Midtsemesterprøve
MA1201 Lineær algebra og geometri
Tirsdag 4. oktober 2011
Kl. 14:15-15:45
Bokmål

Faglig kontakt: Øyvind Solberg (735) 91748

Hjelpemidler: Bestemt enkel kalkulator.

Kandidatnummer:

Prøven består av 10 flervalgsoppgaver, der oppgave 4 har 2 deloppgaver og oppgave 5 har 3 deloppgaver. Du skal sette nøyaktig to kryss på oppgave 7, og nøyaktig ett kryss på de andre oppgavene eller deloppgavene (gjelder oppgave 4 og 5). Lykke til!

Oppgave 1. Hva er redusert (rad-)trappeform til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}?$$

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 2. Nøyaktig én av 3×1-matrisene under er en løsning av det lineære ligningssystemet $(*)$. Hvilken?

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} \frac{74}{33} \\ -\frac{34}{33} \\ -\frac{31}{33} \end{bmatrix}$

Oppgave 3. Totalmatrisen til et lineært ligningssystem er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & b_1 \\ 4 & -5 & 6 & b_2 \\ -5 & 3 & -3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Hvis $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ opptrer som en rad i redusert (rad-)trappeform av totalmatrisen over, hva betyr det?

A Ligningssystemet har ingen løsning.
B Ligningssystemet har nøyaktig én løsning.
C Ligningssystemet har uendelig mange løsninger.
D Ligningssystemet har nøyaktig én løsning eller uendelig mange løsninger.
E $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.

Oppgave 4. Hvis totalmatrisen til et lineært ligningssystem har den gitte redusert (rad-)trappeformen, hvor mange løsninger har det tilhørende lineære ligningssystemet?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A Ingen løsning.
B Nøyaktig én løsning.
C Uendelig mange løsninger.
D Ligningssystemet har nøyaktig én løsning eller uendelig mange løsninger.
E Ligningssystemet har ingen løsning eller nøyaktig én løsning.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A Ingen løsning.
B Nøyaktig én løsning.
C Uendelig mange løsninger.
D Ligningssystemet har nøyaktig én løsning eller uendelig mange løsninger.
E Ligningssystemet har ingen løsning eller nøyaktig én løsning.

Oppgave 5. Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Hva er de følgende matrisene?

A^T	A	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
	B	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	C	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$A+B$	A	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	B	$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
	C	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$
$AB-BA$	A	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
	B	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	C	$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 6. La A være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -9 \end{bmatrix}$. Hva er inversen A^{-1} til matrisen A?

A $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ C A er ikke invertibel.

D $\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ E $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 7. Hvilke to påstander er rette?

A Alle elementære matriser er nedre triangulære.

B Dersom A er en triangulær matrise og D er en diagonal matrise av samme størrelse, så er $AD = DA$.

C Multiplikasjon av matriser er assosiativ, dvs. $A(BC) = (AB)C$ for alle matriser A, B og C av rett størrelse.

D En kvadratisk matrise A er invertibel hvis og bare hvis determinanten til A er forskjellig fra null.

E Alle symmetriske matriser er invertible.

Oppgave 8. Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hva er determinanten til A?

A 0 B -1 C -2 D -3 E -4

Oppgave 9. La A og B være to $n \times n$-matriser. Nøyaktig ett av argumentene under er et korrekt bevis for påstanden: "Hvis AB er invertibel, så er også A og B invertible." Hvilket?

A AB invertibel $\Rightarrow (AB)(AB)^{-1} = I_n \Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \Rightarrow A(BB^{-1})A^{-1} = I_n \Rightarrow AI_nA^{-1} = I_n \Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow A$ invertibel. På tilsvarende måte får vi at B er invertibel.

B Anta at A eller B (eller begge) ikke er invertibel. Hvis A ikke er invertibel, har vi at $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0 \Rightarrow AB$ ikke invertibel. Hvis B ikke er invertibel, har vi $\det(B) = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0 \Rightarrow AB$ ikke invertibel.

C Anta at A og B er invertible. Da er $\det(A) \neq 0$ og $\det(B) \neq 0$. Dermed er $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, og det medfører at AB er invertibel.

D Anta at A og B ikke er invertible. Da er $\det(A) = 0 = \det(B)$. Så $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$, som igjen medfører at AB ikke er invertibel.

Oppgave 10. La A være en $m \times n$-matrise. Hvis det eksisterer en $n \times m$-matrise B slik at $BA = I_n$, hva sier dette om antall løsninger av det lineære ligningssystemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ for en gitt $m \times 1$-matrise $\mathbb{b}$?

A Ingen løsning.
B Nøyaktig én løsning.
C Uendelig mange løsninger.
D Ingen løsning eller nøyaktig én løsning hvis $AB\mathbb{b} = \mathbb{b}$.
E Uendelig antall løsninger eller nøyaktig én løsning hvis $AB\mathbb{b} = \mathbb{b}$.