Er smultringen krum?

Tor Nordam

30. mars 2008

Nå som vi er så godt i gang med Christoffelsymboler og barsk geometri, er vi i en gunstig posisjon i forhold til å få svar på en gåte som har plaget menneskeheten helt siden Hansen Gregory fant opp smultringen i 1847, nemlig om smultringen er krum eller ikke.

Vi ser på en smultring med stor radius R og liten radius r, der posisjonsvektoren er $x = (\theta, \varphi)$. Linjeelementet på overflaten av en slik smultring er gitt ved

$$\mathrm{d}s^2 = \Big(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi\Big)\mathrm{d}\theta^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 \tag{1}$$

og metrikken[1] er

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vi ser at de eneste Christoffelsymbolene som kan bli noe annet enn null, er de som har indeksene 112. Vi setter inn og regner ut på samme måte som sist, og får:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2g_{11}} g_{11,2} \\ &= \frac{Rr\sin\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi} \end{aligned} \tag{3}$$

og

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{11} &= -\frac{1}{2g_{22}} g_{11,2} \\ &= -\frac{Rr\sin\varphi}{r^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Riccitensoren, som er gitt ved Christoffelsymbolene som

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\gamma_{\mu\nu,\gamma} - \Gamma^\gamma_{\mu\gamma,\nu} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\Gamma^\delta_{\gamma\delta} - \Gamma^\gamma_{\mu\delta}\Gamma^\delta_{\nu\gamma}, \tag{5}$$

blir da

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^2_{\mu\nu,2} - \Gamma^1_{\mu1,\nu} + \Gamma^2_{\mu\nu}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{\mu1}\Gamma^1_{\nu1} - \Gamma^1_{\mu2}\Gamma^2_{\nu1} - \Gamma^2_{\mu1}\Gamma^1_{\nu2}. \tag{6}$$

[1] Her bruker jeg greske indekser i stedet for latinske, selv om det er konvensjon å bruke latinske når man kun har rom-koordinater. Dette er for å kunne klippe og lime fra ting jeg har skrevet allerede, og dermed spare tid.

Vi går til verks med rå makt, og regner ut hver av de fire komponentene til $R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma^2_{11,2} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} \\
&= -\frac{R\cos\varphi}{r} + \frac{R^2\sin^2\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi} && (7) \\
R_{12} &= 0 && (8) \\
R_{21} &= 0 && (9) \\
R_{22} &= -\Gamma^1_{21,2} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21} \\
&= \frac{Rr\cos\varphi(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi) - 2R^2r^2\sin^2\varphi}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi)^2} \\
&= \frac{R^2 + r^2 - 2R^2r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi)^2} && (10)
\end{aligned}$$

Så hva forteller dette oss? Jeg er sannelig ikke sikker, men jeg tror i alle fall vi kan slå fast at smultringen ikke oppfyller Einstein-ligningen for vakuum. Om det betyr at den er krum eller ikke vet jeg rett og slett ikke. Det er imidlertid mulig å lage en 1 til 1 funksjon fra en torus og til et rektangel i planet uten å komme borti noen singulariteter eller noe tull, og det taler jo for at den er flat. Jeg tror rett og slett dette spørsmålet vil forbli ubesvart en stund til.