset fysikken er avgjørende for å få likninger som er enkle. For roterende legemer passer det å bruke et koordinatsystem med origo i massesenteret til legemet M. Om legemet ikke er i ro vil posisjonen til massesenteret være en funksjon av tiden.

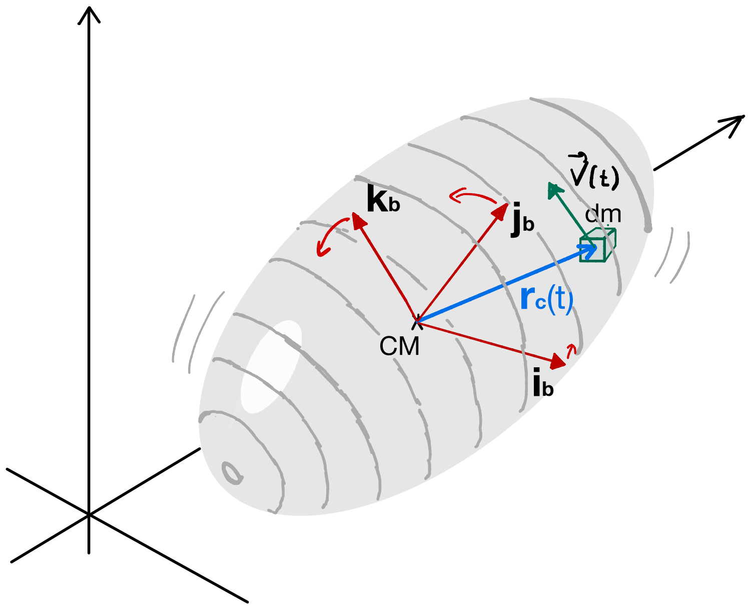
$$\vec{r}_{C.M}(t) = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r}(t)\, \mathrm{d}m. \tag{1}$$

Dere trenger ikke å kjenne til hvordan man regner ut integralet $\iiint_M$ i formelen. En forklaring av hva det betyr kan dere finne i avsnitt 6. Vektoren $\vec{r}(t)$ angir posisjonen til en liten masse $\mathrm{d}m$ og M angir legemets totale masse. Posisjonen til $\mathrm{d}m$ relativt til massesenteret er gitt ved $\vec{r}_c(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{C.M}(t)$. Dreiemomentet til legemet om massesenteret er gitt ved formelen

$$\vec{L}_c = \iiint_M \vec{r}_c(t) \times \vec{v}_c(t)\, \mathrm{d}m, \tag{2}$$

der $\vec{v}_c(t)$ er hastighetsvektoren til $\mathrm{d}m$ relativt til massesenteret. Siden M er et stivt legeme så er hastigheten til $\mathrm{d}m$ gitt ved formelen

$$\vec{v}_c(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_c(t), \tag{3}$$



Figur 1: Figur av et roterende stivt legeme formet som en ellipsoide. Massesenteret er markert med CM og vektorene som utsepenner det roterende koordinatsystemet som følger legemet.

der $\vec{\omega}(t)$ vinkelhastighetsvektoren til legemet. Vinkelhastighetsvektoren er produktet mellom enhetsvektoren $\hat{u}_\omega(t)$ normalt på rotasjonsplanet og vinkelfarten $\omega(t)$. Dreiemomentet til M er derfor

$$\vec{L}_c = \iiint_M \vec{r}_c(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_c(t))\,\mathrm{d}m, \tag{4}$$

Formelen for dreiemomentet er uavhengig av hvilket koordinatsystem vi velger med origo i massesenteret.

3.1 Koordinatsystem som følger og roterer sammen med legemet.

Det lønner seg derfor å velge et koordinatsystem der aksene er hovedaksene til treghetsmomentet til legemet. Merk at dette koordinatsystemet roterer sammen med legemet. Enhetsvektorene $\hat{\boldsymbol{\imath}}_b(t)$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b(t)$ og $\hat{\boldsymbol{k}}_b(t)$ for koordinatsystemet er derfor en funksjon av tiden. I dette koordinatsystemet er vinkelmomentet og vinkelhastighetsvektoren lik

$$\vec{L}_b = \iiint_M \vec{r}_b(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_b(t))\,\mathrm{d}m, \tag{5}$$

Vi skriver koordinatene til $\vec{L}_b$ som

$$\vec{L}_b = L_x\hat{\boldsymbol{\imath}}_b(t) + L_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b(t) + L_z\hat{\boldsymbol{k}}_b(t) \tag{6}$$

og

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{\boldsymbol{\imath}}_b(t) + \omega_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b(t) + \omega_z\hat{\boldsymbol{k}}_b(t) \tag{7}$$

Den deriverte av dreiemomentet er lik

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_b}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\imath}}_b + \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b + \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{k}}_b + L_x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\imath}}_b}{\mathrm{d}t} + L_y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b}{\mathrm{d}t} + L_z\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_b}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

Fra den generelle formelen $\frac{\mathrm{d}\vec{r}_b}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}_b$ får man $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\imath}}_b}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\imath}}_b$, $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_b}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}}_b$ og $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_b}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \hat{\boldsymbol{k}}_b$. Derfra får vi formelen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_b}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\imath}}_b + \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b + \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{k}}_b + \vec{\omega} \times \vec{L}_b. \tag{9}$$

På komponentform har vi derfor formelen for det ytre kraftmomentet

$$\begin{bmatrix}\tau_x\\ \tau_y\\ \tau_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}L_x/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}L_y/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}L_z/\mathrm{d}t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}L_x\\ L_y\\ L_z\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Vi antar at ingen ytre krefter virker på legemet. Derfor er $\begin{bmatrix}\tau_x & \tau_y & \tau_z\end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

3.2 Treghetsmoment

Vi benytter oss av formelen $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{x}) = x^2\vec{y}-\vec{x}(\vec{x}\cdot\vec{y})$ og skriver om formelen for dreiemomentet til

$$\vec{L}_b = \iiint_M r_b^2\,\vec{\omega} - \vec{r}_b(\vec{r}_b\cdot\vec{\omega}))\,\mathrm{d}m. \tag{11}$$

Vi lar $\vec{r}_b = x_b\hat{\boldsymbol{\imath}}_b(t) + y_b\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b(t) + z_b\hat{\boldsymbol{k}}_b(t)$. Da er $r_b^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2$ og $\vec{r}_b\cdot\vec{\omega} = x_b\omega_x + y_b\omega_y + z_b\omega_z$. Vi får derfor at

$$\begin{array}{rcl} L_x &=& I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z\\ L_y &=& -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z,\\ L_z &=& -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{array} \tag{12}$$

der I_{**}-ene er komponentene til treghetmomentmatrisen I.

$$\begin{array}{rclrclcl} I_{xx} &=& \iiint_M (y_b^2+z_b^2)\,\mathrm{d}m, & I_{xy} &=& I_{yx} &=& \iiint_M x_b\,y_b\,\mathrm{d}m\\ I_{yy} &=& \iiint_M (x_b^2+z_b^2)\,\mathrm{d}m, & I_{xz} &=& I_{zx} &=& \iiint_M x_b\,z_b\,\mathrm{d}m\\ I_{zz} &=& \iiint_M (x_b^2+y_b^2)\,\mathrm{d}m, & I_{yz} &=& I_{zy} &=& \iiint_M y_b\,z_b\,\mathrm{d}m \end{array} \tag{13}$$

La $\hat{\boldsymbol{\imath}}_b$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b$ og $\hat{\boldsymbol{k}}_b$ være egenvektorer til I. Da blir I diagonal.

3.3 Energien til et roterende legeme.

Den kinetiske rotasjonsenrgien til et roterende legeme med dreiemomentmoment $\vec{L}$ og rotasjonsvektor $\vec{\omega}$ er gitt ved formelen [1]

$$K = \tfrac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega}. \tag{14}$$

3.4 Bevegelsesligningene for det roterende koordinatsystemet

Bevegelseslikningene for legemet beskriver hvordan $\hat{\boldsymbol{\imath}}_b$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b$ og $\hat{\boldsymbol{k}}_b$ endres med tiden. Definisjonen av $\vec{\omega}$ gir likningene

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\imath}}_b/\mathrm{d}t &=& \omega_z\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b - \omega_y\hat{\boldsymbol{k}}_b\\ \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b/\mathrm{d}t &=& \omega_x\hat{\boldsymbol{k}}_b - \omega_z\hat{\boldsymbol{\imath}}_b\\ \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_b/\mathrm{d}t &=& \omega_y\hat{\boldsymbol{\imath}}_b - \omega_x\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b. \end{array} \tag{15}$$

Om komponentene til alle likningene skrives ut, fås 9 koblede differensiallikninger. Det er lettere implementere likningene ved hjelp av matriser. La $X = \begin{bmatrix}x_{ij}\end{bmatrix}$ være matrisen som har $\hat{\boldsymbol{\imath}}_b$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_b$ og $\hat{\boldsymbol{k}}_b$ som søylevektorer.

$$\hat{\boldsymbol{\imath}}_b = \begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\jmath}}_b = \begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{k}}_b = \begin{bmatrix}x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{bmatrix}. \tag{16}$$

X har den spesielle egenskapen at $X^T X = Id_{3\times3}$ der $Id_{3\times3}$ er identitetsmamatrisen og at $\det X = 1$. Mengden av slike matriser kalles den **spesielle ortogonale gruppen** og skrives

$$SO(3) = \{\text{Mengden av alle } 3\times3\text{–matriser } X \text{ slik at } X^T X = Id_{3\times3} \text{ og } \det X = 1\} \tag{17}$$

$SO(3)$ er det vi kaller en **Lie-Gruppe**, oppkalt etter den Norske matematikeren Sophus Lie. La $\vec{\omega}_b = \begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T$. Ved å bruke at $\vec{L} = XI\vec{\omega}_b$ er en konstant fås $\vec{\omega}_b = (XI)^{-1}\vec{L}$.

La Ω være matrisen

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Da er likningene for X og $\vec{\omega}_b$

$$\vec{\omega}_b = (X\,I)^{-1}\vec{L} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X) = X\Omega. \tag{20}$$

Husk at $\vec{L}$ er konstant og at $\vec{\omega}_b$ må skrives om til Ω. En enkel måte å finne en tilnærming av $X(t+h)$ er lineariseringen $X(t+h) \approx X(t) + X(t)h\Omega$. En ulempe med lineariseringen er at søylene i $X(t)+X(t)h\Omega$ ikke er ortogonale. Dette kan rettes på ved å bruke en annen tilnærming av $X(t)$. Det viser seg at Ω er den deriverte i $h = 0$ av følgende matrisefunksjon

$$\exp(h\Omega) = Id_{3\times3} + (1 - \cos\omega h)\frac{\Omega^2}{\omega^2} + (\sin\omega h)\frac{\Omega}{\omega}, \tag{21}$$

der $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$. Denne formelen tilfredstiller likningen $\exp(h\Omega)\exp(h\Omega)^T = Id_{3\times3}$. Det betyr at $X\exp(h\Omega)$ har ortogonale søylevektorer. Faktisk, så er

$$X\exp(h\Omega)\Big(X\exp(h\Omega)\Big)^T = X\exp(h\Omega)\exp(h\Omega)^T X^T = XId_{3\times3}X^T = XX^T = Id_{3\times3}. \tag{22}$$

4 Numeriske metoder

4.1 Eulers metode

Eulers metode er den enkleste metoden for løsning av differensiallikninger. En likning $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ løses numerisk ved å finne $\mathbf{w_i} \approx \mathbf{y}(t_i)$ der $t_i = t_0 + hi$ ved hjelp av den rekursive metoden

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \mathbf{y}(t_0) \\ \mathbf{w}_{i+1} &= \mathbf{w}_i + h\,\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i). \end{aligned} \tag{23}$$

Anvendt på eksempelet over setter vi $W_0 = X_0$ og regner videre ut $W_{i+1} = W_i + hW_i\Omega_i$.

$$\begin{aligned} W_0 &= X_0 \\ W_{i+1} &= W_i + hW_i\Omega_i \end{aligned} \tag{24}$$

I hvert ledd danner vi Ω_i fra $\vec{\omega}_i = (W_iI)^{-1}\vec{L}$. En av mange svakheter med Eulers metode at W_i ikke ikke er ortogonal. Det kan rettes opp ved å bruke en variant av Eulers metode ved følgende skjema

$$\begin{aligned} W_0 &= X_0 \\ W_{i+1} &= W_i\exp(h\Omega_i) \end{aligned} \tag{25}$$

Vi må fortsatt regne ut $\vec{\omega}_i = I^{-1}W_i^T\vec{L}$ i hvert ledd. For små h er det svært lite som skiller disse to metodene.

4.1.1 Feilanalyse av Eulers metode.

Om vi lar $Z(t)$ være den eksakte løsningen av rotasjonsproblemet med startverdi $Z(0) = W_i$, så kan vi bruke likningen til å finne alle deriverte av $Z(t)$ for $t = 0$.

$$\begin{aligned} Z'(0) &= W_i\Omega && (26)\\ Z''(0) &= W_i\Big(\Omega^2 + \Omega'(0)\Big) && (27)\\ Z'''(0) &= W_i\Big(\Omega^3 + \Omega'(0)\Omega + 2\Omega\Omega'(0) + \Omega''(0)\Big) && (28)\end{aligned}$$

Den deriverte av $\Omega(t)$ fås ved å regne ut den deriverte av $\vec{\omega}(h) = I^{-1}Z(h)^T\vec{L}$.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}'(0) &= -I^{-1}\Omega W_i^T\vec{L} && (29)\\ \vec{\omega}''(0) &= I^{-1}\Big(\Omega^2 - \Omega'(0)\Big)W_i^T\vec{L} && (30)\\ \vec{\omega}'''(0) &= I^{-1}\Big(-\Omega^3 + \Omega'(0)\Omega + 2\Omega\Omega'(0) - \Omega''(0)\Big)W_i^T\vec{L} && (31)\end{aligned}$$

Taylorrekken for $Z(h)$ er da

$$Z(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}W_i\left(\Omega^2 + \Omega'(0)\right) + O(h^3). \quad (32)$$

Leddet $O(h^3)$ står for alle ledd av tredje eller høyere grad i h. Taylorrekken for $W_{i+1}(h) = W_i\exp(h\Omega_i)$ er

$$W_i(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 + O(h^3). \quad (33)$$

Feilen i Eulers metode i hvert trinn er derfor

$$W_i(h) - Z(h) = \frac{h^2}{2}W_i\Omega'(0) + O(h^3). \quad (34)$$

4.2 Midtpunkts-metoden

I midtpunkts-metoden tas det utgangspunkt i Eulers metode. Den brukes til å finne $\vec{\omega}$ midtveis mellom W_i og W_{i+1}. Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er som følgende

1. Regn ut $\vec{\omega}_i = I^{-1}W_i^T\vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\omega}_{i+1/2} = I^{-1}\exp\Big(-\frac{h}{2}\Omega_i\Big)W_i^T\vec{L}$.
3. Regn ut $W_{i+1} = W_i\exp\Big(h\Omega_{i+1/2}\Big)$

For å regne ut feilen i midtpunkts-metoden så regner vi ut noen deriverte av W_{i+1} med hensyn på h. Vi har

$$\begin{aligned} W_{i+1}'(0) &= W_i\Omega_i && (35)\\ W_{i+1}''(0) &= W_i(\Omega_i^2 + \Omega'(0)). && (36)\end{aligned}$$

Vi har brukt at $\vec{\omega}_{i+1/2}'(0) = \frac{1}{2}\vec{\omega}'(0)$. Vi får derfor Taylorutvikling for $W_{i+1}(h)$ lik

$$W_i(h) = W_i + hW_i\Omega + \frac{h^2}{2}\Big(\Omega^2 + \Omega'(0)\Big) + O(h^3). \quad (37)$$

Feilen i midtpunktmetoden blir derfor

$$W_i(h) - Z(h) = O(h^3). \quad (38)$$

Det er det samme som feilen i den klassiske midpunktmetoden som dere finner i Sauer.

4.3 Trapes-metoden

Trapes-metoden tar også utgangspunkt i Eulers metode. Den brukes til å finne et gjenomsnitt av $\vec{\omega}$ mellom W_i og W_{i+1}. Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er som følgende

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1} W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp\Big(- h\Sigma_1\Big) W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp\Big(\frac{h}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)\Big)$

4.4 Runge-Kutta RK4

Trinnet for å finne W_{i+1} fra W_i er beskrevet i punktene 1–5 nedenfor. I hvert ledd regnes Σ_i fra $\vec{\sigma}_i$ på samme måte som Ω utregnes fra $\vec{\omega}$.

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1} W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp\Big(- (h/2)\Sigma_1\Big) W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $\vec{\sigma}_3 = I^{-1} \exp\Big(- (h/2)\Sigma_2\Big) W_i^T \vec{L}$.
4. Regn ut $\vec{\sigma}_4 = I^{-1} \exp\Big(- h\Sigma_3\Big) W_i^T \vec{L}$.
5. Regn ut $W_{i+1} = W_i \exp\Big(\frac{h}{6}(\Sigma_1 + 2\Sigma_2 + 2\Sigma_3 + \Sigma_4)\Big)$

4.5 Runge-Kutta-Fehlberg

Akurat som for standard Runge-Kutta-Fehlberg så regner vi ut to verdier og aproksimerer feilen. Skjemaet for Runge-Kutta-Fehlberg er gitt ved $\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & B \end{array} =$

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & \\
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array} \tag{39}$$

Skjemaet brukes på følgende måte

1. Regn ut $\vec{\sigma}_1 = I^{-1} W_i^T \vec{L}$.
2. Regn ut $\vec{\sigma}_2 = I^{-1} \exp\Big(- h a_{21}\Sigma_1\Big) W_i^T \vec{L}$.
3. Regn ut $\vec{\sigma}_3 = I^{-1} \exp\Big(- h(a_{31}\Sigma_1 + a_{32}\Sigma_2)\Big) W_i^T \vec{L}$.
4. Regn ut $\vec{\sigma}_4 = I^{-1} \exp\Big(- h(a_{41}\Sigma_1 + a_{42}\Sigma_2 + a_{43}\Sigma_3)\Big) W_i^T \vec{L}$.
5. Regn ut $\vec{\sigma}_5 = I^{-1} \exp\Big(- h(a_{51}\Sigma_1 + a_{52}\Sigma_2 + a_{53}\Sigma_3 + a_{54}\Sigma_4)\Big) W_i^T \vec{L}$.

6. Regn ut $\vec{\sigma}_6 = I^{-1}\exp\Big(-h(a_{61}\Sigma_1 + a_{62}\Sigma_2 + a_{63}\Sigma_3 + a_{64}\Sigma_4 + a_{65}\Sigma_5)\Big)W_i^T\vec{L}$.
7. Regn ut $W_{i+1} = W_i\exp\Big(h(b_{11}\Sigma_1 + b_{12}\Sigma_2 + b_{13}\Sigma_3 + b_{14}\Sigma_4 + b_{15}\Sigma_5 + b_{16}\Sigma_6)\Big)$
8. Regn ut $Z_{i+1} = W_i\exp\Big(h(b_{21}\Sigma_1 + b_{22}\Sigma_2 + b_{23}\Sigma_3 + b_{24}\Sigma_4 + b_{25}\Sigma_5 + b_{26}\Sigma_6)\Big)$
9. Regn også ut $\Delta W = W_{i+1} - Z_{i+1}$ og $E = \sqrt{\text{trace}(\Delta W^T\Delta W)}$. Der sporet (trace) av en matrise er summen av diagonalelementene (trace $A = a_{11}+a_{22}+a_{33}$). E er da et tilnærmet mål på feilen i utregningen av W_{i+1}.

Dere kan bruke samme metode som i Sauer til å oppdatere steglengden h ved hjelp av E og en toleranse.

5 Utledning av formelen for $\exp(h\Omega)$

For de spesielt interesserte gir jeg en slags utledning av formelen over. Vi bruker rekkeutviklingen til eksponentialfunksjonen e^x og erstatter x med $h\Omega$.

$$\begin{aligned}\exp(h\Omega) &= I_{3\times3} + h\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 + \frac{h^3}{3!}\Omega^3 + \frac{h^4}{4!}\Omega^4 + \frac{h^5}{5!}\Omega^5 + \frac{h^6}{6!}\Omega^6 + \frac{h^7}{7!}\Omega^7 + \cdots + \frac{h^n}{n!}\Omega^n + \cdots \\ &= Id_{3\times3} + h\Omega + \frac{h^2}{2}\Omega^2 - \frac{h^3}{3!}\omega^2\Omega - \frac{h^4}{4!}\omega^2\Omega^2 + \frac{h^5}{5!}\omega^4\Omega + \frac{h^6}{6!}\omega^4\Omega^2 - \frac{h^7}{7!}\omega^6\Omega + \cdots + \frac{h^n}{n!}\Omega^n + \cdots \\ &= Id_{3\times3} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} + \frac{h^2}{2}\Omega^2 - \frac{h^4}{4!}\omega^2\Omega^2 + \frac{h^6}{6!}\omega^4\Omega^2 + \cdots \\ &\quad + h\Omega - \frac{h^3}{3!}\omega^2\Omega + \frac{h^5}{5!}\omega^4\Omega - \frac{h^7}{7!}\omega^6\Omega + \cdots \\ &= Id_{3\times3} + (1-\cos\omega h)\frac{\Omega^2}{\omega^2} + (\sin\omega h)\frac{\Omega}{\omega}.\end{aligned}$$

6 Litt om integraler over masser

Tyngdepunktet til en kule ligger i dets senter. Om man har to like tunge kuler vil tyngdepunktet ligge i punktet midt mellom disse. Matematisk kan vi beskrive dette ved hjelp av vektorregning. Hvis posisjonene til de to kulene er bestemt av vektorene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ så er det felles massesenteret lik $\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Om massene er forskjellige så er det felles massesenteret lik

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{40}$$

For flere masser $m_1, m_2, m_3, \cdots m_N$ er massesenteret lik

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\vec{r}_i. \tag{41}$$

For et kontinuerlig legeme med masse M så tenker vi oss at ve deler opp legemet i mange små deler Δm_i, hver med massesenter $\vec{r}_i$.

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M}\sum_i^N \vec{r}_i\Delta m_i. \tag{42}$$

Når N går mot uendelig, kaller vi grensen for et trippel integral. Vi skriver dette på formen som

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r}_i \,\mathrm{d}m. \tag{43}$$

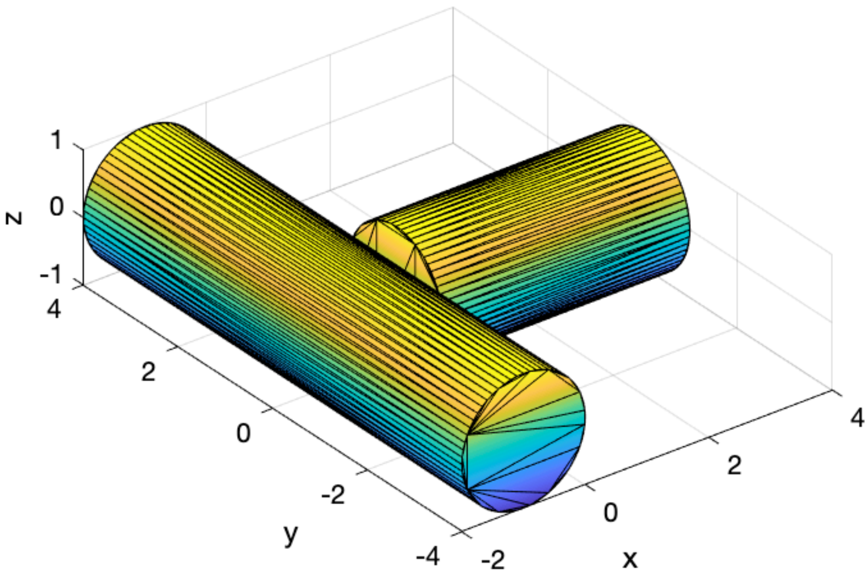
På komponent form får er massesenteret gitt ved

$$\left[\frac{1}{M}\sum_i^N x_i \Delta m_i, \frac{1}{M}\sum_i^N y_i \Delta m_i, \frac{1}{M}\sum_i^N z_i \Delta m_i\right]. \tag{44}$$

Et legeme som roterer om x aksen med vinkelhastighet ω har hastigheten $\vec{v} = \omega(0, -z, y)$. Dreiemomentet om origo til massen m er $m\vec{r} \times \vec{v} = m(x, y, z) \times (0, -z, y) = m(y^2 + z^2, -xz, -xy)$. Samlet dreiemoment for et legeme som roterer om x-aksen er

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \omega(y_i^2 + z_i^2, -x_i z_i, -x_i y_i)\Delta m_i. \tag{45}$$

7 Treghetsmoment til en T-nøkkel



Figur 2: Figuren viser en modell av T-nøkkelen. Målene på aksene er i cm.

En T-nøkkel har følgende dimensjoner. Håndtaket har form av en sylinder med lengde $L_1 = 8\,\mathrm{cm}$ og radius $R_1 = 1.0\,\mathrm{cm}$. En sylinder med lengde $L_2 = 4.0\,\mathrm{cm}$ og radius $R_2 = 1.0\,\mathrm{cm}$ er festet midt på håndtaket og står vinkelrett på dette. Massetettheten til begge sylinderne er $\rho = 6.7$ gram per kubikkcentimeter. La håndtakets akse ligge parallelt langs y-aksen og la den andre sylinderen akse ligge langs x-aksen. Massesenteret til håndtaket ligger i punktet $x = -1.0\,\mathrm{cm}$ på x-aksen og massesenteret til den andre sylinderen ligger i punktet $x = 2.0\,\mathrm{cm}$ på x-aksen. Massen til T-nøkkelen er $M = 12\pi\rho \approx 253$ gram. Massesenteret til T-nøkkelen ligger i origo. Treghetsmomentet til nøkkelen er gitt ved

$$I_{xx} = \frac{M_1 R_1^2}{4} + \frac{M_1 L_1^2}{12} + \frac{M_2 R_2^2}{2} \tag{46}$$

$$I_{yy} = M_1R_1^2 + \frac{M_2L_2^2}{4} + \frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{M_2R_2^2}{4} + \frac{M_2L_2^2}{12} \tag{47}$$

$$I_{zz} = M_1R_1^2 + \frac{M_2L_2^2}{4} + \frac{M_1R_1^2}{4} + \frac{M_1L_1^2}{12} + \frac{M_2R_2^2}{4} + \frac{M_2L_2^2}{12} \tag{48}$$

og $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, der M_1 er massen til håndtaket og M_2 er massen til den andre delen.

8 Oppgaver

Oppgave 1. I denne oppgaven skal dere implementere funksjoner dere trenger.

a) Implementer eksponentfunksjonen i likning (21). Input skal være en matrise på formen (18). Funksjonen bør ta inn både h og Ω som input. Lag et testprogram som sjekker om output X er en matrise som oppfyller kravet $X^TX = Id_{3\times 3}$.

b) Implementer en funksjon som regner ut energien til et roterende legeme som har treghetsmoment I og rotasjonsvektor $\vec{\omega}$. Denne vil dere trenge til å sjekke om simuleringene bevarer energien til T-nøkkelen. (PS! trenger også X).

c) Regn ut treghetsmomentet til T-nøkkelen ved å bruke formelen i forige avsnitt.

Oppgave 2. Gitt spesialtilfellet der legemet er en kule. Dere kan da anta at treghetsmomentet er lik identitetsmatrisen. La også startbetingeslen til $X(t)$ være lik identitetsmatrisen. Dvs. $X(0) = Id_{3\times 3}$. La $\vec{L} = (1, 0, 0)$. Løs likningene (19) og (20) eksakt.

Oppgave 3. Implementer varianten av Eulers metode gitt i likning (25) i avsnitt 4.1. Og test metoden på systemet som består av likningene (19) og (20). (Hint: Løs oppgave 2 nummerisk og sammenlign med eksakt løsning.)

Oppgave 4. Implementer varianten av RK4-metoden beskrevet i avsnitt 4.4. Dere kan om dere vil implementere varianten av Runge Kutta Fehlberg-metoden (RKF45) som er beskrevet i avsnitt 4.5. Vær nøye på å implementere metoden nøyaktig slik den står. En liten feil i koefisientene vil gjøre metoden omtrent like unøaktig som Eulers metode.

Oppgave 5. Bruk implementeringen av RK4 eller RKF45 til å løse systemet. Benytt treghetsmomentent til T-nøkkelen som ble utregnet i tidligere oppgave. Bruk $X(0) = Id_{3\times 3}$, (3×3 identitetsmatrisen). Beregn $\vec{L}$ slik at $\vec{\omega}(0)$ har lengde ca lik 1 ved tiden 0. Kjør eksperimentet med

a) $\vec{\omega}(0) = [1, 0.05, 0]^T$

b) $\vec{\omega}(0) = [0, 1, 0.05]^T$

c) $\vec{\omega}(0) = [0.05, 0, 1]^T$

Steglengden lar dere være så liten at energen ikke endrer seg nevneverdig.

Oppgave 6. Tegn opp komponentene til løsningene X fra oppgave 5 som ni funksjoner av tiden.

Gi en tolkning av disse grafene. Alternativt kan dere lage en 3-D animasjon av T-nøkkelen som roterer.

9 Evaluering

Prosjektet teller 20 %[1] av karakteren, og det er rapporten (både innhold og form) som danner grunnlaget for prosjektkarakteren.

Referanser

[1] Feynman, R.P. med flere: The Feynman Lectures in Physics, bind I, side 20-8 i kapittel 20, (1963) Basic Books, New York.

[2] Helgason, S.: Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Pure and Applied Mathematics. Academic Press (1978)

[3] Munthe-Kaas, H.Z., Zanna, A.: Numerical integration of differential equations on homogeneous manifolds. In: F. Cucker, M. Shub (eds.) Foundations of Computational Mathematics, pp. 305–315. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (1997)

[4] Sauer, T.: Numerical Analysis. Pearson Education Ltd., Harlow, Essex, (2014).

[5] Celledoni E., Marthinsen H., Owren B.: An introduction to Lie group integrators – basics, new developments and applications, Journal of Computational Physics 257 pp. 1040–1061, (2014)

[1] Eksamen i matematikkdelen teller 30%, Eksamen i fysikkdelen teller 50%