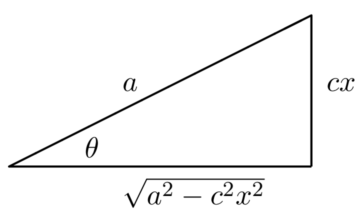
# 9

January 18, 2006

$$\int \sqrt{a^2 - bx^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Vi begynner med å gjøre det litt enkelt for oss selv ved å sette inn $b = c^2$. Så kikker vi nok en gang på en figur, og substituerer vi med følgende:




$$x = \frac{a}{c}\sin\theta \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{c}\cos\theta \tag{3}$$

Og med det samme vi er i gang merker vi oss at

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - c^2x^2}}{a} \tag{4}$$

$$\theta = \arcsin\frac{c}{a}x \tag{5}$$

Vi setter inn, og får

$$\int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\frac{a}{c}\cos\theta\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$= \frac{a^2}{c} \int \cos^2 \theta \mathrm{d}\theta \tag{7}$$

$$= \frac{a^2}{c} \int \left( \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \right)^2 \mathrm{d}\theta \tag{8}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \int \left( e^{2\mathrm{i}\theta} + e^{-2\mathrm{i}\theta} + 2 \right) \mathrm{d}\theta \tag{9}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \left( \frac{1}{2\mathrm{i}} e^{2\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{-2\mathrm{i}} e^{-2\mathrm{i}\theta} + 2\theta \right) + C \tag{10}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \left( \sin 2\theta + 2\theta \right) + C \tag{11}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \left( 2 \sin \theta \cos \theta + 2\theta \right) + C \tag{12}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \left( 2 \frac{c}{a} x \frac{\sqrt{a^2 - c^2 x^2}}{a} + 2 \arcsin \frac{c}{a} x \right) + C \tag{13}$$

$$\int \sqrt{a^2 - bx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - bx^2} + \frac{a^2}{2\sqrt{b}} \arcsin \frac{\sqrt{b}}{a} x + C \tag{14}$$

Hoihoi, det var jammen ikke småtterier. Men ganske mandig. Håper ikke Kristian ler av meg og viser meg hvordan man kan gjøre dette med to enkle håndgrep. I morgen:

$$\int \cos 5x \cos x \mathrm{d}x \tag{15}$$