

Øving 7

Oppgave 1

Funksjonen: $\phi(x, z) = \ln[(x^2 + z^2)^{1/2}]$ er gitt.

- a) Vis at ϕ er et potensial.

Tips: Undersøk om $\nabla^2 \phi = 0$

- b) Finn hastighetskomponentene u og w . Er hastighetsfeltet singulært noe sted?

- c) Vis at resultanten av u og w er rettet radielt utover fra origo og har størrelsen

$$u_r = r^{-1} = (x^2 + z^2)^{-1/2}$$

Tips: For å finne strømrretningen tegn opp hastighetsvektoren i punktet (x, z) og finn tangenten til vinkelen denne danner med en linje parallell med x -aksen.

- d) Hvor stort væskevolum strømmer det ut pr. sekund gjennom overflaten til en sylinder med radius r om origo, og høyde $y=1$ normalt på planet som strømmingen foregår i?

- e) Kan du fra c) direkte se at strømmen er rotasjonsfri og fra d) at kontinuitet er oppfylt. Hvis svaret er ja på begge disse spørsmålene, hva kan du da si om strømmen?

- f) En slik strøm rett utover til alle sider fra ett punkt kalles en *kilde*. Hvis strømmen er rettet innover mot ett punkt, kalles den et *sluk*. Forklar kort og upresist, hvorfor dette er naturlige navn på slike strømmer.

Oppgave 2

Gitt en bølgesituasjon med regulære "sinusbølger". Vanddyppet er 300 m, bølgeperioden er 12 s, og bølgehøyden ($H=2a$) er 7 m.

- Hvor stor blir bølgelengden på uendelig vanddyp, L_0 ?
- Karakteriser vanddyppet for situasjonen som er beskrevet i oppgaveteksten.
- Finn maksimalverdiene av partikkelhastighetene u , w og akselerasjonene \dot{u} , \dot{w} ved følgende dyp:

$$z = \begin{array}{l} 0 \text{ m} \\ -10 \text{ m} \\ -100 \text{ m} \end{array}$$

- Finn bølgens fasehastighet ("forplantningshastighet") og gruppehastigheten til en gruppe av disse bølgene.

Bølgegruppen beveger seg inn mot kysten og grunnere vann:

- Finn bølgelengden på 14 m dyp. ($d_2=14$)
- Karakteriser vanddyppet i denne situasjonen.
- Finn maksimalverdiene av horisontal partikkelhastighet u og akselerasjonen \dot{u} som funksjon av dybden z idet du antar at bølgehøyden fortsatt er 7 m. Finn de samme størrelsene for $z = -10$ m.
- Skriv ned uttrykket for en sinusbølge som forplanter seg mot venstre, dvs. i retning av negativ x-akse. Kan du for eksempel fra fig.5.1 i kompendiet si hvilken vei partikkelhastigheten under en bølgetopp går, for en bølge mot høyre? Hvilken retning har partikkelhastigheten like under en bølgetopp for en bølge som går mot venstre?

Oppgave 3 (Frivillig)

I en bølge på dypt vann gjelder

- 1) $\nabla^2 \phi = 0$ i væska
 - 2) Den lineariserte fri overflatebetingelsen er $\partial^2 \phi / \partial t^2 + g \partial \phi / \partial z = 0$ ved $z=0$
 - 3) $\phi=0$ ved $z \rightarrow -d$
- a. Finn hvilke partikkelhastigheter en har dypt nede i vannet, i følge 3), og kommenter dette resultatet.
- b. Ta utgangspunkt i uttrykket $Z'' - k^2 Z = 0$, (kompendiets (4.4)) Løs dette og uttrykk løsningen ved hjelp av $\exp(z)$ og $\exp(-z)$. Bruk 2) ovenfor til å forenkle uttrykket. Vis at (4.5) gir samme uttrykk (bortsett fra konstanten) dersom $|kz| \ll kd$ og $(kd) \rightarrow -\infty$. (k er positiv)
- c. Vis at $\phi = A \exp(kz) \cos(kx + \theta_1) \cos(\omega t + \theta_2)$ tilfredsstiller 1), 2) og 3) over for en spesiell relasjon mellom ω og k . Angi denne relasjonen.
- d. Ved $x=0$ er det en vertikal vegg. Sett opp grensebetingelsene som må gjelde ved veggens og bestem θ_1 i løsningen over.
- e. Anta at overflatehevingen $\eta(x, z)$ ved veggens har sitt maksimum ved tidspunktet $t=0$ og bestem θ_2 i løsningen over. Tips: Overflatehevingen er relatert til potensialet via ligning (3.7) i kompendiet.
- f. Overflatehevingen er maksimalt lik η_0 . Finn et uttrykk for den horisontale partikkelhastigheten i væska.