

TVM 4116 Hydromekanikk, del 2 og 4  
Nils Reidar B. Olsen  
2019



# Introduksjon

Denne boken er laget fra forelesningsnotater i faget TVM 4116 Hydromekanikk.

Hydromekanikk faget bygger på flere forskjellige vitenskaper som omhandler strømming av vann. En av vitenskapene er fluidmekanikk, som har fokusert på beskrivelse av strømming ved hjelp av komplekse differensialligninger. Tidlig arbeide ble gjort i Frankrike av Prof. Claude Louis Marie Henri Navier, som var professor ved École Polytechnique in Paris fra 1819 til 1831. Han utledet Navier-Stokes ligninger i 1822. Disse ligningene beskriver fluidbevegelser i en generell tredimensjonal geometri. Uheldigvis viste det seg vanskelig å løse ligningene analytisk for en kompleks geometri. Det utviklet seg derfor en annen vitenskap, Hydraulikk, som var mer orientert mot løsninger av praktiske problemer for ingeniørmessige formål. Hydraulikken bruker enklere algebraiske formler med empiriske konstanter. Fysiske modellforsøk er utbredt innen hydraulikken, både til kalibrering av formlene og til å bestemme komplekse strømningsforhold.

På det tidligere NTH var disse to vitenskapene også representert i to fag: Mekanikk 2, som bestod av fluidmekanikk og som ble undervist av Institutt for mekanikk og faget Hydraulikk som ble forelest av Vassdragsteknikkgruppen (VT) ved Institutt for vann og miljøteknikk. På 1990-tallet ble disse fagene slått sammen til faget Hydromekanikk. En tok også med endel bølgeteori som ble forelest av en gruppe innen Marin byggtteknikk (MB). Dagens fag foreleses i like store deler av VT og MB.

Hydromekanikk faget er unikt for studieretning Bygg og miljøteknikk siden dette foreleses i stedet for et fluidmekanikk fag. De andre ingeniør-studieretningene ved NTNU har fremdeles et fluidmekanikk fag. Forskjellen mellom dette faget og Hydromekanikk er for det første at Hydromekanikk inneholder mer hydraulikk, dvs. praktiske formler for løsning av ingeniørmessige problemer. Det inneholder også bølgeteori, som ikke er med i alle fluidmekanikk-fagene. Og siden det er mer hydraulikk og bølgeteori, blir det mindre plass til klassisk fluidmekanikk. Hydromekanikk faget inneholder også laboratorieøvinger.

I de siste 30 årene har en hatt en stor utvikling av kapasiteten på datamaskiner, som gjør at det nå er mulig å løse Navier-Stokes ligninger for komplekse praktiske problemer. Denne vitenskapen heter numerisk strømningsmekanikk, eller Computational Fluid Dynamics (CFD) på engelsk. CFD ble tatt i bruk av maskiningeniører for mange år siden, men den er enda ikke helt tatt i bruk innen byggfagene. Dette fagfeltet vil revolusjonere strømningsberegninger innen byggfagene i årene som kommer. Denne utviklingen er noe dagens bygg-studenter kan være med på. Resultater fra CFD beregninger vil også i utstrakt grad bli benyttet i faget Hydromekanikk for å illustrere forskjellige strømningsfenomener.

Hydromekanikk faget kan deles i fire deler, der Marin byggtteknikk (MB) og Vassdragsteknikk (VT) foreleser to deler hver:

Del 1. Hydrostatikk, foreleses av MB

Del 2. Grunnligninger fra fluidmekanikk, foreleses av VT

Del 3. Dimensjonsanalyse, strømming rundt objekter og bølgeteori. Foreleses av MB

Del 4: Rørstrømming og strømming med fritt vannspeil, klassisk hydraulikk. Foreleses av VT

Dette kompendiet omhandler kun del 2 og 4 av faget.

Praktisk informasjon om dette kompendiet: Etter noen overskrifter er det henvisning til et sidetall i fra læreboken "Engineering Fluid Mechanics". 8. og 9. utgave av denne boken er forfattet av Crowe et al, mens 10. utgave er forfattet av Elger et al. Det andre tallet etter sidehenvisningen er hvilken utgave av boken som menes. For eksempel: (81-8, 78-9) menes side 81 i 8. utgave av boken og side 78 i 9. utgave.

# Innholdsfortegnelse

## Innholdsfortegnelse

Introduksjon.....	2
Innholdsfortegnelse.....	4
Del 2. Grunnlikninger.....	6
Bruk av ligningene.....	6
Kapittel 4. Fluidbevegelser.....	8
4.1 Strømningbeskrivelse.....	8
Strømlinjer.....	9
Metoder for analyser av strømningsmønstre.....	10
Eksperimentelle metoder.....	10
Numerisk strømningsmodellering: Computational Fluid Dynamics (CFD).....	11
Uniform og stasjonær strømning.....	12
Laminær og turbulent strømning.....	12
Reynolds tall.....	13
Eksempel:.....	14
4.4 Akselerasjon.....	15
4.6 Bernoullis ligning.....	17
Eksempel på bruk av Bernoullis ligning: Pitot rør.....	20
4.8 Rotasjon og hvirvling.....	22
4.10 Separasjon.....	23
Kapittel 5. Kontrollvolummetoden og kontinuitet.....	25
Lagrangsk/Eulerisk referansesystem.....	25
5.1 Vannføringer og hastighetsfordelinger.....	26
Massestrømmer.....	27
5.2 Kontrollvolum metoden.....	28
Hastighets og arealvektorer.....	28
Utledning av Reynolds Transport Teorem.....	29
5.3 Kontinuitetslikningen.....	30
5.5 Kavitasjon.....	32
5.5 Kontinuitetslikningen på differensialform.....	34
Kapittel 6. Kraftlikevekt.....	36
6.2 Utledning av Impulssatsen.....	36
6.3+4 Eksempler.....	38
6.6. Navier-Stokes ligninger.....	41
Kapittel 7. Energibetraktninger.....	46
7.1+2 Utledning av energilikningen.....	46
7.4. Effekt og energi.....	49
7.7 Singulærtap.....	50
Tapskoeffisienter.....	51
Del 4: Rør og frispelstrømning (Kapittel 9, 10 og 15).....	54
Kapittel 9 og 10 Rørstrømning.....	54
Skjærspenning på rørvegg.....	55
Hastighetsfordeling i rør med laminær strømning.....	56

Formel for friksjonstap i laminær strømning.....	57
Beskrivelse av turbulens.....	59
Turbulent skjærspenning.....	60
Hastighetsprofiler for turbulent strømning.....	61
Friksjonstap for rør med turbulent eller laminær strømning.....	63
Ikke-runde rør.....	67
Mer om singulærtap.....	67
Kontraksjonskoeffisienter.....	68
7.8 Energilinjer og trykklinjler.....	71
Kapittel 15 Frispeilstrømning.....	75
Introduksjon.....	75
Klassifikasjon av frispeilstrømning:.....	76
Hydraulisk radius for en kanal.....	77
Chezy's formel.....	77
Manning's formel.....	77
Vannstandssprang og overløp, Froude tallet.....	80
Overgang mellom over og underkritisk strømning.....	84
Overløp.....	84
Kanalendringer.....	87
Vannstandssprang.....	88
Formel for vannstandssprang.....	89
Klassifisering av vannstandssprang.....	92
Når bruker vi de forskjellige formlene?.....	93
Appendix I Utleddning av spenningsrelasjoner.....	94

## Del 2. Grunnligninger

I denne delen av faget utleder vi grunnligningene for fluidstrømning. Disse ligningene kan være på differensialform og gjelde for en generell 3D geometri, eller de kan være på integralform der de er forenklet til endimensjonal situasjon. Utledningen av ligningene bygger på forskjellige fysiske lover, enten

- Kontinuitet av vann i et volum: Like mye vann strømmer inn som ut
- Kraftbalanse: Newtons 2. lov: Summen av krefter = masse ganger aksellerasjon
- Energibevarelse langs en strømlinje.

De to siste av disse lovene gjelder også for faststoffmekanikk/dynamikk, og de er ofte brukt innen andre fag.

Navnet på en ligning kan være forskjellig om den er på integralform eller på differensialform. Tabellen under gir navnet på ligningene, og klassifiserer de etter hvilken lov de bygger på.

Lov	Faststoffmekanikk	Fluidmekanikk Integralform	Fluidmekanikk Differensialform	Kapittel i lærebok
Kontinuitet		Kontinuitetsligningen	Kontinuitetsligningen	5
Newtons 2. lov	$F=ma$	Impulssatsen	Navier-Stokes ligninger	6
Energibevarelse	$E=1/2 mv^2+mgh$	Bernoullis ligning Energiligningen	Turbulensmodeller (Ikke pensum)	4 og 7

## Bruk av ligningene

Her er en liste over eksempler på hva en kan bruke ligningene til. Ligningene brukes direkte til løsning av slike problemer i konsulentfirmaer og andre organisasjoner som arbeider med hydraulikk og strømning. Problemstillingene finnes også igjen i øvingene i faget og på eksamen.:

1. Finne krefter på: opplagringspunkter for rør, brokar, sylindre etc.
2. Finne nødvendig pumpeeffekt for å pumpe vann fra ett sted til et annet.
3. Finne energitap i rør og bend
4. Finne nødvendig diameter på rør for å transportere vann fra ett sted til et annet
5. Finne ruheten på rør for et gitt friksjonstap
6. Finne effekt av vannkraftverk
7. Undersøke fare for kavitasjon
8. Undersøke fare for oversvømmelse
9. Designe ventilasjonssystemer

10. Beregne vindkrefter på bygninger, broer, oljeplattformer etc.

Vi har kun 12 timer til å gå igjennom kapittel 4-7. Dette er ikke nok tid til å dekke alt, slik at vi vil gjøre et utvalg av stoffet i boka. Vi vil gå igjennom endel eksempler på bruk av ligningene i del 2 av faget, men det vil bli mange flere eksempler på bruk av disse ligningene i del 4 av faget.

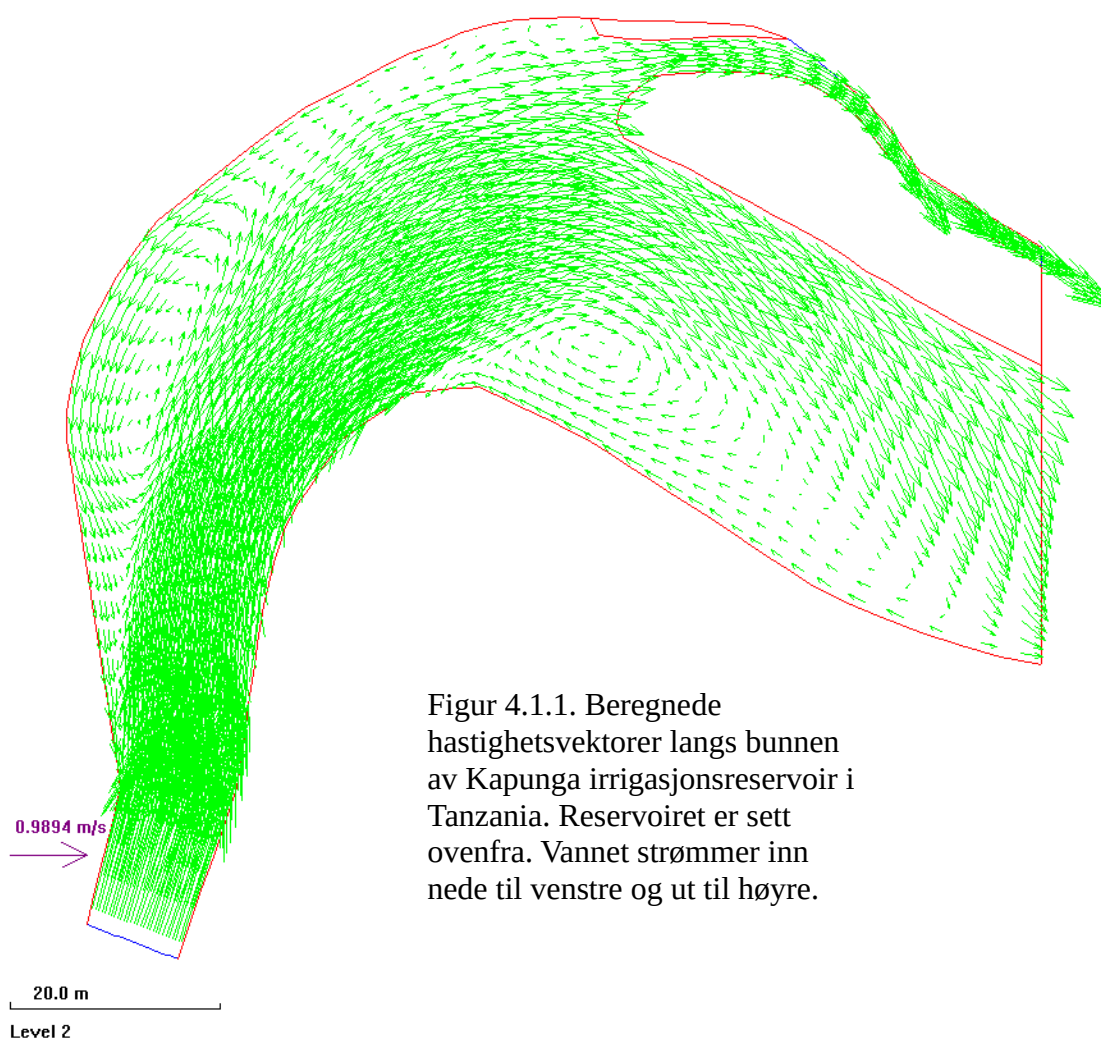
Merk at faget ikke kun omhandler problemstillinger mot marin og vann/miljø området. De samme ligningene og den samme teorien brukes for å beregne vindkrefter mot konstruksjoner og strømming i ventilasjonsanlegg. Studenter som velger for eksempel studieretning Konstruksjonsteknikk vil derfor også ha nytte av faget.

## Kapittel 4. Fluidbevegelser

Dette kapitlet inneholder endel beskrivelser av strømninger og hvordan dette kan beregnes. Et av de viktigste poenget med dette kapitlet er å lære om Bernoullis ligning. Sammen med kontinuitetsligningen er dette den mest brukte ligningen for å løse hydrauliske problemer. Kapitlet inneholder også endel eksempler på bruk av ligningen.

### 4.1 Strømningbeskrivelse

En generell strømning i en kompleks geometri er tredimensjonal. Et eksempel er gitt i figuren under, som viser hastighetsvektorer ved vannoverflaten i inntaksreservoaret Kapunga. Vannet kommer inn i elva nede til venster og går delvis over demningen til høyre, og delvis inn i inntaket som er øverst til høyre. Vi ser at vi har to store resikulasjonssoner i reservoaret.



Figur 4.1.1. Beregnede hastighetsvektorer langs bunnen av Kapunga irrigasjonsreservoar i Tanzania. Reservoaret er sett ovenfra. Vannet strømmer inn nede til venstre og ut til høyre.



Siden vi ser reservoaret direkte ovenfra er hastighetsvektorene i figuren todimensjonale. Men for en generell geometri der vi for eksempel har variasjon i vanddybden, vil hastighetene variere også i vertikal retning. For en generell situasjon vil derfor hastighetsvektorene være tredimensjonale.

## Strømlinjer

Bernoullis ligning og Energiligningen, som vi kommer tilbake til senere, gjelder langs en strømlinje. Vi må derfor vite hva en strømlinje er. Det finnes tre uttrykk som brukes i denne forbindelse: stilinjer (pathlines), streklinjer (streaklines) og strømlinjer (streamlines).

Stilinjer og streklinjer brukes i laboratorieforsøk der en ønsker å visualisere et komplekst strømningebilde.

*Stilinjer* viser linjer fra **en partikkel** (bølger), f. eks. en lysende partikkel på en film.

*Streklinjer* starter fra samme punkt (fiskekar), f. eks. utslipp av røyk fra et punkt. Dette er analogt med en linje definert med **mange partikler**.

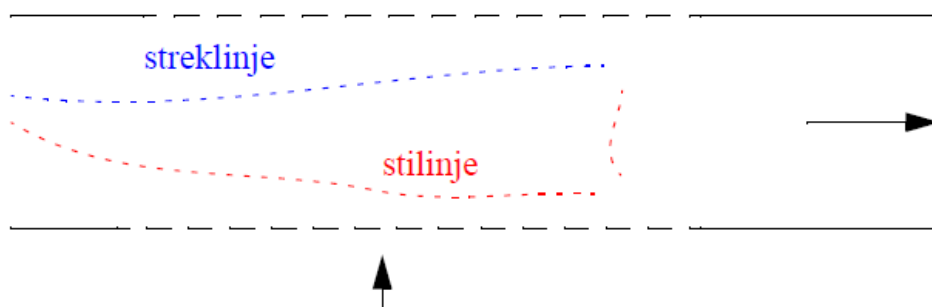
*Strømlinjer*,  $F$ , er definert fra at hastighetsvektoren alltid er en tangent til strømlinjen.

Alle tre typer linjer faller sammen ved stasjonær strømning

Stasjonær strømning betyr at i ett fast punkt vil en ikke ha en forandring i vannhastigheten over tid. En har da at:

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

Figuren under viser strømning i et rør, der rorveggene er markert med sorte linjer. Vannet strømmer fra venstre mot høyre. Fra venstre slippes det en rød kule i strømmen, etterfulgt av mange blå. Etter noe tid, starter det å strømme vann inn nedenfra, langs den perforerte vegg. Alle de blå kulene vil derfor forskyve seg oppover, slik som vist på figuren under. Den røde kula har imidlertid fulgt banen som vises med den røde linja.



Den blå linja blir kalt en streklinje, mens den røde linja blir kalt en stilinje. En strømlinje er definert slik at den alltid er parallell med hastighetsvektoren i ethvert punkt.

Hvis vi ser på en hastighetsvektor som er en tangent til en strømlinje, så vil den ha komponentene  $dU$  og  $dV$ . Siden retningen av strømlinjen er parallel med hastighetsvektoren, vil vi ha:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{U}{V} \quad \text{eller} \quad \frac{dx}{U} = \frac{dy}{V}$$

Eksempel: Gitt strømningsfeltet:  $U=ax$ ,  $V=-ay$ . Finn en ligning for strømlinjene.

Løsning:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{-dy}{ay} \quad \text{Integrerer:} \quad \ln x = -\ln y + C \quad \text{Eller} \quad \ln x + \ln y = C \quad \text{Eller} \quad \ln xy = C$$

Opphøyer fra e:

$$xy = e^C = C_2 \quad x = \frac{C_2}{y}$$

Dett blir hyperbler for forskjellige  $C_2$  verdier.

## Metoder for analyser av strømningsmønstre

Det finnes i hovedsak tre forskjellige metoder for å analysere strømningsmønstre:

1. Analytiske metoder
2. Eksperimentelle metoder
3. Numeriske metoder (CFD)

Ved analytiske metoder lager man forenklinger slik at en kan løse ligninger i en dimensjon. Disse ligningene vil vi lære om i dette faget. Så lenge strømnings situasjonen kan forenkles, så er dette den hurtigste måten å finne svarene på. Men hvis strømnings situasjonen er for komplisert, må en bruke en av de to andre metodene.

## Eksperimentelle metoder

I eksperimentelle metoder bygges en modell av strømnings situasjonen, ofte i en nedskalert versjon. For å finne ut hvilken hastighet vannet skal ha i laboratoriemodellen, brukes Froudes modellov:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gy}}$$

Froude tallet skal være det samme i prototype og modell. I laboratorieøvingene i faget vil vi se nærmere på denne metoden.

*Bildet viser en laboriemodell av et vannkraftinntak i en elv, fra Universitetet i Innsbruck. Dimensjonene på modellen er slik at den passer inn i en container. Det er også vist noen røde plastbiter, som brukes til å modellere sedimenter. Ett av de ingeniørmessige spørsmålene i prosjektet er hvordan en skal utforme inntaket slik at en unngår å få mye sedimenter inn i vannveiene.  
(Foto: N. Olsen)*

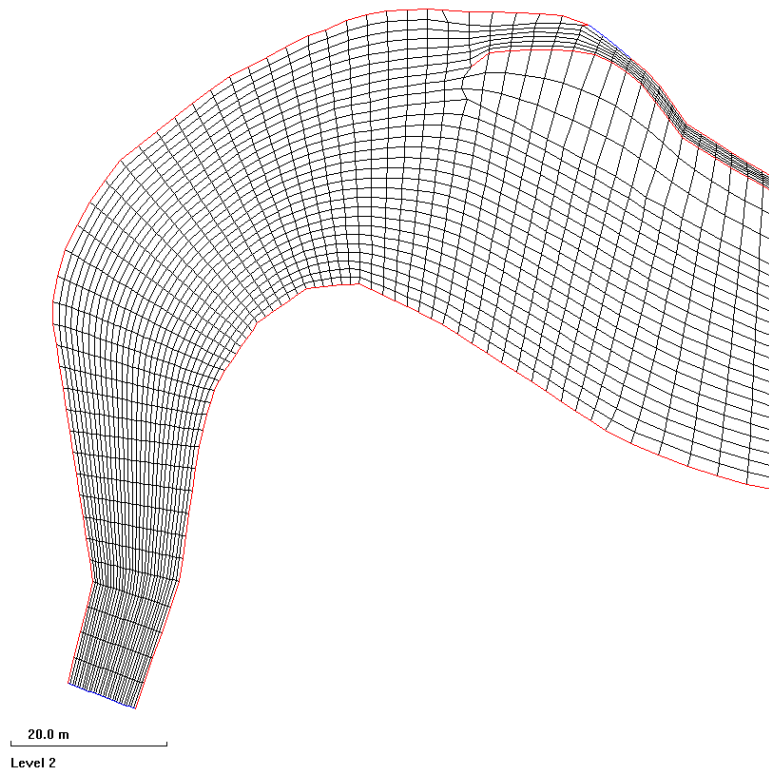


## **Numerisk strømningsmodellering: Computational Fluid Dynamics (CFD)**

Et alternativ til laborieforsøk er å bruke numerisk strømningsmodellering, som på engelsk heter computational fluid dynamics (CFD). En deler da vanngeometrien inn i celler, og løser ligninger for vannhastighetene, trykk og turbulens i hver celle. De ligningene som løses heter Navier-Stokes ligninger, og disse skal vi utlede senere i faget.

CFD kan i prinsippet beregne strømning i en generell geometri og derfor benyttes på meget komplekse strømmingssituasjoner. Men metoden krever mye regnekraft, og har derfor blitt mer populær i de senere årene, i tilknytning til økt kapasitet på datamaskinene. CFD benyttes som et standard verktøy for maskiningeniører, men har dessverre ikke blitt like mye benyttet innen vannfag. Dette er imidlertid i ferd med å forandre seg.

Figuren til høyre viser beregningsnettet for Kapunga reservoaret i Afrika, sett ovenfra. De beregnede vannhastighetene ble vist tidligere i kapittelet.



CFD vil bli benyttet mye i Hydromekanikk til å illustrere strømningssituasjoner.

## Uniform og stasjonær strømning

Uniform strømning er et begrep som brukes for å forenkle en strømningssituasjon i forbindelse med energitap i rør og kanaler. For å bruke mange av ligningene, må vi anta uniform strømning. Uniform strømning betyr at fluidhastigheten er lik for alle punkter langs en strømlinje. Dette kan ofte antas i en lang, rett kanal med konstant bunnhelling og bredde. Eller i et rør med konstant tykkelse. Dersom det er en forandring av dybden eller hastigheten, vil strømmingen være ikke-uniform. Uniform strømning betyr også at hastighetsvektorene til alle partiklene er parallelle.

Stasjonær strømning betyr at hastighetene til alle punktene i geometrien ikke forandrer seg med tiden. Hvis de gjør det, er strømmingen ikke-stasjonær. En uniform strømning er stasjonær.

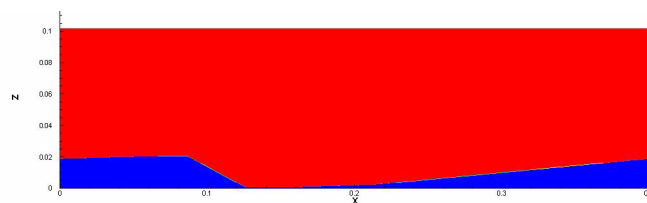
## Laminær og turbulent strømning

Når en har en strømning med relativ stor hastighet i en stor geometri og en relativt lav viskositet, vil det kunne oppstå turbulens. Turbulensen oppstår der vi har de største hastighetsgradientene i strømmingen. Der vil det dannes en ikke-stasjonær hvirvel. Denne hvirvelen vil igjen lage nye hastighetsgradienter, som gjør at det dannes nye, litt mindre hvivler. Disse lager igjen nye og litt mindre hvivler. Hvirvlene som dannes blir mindre og mindre, helt til vi kommer ned på en størrelse som gjør at de viskøse kreftene blir relativt store. Viskositeten vil da dempe ut hvirvlene, og mindre hvirvler dannes ikke. Hvis viskositeten er veldig stor, vil alle hvirvler dempes ut med en gang. Dette gjør at en ikke ser noen hvirvler. En slik strømning kalles laminær.

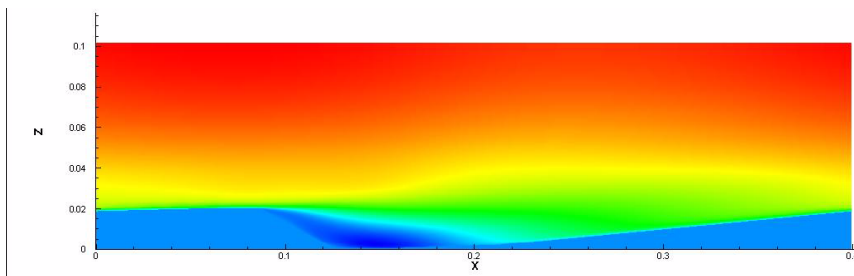
Merk at hvirvlene er tredimensjonale, slik at gradienter i en retning kan forårsake hvirvler i en annen retning.

Hvirvlene vil transportere vannpartikler med varierende hastighet på tvers av strømrretningen. På grunn av friksjonen mot vegg, vil partikler som strømmer i et rør ha størst hastighet i midten av røret, og minst hastighet mot vegg. De turbulente hvirvlene vil transportere endel partikler med stor hastighet fra sentrum av røret og ut mot veggene. Det vil også transporteres partikler med liten hastighet fra området rundt vegg til midten av røret. Dette gjør at hastighetsprofilen i turbulent strømning ser anderledes ut enn profilen i laminær strømning. Vi skal senere i kurset se nærmere på formler for hastighetsprofiler for laminær og turbulent strømning.

I forelesningen viser vi en video av turbulent strømning over en sanddyne. Figuren under viser et lengdesnitt av geometrien, der det røde området er fluid og det blå er selve dynen.



Figuren under viser vannhastigheten, der rødt er høy hastighet og blått er lav vannhastighet. Vannet strømmer fra venstre mot høyre. Strømningen separerer på toppen av dynen, og en resirkulasjonssone dannes nedstrøms dynen. Dette fører til sterke hastighetsgradienter i dette området, og dannelse av turbulens.



## Reynolds tall

Siden endel av formlene vi bruker er forskjellige ettersom strømningen er laminær eller turbulent, trenger vi en metode for å finne ut når vi har hvilken type strømning. Reynolds gjorde endel eksperimenter for å finne ut av disse. Dere skal gjøre de samme eksperimentene på en laboratorieøving. Reynolds fant ut at en kunne bruke en dimensjonsløs parameter, som har blitt kalt Reynolds tall. Den er definert som:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

L er en karakteristisk lengde, for eksempel vanddybden i en elv, eller diameteren på et rør. U er gjennomsnittshastigheten over tverrsnittet. Den kinematiske viskositeten,  $\nu$ , kan taes fra Tabell A.5 i læreboka (utg. 9 og 10), der den er gitt som en funksjon av temperaturen til vannet. Hvis en ikke vet temperaturen, kan en anta at viskositeten er  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Det Reynolds fant ut var at det blir turbulent strømning for  $Re > 2500$ , og laminær strømning for  $Re < 2000$ . I området mellom 2000 og 2500 er det litt usikkert hva slags type strømning vi har. Dette er vanligvis ikke noe stort problem, da Reynoldstallet varierer over mange størrelsesordner. I alle naturlige elver, vanntunneller, avløpsrør og vannkrafttrør vil vi ha turbulent strømning. Laminær strømning opptrer oftest i fysiske modeller eller i rør med veldig små dimensjoner og lave hastigheter.

Turbulent strømning betyr at en ofte kan anta tilnærmet konstant hastighetsfordeling over tverrsnittet i rør/kanaler. Dette vil bli forklart mer i detalj senere, når vi ser på formler for hastighetsfordelinger over et tverrsnitt.

### Eksempel:

I et rør med 0.1 meter diameter er gjennomsnittshastigheten 0.2 m/s. Er det turbulent eller laminær strømning i røret?

*Vi regner ut Reynolds tallet:  $Re = 0.1 \times 0.2 / 10^{-6}$ . Viskositeten er  $10^{-6}$  når det ikke er oppgitt en temperatur. Reynolds tallet blir 20 000. Siden dette er større enn 2500, er strømningen turbulent.*

*Hvis temperaturen er oppgitt, kan vannets viskositet finnes fra Tabell A5 bak i læreboka.*

*Bildet viser Reynolds tall stasjonen for laboratorieøvingen. Vannet strømmer opp i mellom de grønne kulene, og inn i trakta i beholderen. Derfra ut igjennom røret mellom beholderen og benken. På toppen av beholderen er det en flaske med fargestoff. En nål bringer fargestoff ned til trakta, slik at en får en fargestråle i røret. En kan derved se om strømningen er laminær eller turbulent.*

*Ved å variere vannføringen, kan en se hvilke Reynolds tall som gir laminær strømning og hvilke som gir turbulent strømning. (Foto: N. Olsen)*



Reynolds tall for en strømning med fri overflate beregnes fra formelen:

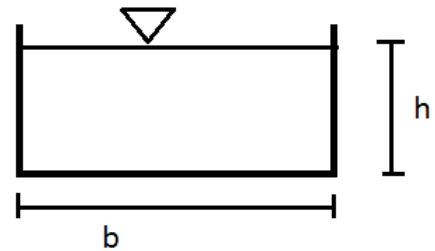
$$Re = \frac{U r_h}{\nu} \quad \text{der} \quad r_h = \frac{A}{P}$$

Det er her brukt begrepet hydraulisk radius,  $r_h$ , definert som tverrsnittsarealet,  $A$ , til strømningen dividert på våt omkrets,  $P$ . Våt omkrets er lengden av tverrsnittet som har kontakt med vannet.

For kanaltverrsnittet til høyre vil vi ha en bredde  $b$  og en dybde  $h$ . Arealet og våt omkrets blir da:

$$A = hb \text{ og } P = 2h + b$$

$$\text{som gir: } r_h = \frac{hb}{2h + b}$$



For et sirkulært rør med diameter  $D$  kan vi regne ut at  $r_h = D/4$ . Dette betyr at hvis vi erstatter  $D$  med  $4r_h$  i definisjonen av Reynolds-tallet, kan vi bruke dette tallet for å beregne om det er turbulent eller laminær strømning i ikke-runde rør.

## 4.4 Akselerasjon

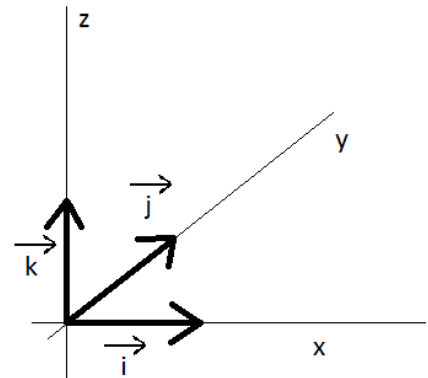
Utleddningen av akselerasjonen til en vannpartikkel er nyttig i forbindelse med å komme frem til Navier-Stokes ligninger. Disse bygger på Newtons 2. lov: Kraft = masse \* akselerasjon. Når vi har et uttrykk for akselerasjonen, finner vi derfor enkelt to av de fire leddene i Navier-Stokes ligninger.

Når vi skal beskrive strømningen, ser vi først på en fluidpartikkel i et tredimensjonalt koordinatsystem som vist på figuren til høyre. Posisjonsvektoren,  $\vec{r}$ , til partikkelen er også tredimensjonal.

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Her er  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , og  $\vec{k}$  enhetsvektorer i de tre dimensjonene. Hastigheten til partikkelen får vi ved å derivere posisjonsvektoren med hensyn på tiden. Hastighetsvektoren er også tredimensjonal:

$$\vec{U} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$



Her er  $u$ ,  $v$  og  $w$  definert som hastighetskomponentene i de tre retningene til fluidpartikkel. Denne definisjonen av hastigheten i tre dimensjoner brukes både når en gjøre målinger i laboratoriet og ved numeriske strømningsberegninger. En kan da måle eller beregne hver av de tre hastighetskomponentene.

Generelt sett vil en hastighet variere i tre retninger,  $x$ ,  $y$  og  $z$ , og i tid,  $t$ .

$$\vec{U} = f(x, y, z, t)$$

Kjernerregelen gir da for den totalderiverte:

$$D\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dt$$

Akselerasjonen blir:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

De skalare hastighetene  $u$ ,  $v$  og  $w$  kan settes inn i stedet for  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  og  $dz/dt$ . Dette gir:

$$\vec{a} = u \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

Vi innfører så tallindekser i de tre regningene. I  $x$ -retningen bruker vi indeks 1, i  $y$  retningen bruker vi indeks 2 og i  $z$  retningen bruker vi indeks 3. De skalare hastighetene blir:

$$u = U_1, v = U_2, w = U_3 \quad \text{og} \quad x = x_1, y = x_2, z = x_3,$$

Akselerasjonsvektoren vi ha tre komponenter, en i hver retning. Hvis vi gir retningen en indeks  $i$  som kan være 1, 2 eller 3, kan vi skrive en akselerasjonskomponent som:

$$a_i = U_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_i}{\partial x_3} + \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad i = 1, 2 \text{ eller } 3$$

Som igjen kan skrives:

$$a_i = \sum_{j=1}^{j=3} U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

I mange publikasjoner brukes en kortform som heter tensornotasjon. Tensornotasjon betyr at vi ikke skriver summetegnet foran ledd der vi summerer over to eller flere indekser. Ligningen blir da:

$$a_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

Det er to typer akselerasjon: tidsavhengig akselerasjon, som beskrives av det første leddet på høyre side av ligningen, og konvektiv akselerasjon, som beskrives av det andre leddet. Den konvektive akselerasjonen er også til stede i stasjonær strømning. Et eksempel er strømning rundt en sylinder. Foran sylindere er det akselerasjon av fluid partikler pga. stagnasjon og avbøyning. Men strømningen er stasjonær, og forandrer seg ikke med tiden.



En kan også regne ut akselerasjonen til en partikkel på et punkt i en strømning hvis en har gitt en ligning for hastighetsfeltet.

Eksempel:

$$\vec{U} = 2x^2t\vec{i} + 3xy^3\vec{j} + 2xz\vec{k}$$

Komponentene av hastighetsvektoren i de forskjellige retningene blir:

$$u = U_1 = 2x^2t$$

$$v = U_2 = 3xy^3$$

$$w = U_3 = 2xz$$

Regner ut akselerasjonen i et hastighetsfelt i x-retningen, som er retning 1:

$$a_1 = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

$$a_1 = (2x^2t) \frac{\partial(2x^2t)}{\partial x} + (3xy^3) \frac{\partial 2x^2t}{\partial y} + (2xz) \frac{\partial 2x^2t}{\partial z} + \frac{\partial 2x^2t}{\partial t}$$

$$a_1 = (2x^2t)(4xt) + (3xy^3)0 + (2xz)0 + 2x^2 = 8x^3t^2 + 2x^2$$

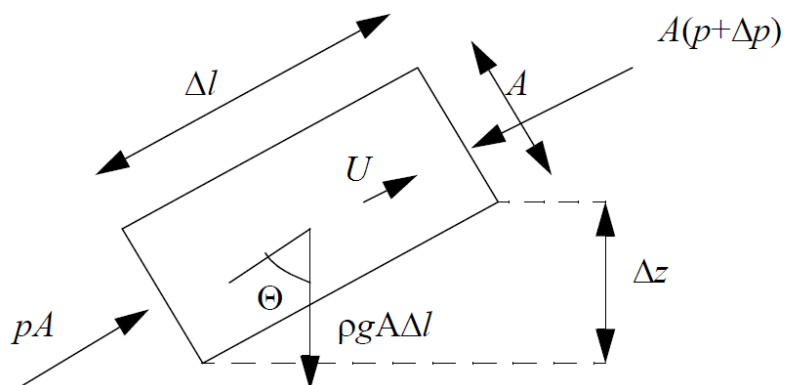
Setter inn for tiden  $t=1$ , i punktet  $(1,2,2)$ . Dette gir  $a_1 = 8+2 = \underline{10}$

## 4.6 Bernoullis ligning

Bernoullis ligning er av de meste brukte ligningene innen klassisk hydraulikk. Ligningen forteller oss at hastighetsenergi + trykkenergi + potensiell energi er konstant langs en strømlinje. Der vi ikke har energitap.

Vi starter med å anta uniforme hastighetsprofiler i inn/utløp. Dette betyr at hastigheten er den samme over tverrsnittet. Vi skal senere se på hva som skjer ved ikke-uniforme hastighetsprofiler.

I utledningen ser vi på en rørbit med lengde  $\Delta l$ . Det strømmer vann igjennom røret, med hastighet  $U$ . Tverrsnittsarelet av røret er  $A$ , og trykket er  $p$ . Røret heller oppover med en vinkel  $\Theta$  i forhold til vertikal akse. Dette er vist på figuren til høyre.



Kreftene på elementet er trykkrefter og gravitasjonskrefter. Vi ser på likevekt i strømrretningen, langs en partikkelbane. Vi neglisjerer friksjonskrefter og viskøse krefter.

Gravitasjonskreftene kommer fra vekten av elementet, dekomponert i retningen langs partikkelbanen:

$$G = -\rho g \Delta l A \cos(\Theta)$$

P. S. I læreboka brukes vinkelen  $\alpha$  i stedet, der  $\alpha = 90 \text{ grader} - \Theta$ . Vi bruker at  $\cos(\Theta) = \Delta z / \Delta l$ . Dette gir:

$$G = -\rho g \Delta l A \frac{\Delta z}{\Delta l} = -\rho g A \Delta z$$

Vi regner positiv retning langs partikkelbanen, dvs. i samme retning som hastigheten. Utrykket blir negativt, da gravitasjonen virker i motsatt retning av hastigheten. Hvis hastighetsvektoren hadde pekt nedover, ville vinkelen bli over 90 grader og  $\cos(\Theta)$  ville da også blitt et negativt tall.

Trykkreftene blir:

$$F_p = A p - A(p + \Delta p) = -A \Delta p$$

Newton's 2. lov gir:

$$F_p + G = m a$$

Fra tidligere utledninger av akselerasjonen,  $a$ , har vi

$$a_1 = \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3}$$

For stasjonær strøm forsvinner tidsleddet. Vi antar endimensjonal strøm og at  $l$  er i retning 1. Vi antar også uniform hastighet over tverrsnittet. Akselerasjonen blir da:

$$a = U \frac{dU}{dl}$$

Tilsammen gir dette for Newtons 2. lov:

$$\rho \Delta l A U \frac{dU}{dl} = -\rho g A \Delta z - A \Delta p$$

Vi deler på  $\rho g A \Delta l$  som gir:

$$\frac{1}{g} U \frac{dU}{dl} = -\frac{\Delta z}{\Delta l} - \frac{1}{\rho g} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Når  $\Delta$  går mot null går  $\Delta p/\Delta l$  og  $\Delta z/\Delta l$  går mot den deriverte av  $p$  og  $z$  mhp  $l$ .

$$\frac{1}{g} U \frac{dU}{dl} = -\frac{dz}{dl} - \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl}$$

Vi ønsker nå å skrive venstre ledd som den deriverte av  $U^2$ . Dette gjøres ved kjerneregelen:

$$\frac{d(U_1 U_2)}{dx} = U_1 \frac{dU_2}{dx} + U_2 \frac{dU_1}{dx}$$

Hvis  $U_1 = U_2 = U$  får vi:

$$\frac{d(U^2)}{dx} = 2U \frac{dU}{dx} \quad \text{eller} \quad U \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(U^2)}{dx}$$

Ligningen blir da:

$$\frac{1}{2g} \frac{dU^2}{dl} = -\frac{dz}{dl} - \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl}$$

Vi flytter alle leddene over på venstre side:

$$\frac{d(U^2/2g)}{dl} + \frac{dz}{dl} + \frac{d(p/\rho g)}{dl} = 0$$

eller

$$d(U^2/2g + p/\rho g + z)/dl = 0$$

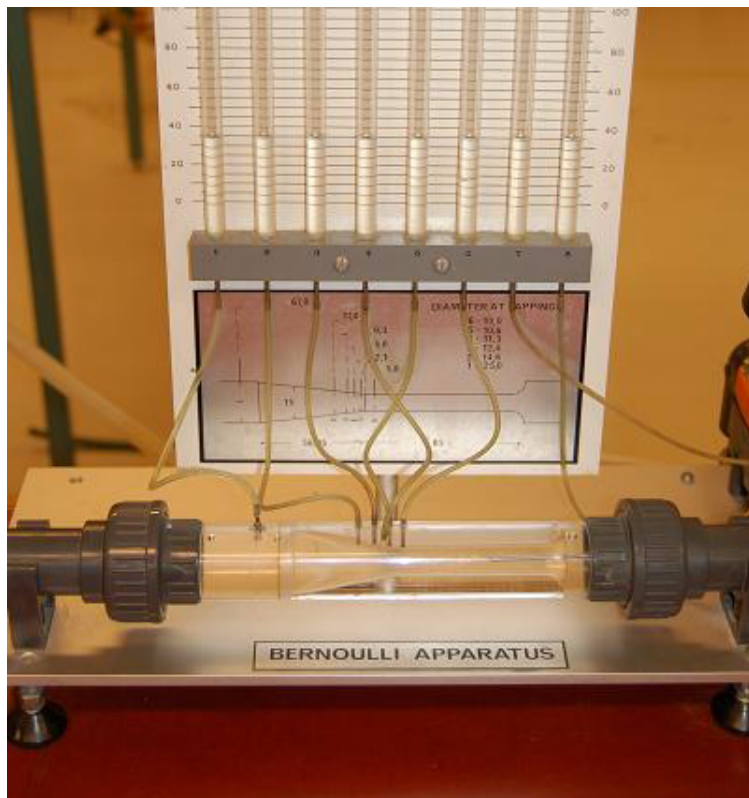
eller integrert:

$$\frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{konstant}$$

langs en strømlinje

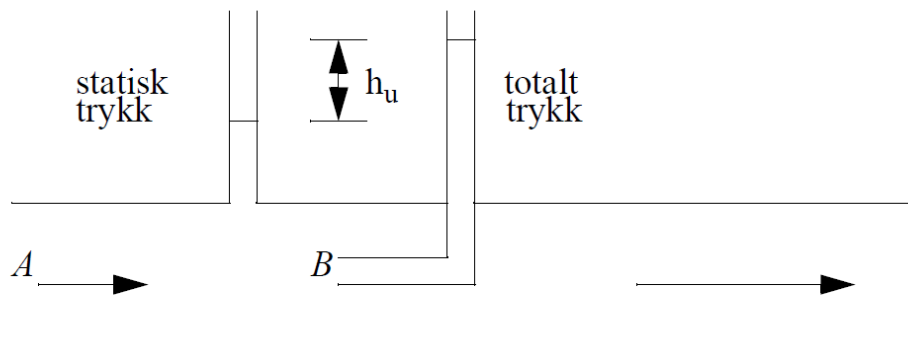
Som er Bernoulli's ligning.

Bildet viser en stasjon fra laboratorieøvingen, der en skal undersøke Bernoulli's ligning. Vannet strømmer fra venstre mot høyre i røret, og en har flere trykkuttak. En har også en hul nål i røret, som er koblet til et trykkuttak. Nålen kan beveges, slik at en kan avlese stagnasjonstrykket ved de forskjellige stedene i kontraksjonen. (Foto: N. Olsen)



## Eksempel på bruk av Bernoullis ligning: Pitot rør

Figuren til venstre viser et lengdesnitt av et rør, sett fra siden. Vannet strømmer fra venstre mot høyre. På hovedrøret er det montert to små rør, ett på veggen av hovedrøret, og ett som har åpning mot strømretningen.



Ved stasjonær strømning, vil vannivået i de to mindre rørene være forskjellige. Denne forskjellen i nivå,  $h_u$ , kan relateres til vannhastigheten i hovedrøret,  $U$ . Til dette brukes Bernoullis ligning.

Vi bruker Bernoulli's ligning til å bestemme trykk og hastighet i røret: Bernoulli fra punkt A til punkt B blir:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g}$$

Vi ser at  $z_A = z_B$ , og at  $U_B = 0$ . Dette gir:

$$\frac{U_A^2}{2g} = \frac{p_B - p_A}{\rho g}$$

Trykkforskjellen mellom punkt A og B er gitt i følge hydrostatikk:

$$p_B - p_A = \rho g h_u$$

Når dette settes inn i ligningen over, får vi:

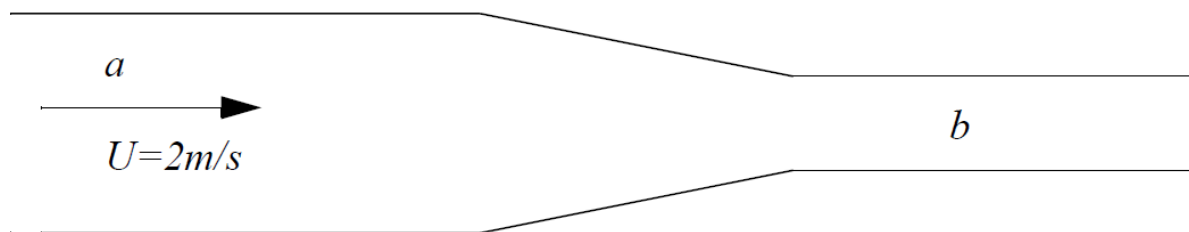
$$U_A = \sqrt{2gh_u}$$

**Regneeksempel:** I et rør måles hastighetshøyden til 0.2 m, med et pitotrør. Hva er hastigheten?

$$U_A = \sqrt{2gh_u} = \sqrt{2 * 9.81 \text{ m/s}^2 * 0.2 \text{ m}} = 2 \text{ m/s}$$

Hastigheten i røret er 2 m/s.

**Regneeksempel:** Bernoulli: Trykk i kontraksjon: Et horisontalt rør snevres inn. Hva blir trykkforskjellen mellom før (a) og etter (b) innsnevringen? Hastigheten før innsnevringen er 2 m/s og hastigheten etter innsnevringen er 10 m/s.



Løsning: Bernoulli's ligning brukes så til å finne trykkforskjellen,  $\Delta P = P_a - P_b$

$$z_a + \frac{P_a}{\rho g} + \frac{U_a^2}{2g} = z_b + \frac{P_b}{\rho g} + \frac{U_b^2}{2g}$$

Siden røret er horisontalt, er  $z_a = z_b$ . Løser ligningen mhp. Trykkforskjellen  $\Delta P$ :

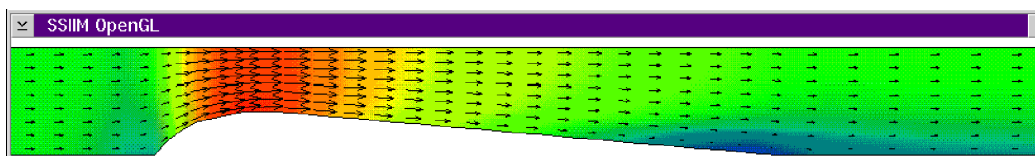
$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho U_b^2 - \frac{1}{2} \rho U_a^2 = 0.5 * 1000 \text{ kg/m}^3 * 10 \text{ m/s}^2 - 0.2 * 1000 \text{ kg/m}^3 * 2 \text{ m/s}^2 = 48000 \text{ Pa}$$

Trykkforskjellen er 48 kPa, dvs. det er 48 kPa trykk mindre i innsnevringen enn før den.

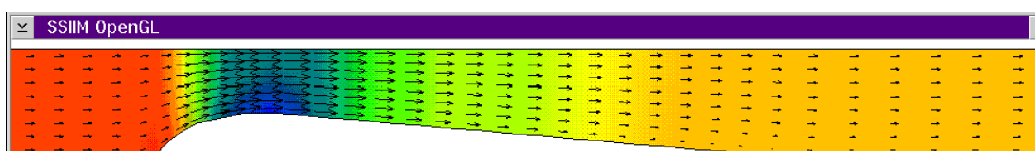
Har her antatt at det ikke er energitap i systemet. Dette ser vi på senere, i kapittel 7.

**Eksempel:** Lukepropp (Figurer: N. Olsen)

En lukepropp er en betongkonstruksjon som brukes til å holde en luke på plass i en tunnel. Konstruksjonen medfører en kontraksjon av strømmingen, som medfører et energitap. Figuren under viser et lengdesnitt av strømmingen gjennom lukeproppen. En ser hastighetsvektorer, og fargene betyr rødt for høy hastighet og blått for lav hastighet. En ser at i kontraksjonen får en høy hastighet.



Figuren under viser den samme situasjonen, men nå viser fargene trykket. Rødt er høyt trykk og blått er lavt trykk. Når hastigheten går opp, vil trykket minske. Men når hastigheten minskes igjen, vil trykket komme tilbake. Imidlertid kommer det ikke helt tilbake, siden rødfargen til venstre i figuren ikke er lik fargen til høyre. Dette kommer av et energitap.



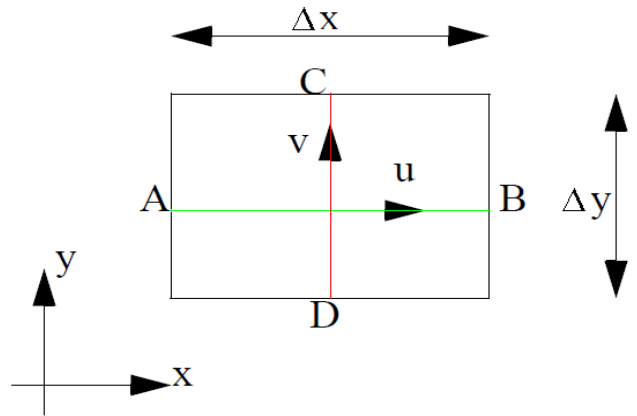
## 4.8 Rotasjon og hvirvling

Konseptene rotasjon og hvirvling er viktige innen fluidmekanikken. I dette kapittelet utledes differensialligninger for bestemmelse av hvirvling (vorticity). Hvirvling er en av parametrene i en strømning.

Figuren til høyre viser et fluidelement som beveger seg. Hastigheten oppover er  $v$ , og hastigheten til høyre er  $u$ . Vinkelhastighet,  $\Omega$ , er definert som hvor fort en linje roterer, i vinkel/sekund:

$$\Omega_{AB} = \frac{v_B - v_A}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Omega_{CD} = -\frac{u_C - u_D}{\Delta y} = -\frac{\Delta u}{\Delta y} \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial y}$$



Vinkelhastigheten er positiv mot klokka.  $\Omega_{CD}$  blir negativ, da høyere hastigheter i positiv  $y$ -retning vil gi rotasjon med klokka.

Rotasjonshastighet for elementet er lik gjennomsnittet av vinkelhastigheten for linjene  $AB$  og  $CD$ . Elementet roterer om  $z$  akse:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(\Omega_{AB} + \Omega_{CD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Hvirvling (vorticity) er definert som en størrelse lik 2 ganger rotasjonshastigheten:

$$\omega_z = 2\Omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Dette er hvirvlingen om  $z$ -aksen. Vi får tilsvarende ligninger for de to andre aksene, som gir at den totale tredimensjonale hvirvlingsvektoren blir:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Konseptene hvirvling og rotasjon brukes mye i klassisk fluidmekanikk. Det er brukt i oppgaver og på eksamen i fluidmekanikk, da en kan gi inn en formel for et hastighetsfelt, og be studentene regne ut hvirvlingen eller rotasjonen i feltet.

*Eksempel: 4.7 side 110, 8. utg. Hva er hvirvlingen for en todimensjonal strømning beskrevet med ligningen*

$$\vec{U} = 10x\vec{i} - 10y\vec{j}$$

Svar: Dette betyr:  $u = 10x$  og  $v = -10y$ . Siden strømmingen er todimensjonal, vil de to første leddene på høyre side av den tredimensjonale hvirvlingsvektoren være lik null. Vi ser kun på hvirvlingen om  $k$ -aksen.

Innsatt i ligningen for den tredimensjonale hvirvlingsvektoren gir dette at hvirvlingen er null.

$$\vec{\omega} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{\partial(-10y)}{\partial x} - \frac{\partial(10x)}{\partial y} = 0$$

Hadde uttrykket vært:

$$\vec{U} = 10y \vec{i} - 5x \vec{j}$$

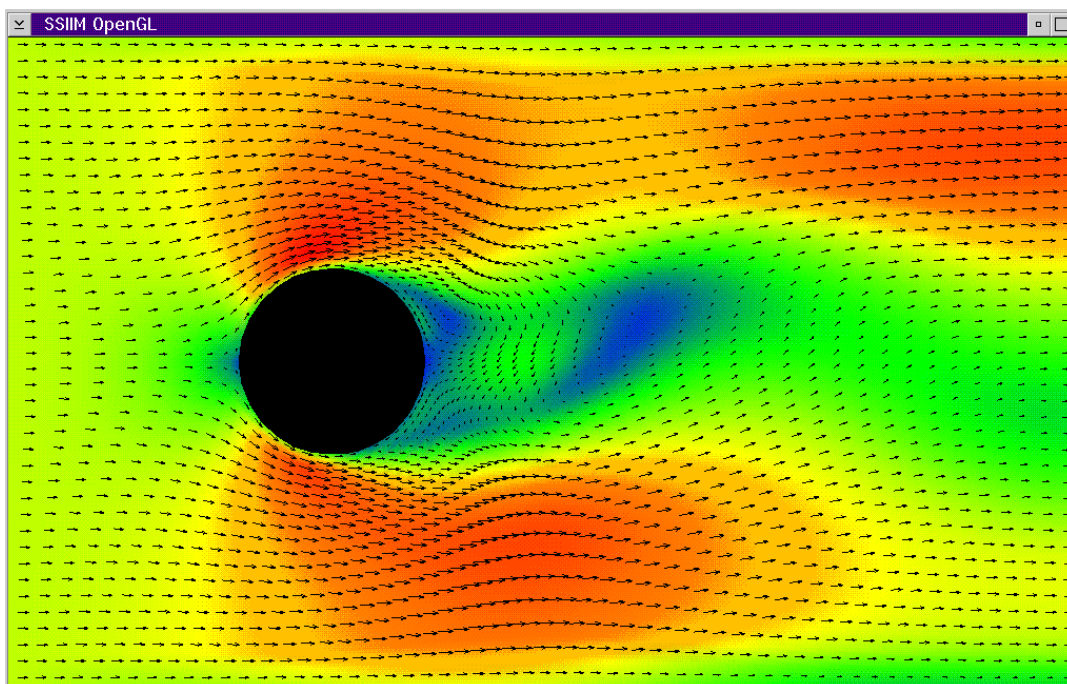
ville vi fått:

$$\vec{\omega} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{\partial(-5x)}{\partial x} - \frac{\partial(10y)}{\partial y} = -15$$

Hvirvlingen ville blitt -15.

## 4.10 Separasjon

Figuren under viser hastighetsfeltet for turbulent strømming rundt en sylinder. Rødt er høy hastighet og blått er lav hastighet. Vi har en stagnasjonszone foran sylindren, og økt hastighet på siden av sylindren.



Bak cylinderen får vi en separasjonssone. Denne er ustabil, og en får hvirvelavløsning som svinger fra en side til den andre siden. Dette gjør at en kan få indusert svingekrefter i cylinderen. I forbindelse med konstruksjoner, er dette først og fremst problematisk ved luftstrømning rundt broer, piper og høye bygninger. For å finne svingefrekvensen,  $n$ , brukes Strouhal nummeret,  $St$ :

$$St = \frac{nD}{U}$$

Her er  $D$  diameteren på cylinderen og  $U$  er hastigheten oppstrøms cylinderen. Strouhal nummeret varierer avhengig av cylinderens geometri. For en rund cylinder har eksperimenter funnet verdier i området 0.17-0.22. Resultatet av en slik beregning må sammenlignes med egensvingningene til konstruksjonen.

Strømningsfelt rundt sylindre er også viktig i forbindelse med beregning av lokal erosjon rundt brokar.



## Kapittel 5. Kontrollvolummetoden og kontinuitet

Kontrollvolummetoden er en metode der en velger seg et kontrollvolum i strømmingen og bruker forskjellige formler på dette. Valg av kontrollvolum omfatter ofte alle de interessante prosessene, men bør ellers begrenses for å forenkle mest mulig. Kontinuitetsligningen er en viktig ligning som kan brukes på kontrollvolumet. Denne sier at mengden vann som strømmer inn i kontrollvolumet er lik mengden som strømmer ut. En ganske enkel og nyttig ligning. I dette kapitlet skal vi også utlede endel andre nyttige begreper som vannføring, Reynolds Transportteorem og kavitasjon.

### Lagrangsk/Eulerisk referansesystem

Når en skal gjøre beregninger på en fluidstrømning, kan en tenke seg to forskjellige referansesystemer. Disse kalles Eulerisk og Lagrangske systemer.

Et **Eulerisk** referansesystem er fast i rommet, og vannet beveger seg i forhold til systemet. Et eksempel er hvis vi holder et instrument på ett fast punkt i en vannstrømning, og måler de tre hastighetskomponentene. Et annet eksempel er en numerisk beregning, der vi beregner hastighetene i et beregningsnett i fluidet. Nettet står på samme stedet, men vannet beveger seg. En får derfor en beregning av tre hastighetskomponenter for hver nettcelle.

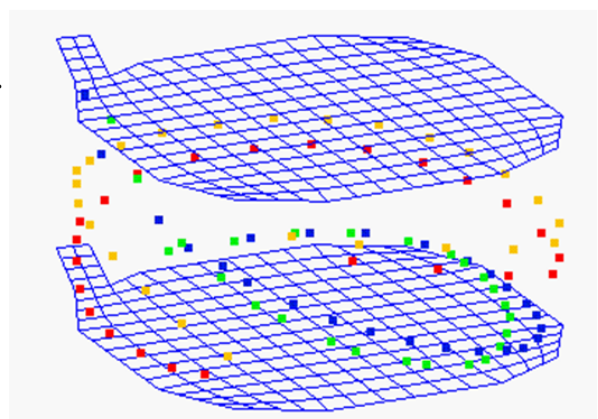
Et **Lagrangsk** referansesystem følger vannpartiklene, og beveger seg derfor i forhold til kanalbunnen eller rørveggen. Et eksempel er hvis en tar mange bilder av en partikkel som beveger seg i et strømningsfelt. Et annet eksempel er visualisering innen numeriske beregninger, der et følger mange partikler for å vise hvordan strømningsfeltet er. En slik visualisering er gitt i forelesningen, der en har beregnet strømning i et fiskeoppdrettskar. På Blackboard ligger det en lenke til animasjonen. Et bilde fra animasjonen er gitt til venstre. De to blå nettene er vannoverflaten og bunnen i fiskeoppdrettskaret. En slipper partikler fra fire punkter i innløpet. Hvert punkt får sin farge. Hvis en trekker en linje mellom for eksempel alle de røde punktene, så får en strømlinje fra dette utslippsstedet.

Merk at hastighetsfeltet i karet er beregnet i hver enkelt celle i et tredimensjonalt beregningsnett som er står fast over tid. Dette er da en Eulerisk beregning.

Et annet eksempel på forskjellen mellom Eulerisk og Lagransk referansesystem er beregninger av partikkelutfelling i et sandfang på et vannkraftverk eller i et utfellingsbasseng på et vannrenseanlegg. I en Eulerisk beregning, vil en dele bassenget i celler, og beregne konsentrasjonen av partikler for hver celle. En Lagransk beregning vil følge mange individuelle partikler, og se hvor de beveger seg.

Et Eulerisk referansesystem brukes i de aller fleste tilfeller i dette faget.

### Partikler i kar



## 5.1 Vannføringer og hastighetsfordelinger

En vannføring,  $Q$ , er definert som et volum vann pr. tidsenhet. Dette kan også skrives som en gjennomsnittshastighet,  $U$ , over et areal ganger arealet,  $A$ . En har her antatt at hastigheten peker normalt på arealet. Med en formel kan dette skrives:

$$Q = UA$$

Vannføringen er en volumstrømning. En volumstrømning er volum pr. tidsenhet. Volumfluksen skrives ofte med bokstaven  $Q$ . Massestrømning er masse pr. tidsenhet. I boka brukes bokstaven  $M$  med prikk over som massefluks. Forskjellen er vannets tetthet,  $\rho$ . Sammenhengen kan skrives som:

$$\dot{M} = \rho Q$$

SI enhetene for hastighet er m/s, areal: m<sup>2</sup>, volumfluks: m<sup>3</sup>/s, og massefluks kg/s.

Enkelt eksempel: Gjennomsnittshastigheten i et rør er 3 m/s, og rørealet er 0.5 m<sup>2</sup>. Vannføringen er 3\*0.5=1.5 m<sup>3</sup>/s.

For kompliserte geometrier og vannhastighetsprofiler kan vi beregne vannføringen,  $Q$  som:

$$Q = \int_A U dA$$

der hastigheten  $U$  står normalt på arealet.

*Eksempel: Vannføring i en elv:*

*Hastighetsprofilet i en kanal er gitt ved:*

$$\frac{U(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(30 \frac{y}{k_s}\right)$$

*Finn vannføringen for en 10 meter bred og 2 meter dyp elv, der  $u^*=0.2$  m/s,  $\kappa=0.4$  og  $k_s = 0.1$  m*

*Løsning: Setter først inn data fra oppgaven i ligningen for hastighetsfeltet:*

$$\frac{U(y)}{0.2} = \frac{1}{0.4} \ln\left(30 \frac{y}{0.1}\right) \quad \text{eller} \quad U(y) = \frac{1}{2} \ln(300y)$$

*Vi integrerer hastighetsprofilet over dybden, som er 2 meter. Egentlig skal vi integrere fra  $y=0$ , men dette vil gi logaritmen til null, som ikke eksisterer. Vi integrerer derfor fra 0.01 m i stedet.*

*Vannføringen under  $y=0.01$  meter vil være nokså liten.*

$$Q = B \int_{0.01}^2 \frac{1}{2} \ln(300y) dy = \frac{10}{2} [y \ln 300y - y]_{0.01}^2 = 5 [2 \ln 600 - 2 - 0.01 \ln 3 + 0.01] = 53 \text{ m}^3/\text{s}$$

Vi har her brukt integrasjonsregelen:  $\int \ln ax dx = x \ln ax - x + C$

Bildet til høyre viser studenter i faget Hydrologi som måler vannhastighetsprofiler i en gren av Nidelva. Dette bruker de til å beregne vannføringen.  
(Foto: N. Olsen)



## Massestrømmer

En vannmengde pr tidsenhet kan defineres som en massestrøm vann i kg/s. Hvis det er oppløst et stoff i vannet, eller det er partikler i vannet, kan vi også definere en massestrøm av stoffet eller partiklene. Dette gjør vi ved å gange vannfluksen med konsentrasjonen. Hvis vi har et oppløst stoff med konsentrasjon 1 promille (0.001), vil massefluksen av dette stoffet være lik massefluksen av vann multiplisert med 0.001. Hvis vi ser på en flate  $A$  som det strømmer en vannføring  $Q$  igjennom, og vannet har en stoffkonsentrasjon  $b$ , vil vi få følgende uttrykk for massefluksen av stoffet:

$$\dot{M}_b = \rho Q b = \rho b A U$$

Vi har da antatt at konsentrasjonen og hastigheten er uniformt fordelt over arealet, og at hastighetsvektoren står normalt på arealvektoren. Hvis disse antagelsene ikke er riktige, må vi i stedet integrere konsentrasjonen og hastighetsfeltet over arealet:

$$\dot{M}_b = \int_A \rho b \vec{U} d\vec{A}$$

## 5.2 Kontrollvolum metoden

Dette er en metode som brukes til å bestemme hastigheter, trykk, krefter, energitap etc. Prinsippet går ut på å velge ut et kontrollvolum i strømmen, for eksempel deler av et rør. Vi bruker så en ligning på kontrollvolumet. Generelt sett, kan dette være for eksempel kontinuitetsligningen for vannstrømmen, kraftlikevekt eller en energibalanse.

Når vi bruker impulssetningen eller kontinuitetsligningen på integralform, bruker vi den på et kontrollvolum. Vi må da velge et hensiktsmessig kontrollvolum. Dette vil variere etter hvilket hydraulisk problem og geometri en har. En kan velge hvilket kontrollvolum en vil, men valget vil medføre mer eller mindre kompliserte uttrykk i ligningene. Kunnskapen om å velge et hensiktsmessig kontrollvolum kommer ofte med erfaring.

I læreboka utledes en konvertering av et volumintegral til et overflateintegral. Denne konverteringen kalles Reynolds Transportteorem, og er beslektet med Divergensteoremet som er beskrevet i grunnkursene i matematikk.

Divergensteoremet:

$$\int_V (\text{div } \vec{F}) dV = \int_A \vec{F} \cdot (\vec{n} dA)$$

Reynolds Transport Teorem

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho b) dV = \int_A (\rho b \vec{U}) \cdot (\vec{n} dA)$$

Reynolds Transport Teorem kan brukes i utledning av Kontinuitetsligningen, Impulssetningen og Energiligningen.

### Hastighets og arealvektorer

Arealvektorene er her definert som:

$$\vec{A} = A \vec{n}$$

Når vi definerer arealvektorene som alltid pekende utover fra kontrollvolumet, får vi riktige fortegn i følgende ligning for summen av fluksene over kontrollvolumet:

$$\sum_{cs} \vec{A}_i \cdot \vec{U}_i$$

Utstrømningsområdene vil gi en positiv fluks, mens innstrømningsområdene gir en negativ fluks. Dette kan også skrives som:

$$\sum_{cs} (\vec{U}_i \cdot \vec{n}_i) A_i$$

Der  $\vec{n}$  er normalvektoren til flaten, og arealet  $A$  er en algebraisk størrelse.

## Utledning av Reynolds Transport Teorem

Vi ser på et kontrollvolum som inneholder en variabel  $b$ . Dette kan for eksempel være en konsentrasjon, lokal hastighet el. lignende. Totalmengden av  $b$  i volumet kalles  $B$ , og kan beregnes ved å integrere  $b$  over volumet:

$$B = \int_V \rho b dV$$

Tettheten  $\rho$  er med som en definisjon på forholdet mellom  $b$  og  $B$ . Dette kan vi definere fritt ettersom om vi vil at variablene skal være tilknyttet volum eller masse. Forholdet mellom de blir da tettheten. Med denne definisjonen blir  $B$  en masse hvis  $b$  ikke har noen benevning.

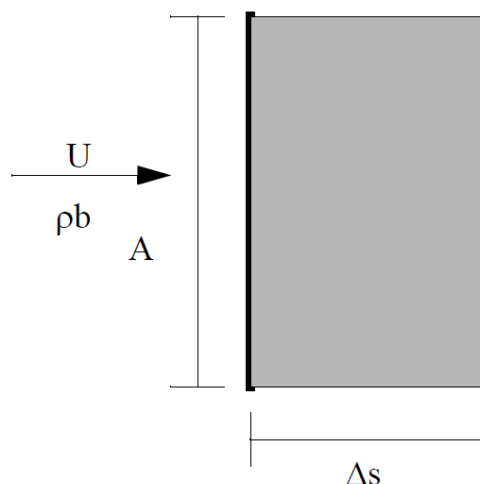
**Eksempel:** En flaske øl har 4.5 volum % alkohol. Alkoholkonsentrasjonen er da  $b=4.5\%$ .  $B$  blir massen av alkoholen i flasken: Volumet av øl (0.33 l), multiplisert med tettheten til alkohol (0.78 kg/liter) multiplisert med konsentrasjonen. Dette blir:

$$B = 0.33 \text{ l} * 0.78 \text{ kg/l} * 4.5 / 100 = 11.6 \text{ gram}$$

I utledningen av Reynolds transportteorem ønsker vi å finne et uttrykk for fluksene gjennom en flate gitt ved variablene  $B$  og  $b$ .

Vi ser på en flate i strømmingen som har areal  $A$ . Igjennom flaten strømmer det fluid med hastighet  $U$ . Væsken inneholder  $b$ . I løpet av tiden  $\Delta t$  vil væsken ha beveget seg en distanse lik  $\Delta s$ . Dette er markert som et volum i figuren, lik  $\Delta V$ . Mengden av  $B$  i dette volumet er  $\Delta B$ , som er gitt fra definisjonen:

$$\Delta B = \int_{\Delta V} \rho b dV = \int_A \rho b dA \cdot \Delta s$$



Vi har også at  $\Delta s = U \Delta t$ . Dette gir

$$\Delta B = \int_A \rho b dA \cdot U \Delta t = \int_A \rho b U \cdot dA \Delta t$$

Eller

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \int_A \rho b U \cdot dA$$

Når  $\Delta$  går mot null får vi:

$$\frac{dB}{dt} = \int_A \rho b U \cdot dA$$

Vi bruker så definisjonen av  $B$  som er gitt tidligere:  $B = \int_V \rho b dV$  som gir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho b dV = \int_A \rho b U \cdot dA$$

Hvis  $U$  vektoren ikke står normalt på flaten  $A$  vil vi i stedet få:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho b dV = \int_A \rho b U \cdot dA \cos \beta \quad \text{der } \beta \text{ er vinkelen mellom } U \text{ vektoren og flaten } A.$$

Vi ser at  $U \cdot dA \cos \beta$  er lik prikk-produktet mellom vektoren  $U$  og arealvektoren til arealet  $A$ . Ligningen kan derfor skrives

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho b dV = \int_A \rho b \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

Dette er Reynolds Transportteorem.

Sammenlignet med ligning 5.23-8, 5.22-9 i boka, har vi antatt at det ikke er noe forandring av  $B$  inne i kontrollvolumet. Dette kommer av at vi antar fluidet er ikke-kompressibelt. Det vil det nesten alltid være for vann. I boka må en også ta høyde for kompressible væsker, for eksempel luft, og da får en et ekstra ledd, som vi ser i ligning 5.23-8, 5.23-9.

## 5.3 Kontinuitetsligningen

En generell form av kontinuitetsligningen kan fås ved å se på et kontrollvolum og bruke definisjonen av en fluks sammen med Reynolds Transportteorem:

$$\text{Fluks} = Q = U \cdot A$$

Reynolds transportteorem (5.23-8, 5.22-9) brukes med  $b$  lik 1, dvs konsentrasjon av vann i volumet. Dette gir:

$$0 = \int_A \rho \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

Summen av fluksene  $U \cdot A$  inn og ut av kontrollvolumet er lik null. På integralform antar vi at hastighetene er uniforme over tverrsnittet. For et kontrollvolum med  $m$  inn/utstrømningsområder får vi da:

$$\sum_{i=1}^m \vec{U}_i \cdot \vec{A}_i = 0$$

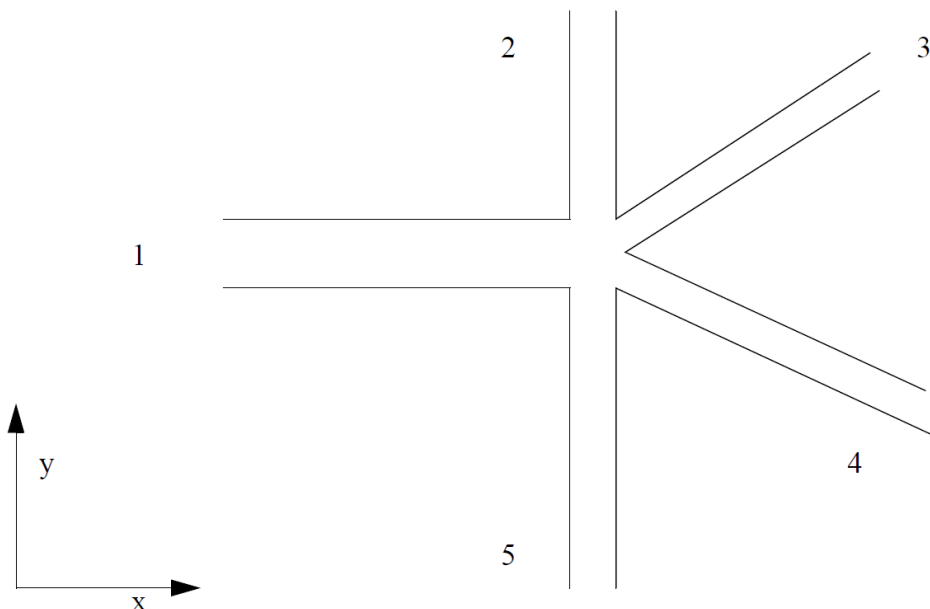
**Eksempel 1: Strømning inn i et kar**

Rør inn: Areal 0.1 m<sup>2</sup>, Hastighet 1 m/s.  
 Overflateareal på tank: 3 m<sup>2</sup>. Hvor fort stiger vannet?

$$U = 1 \text{ m/s} * 0.1 / 3 = 3.3 \text{ cm/s}$$

**Eksempel 2: Strømning i rørkryss: Eksamen, kont 2004:**

Vann strømmer i gjennom et rørkryss med fem rør gitt i skissen under. Rørene ligger i horisontalplanet. Rørene har sirkulært tverrsnitt. Følgende informasjon er gitt:



Rør 1: diameter 0.8 m, vannhastighet 0.5 m/s i retning mot krysset  
 Rør 2: diameter 0.4 m, vannhastighet 1.8 m/s i retning mot krysset

Rør 3: diameter 0.3 m, vannhastighet 0.9 m/s i retning bort fra krysset  
Rør 4: diameter 0.35 m, vannhastighet 1.2 m/s i retning bort fra krysset

a) Hvis vi ønsker en vannhastighet i Rør 5 på 1.7 m/s, hvilken diameter på røret må vi velge?

Løsning: a) Kontinuitetsligningen gir:

Rør 1: diameter 0.8 m, vannhastighet 0.5 m/s i retning mot krysset:  $Q_1 = -0.251 \text{ m}^3/\text{s}$

Rør 2: diameter 0.4 m, vannhastighet 1.8 m/s i retning mot krysset  $Q_2 = -0.226 \text{ m}^3/\text{s}$

Rør 3: diameter 0.3 m, vannhastighet 0.9 m/s i retning bort fra krysset  $Q_3 = 0.063 \text{ m}^3/\text{s}$

Rør 4: diameter 0.35 m, vannhastighet 1.2 m/s i retning bort fra krysset  $Q_4 = 0.115 \text{ m}^3/\text{s}$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = -0.299 \text{ m}^3/\text{s} .$$

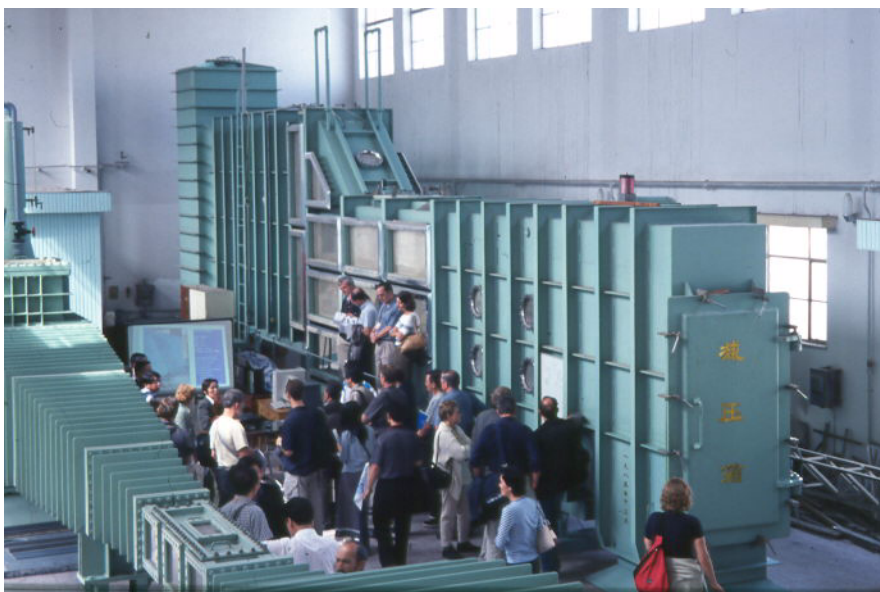
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$$

$$-0.299 \text{ m}^3/\text{s} + Q_5 = 0 \quad \text{eller} \quad Q_5 = 0.299 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = Q / U = 0.175 \text{ m}^2. \text{ Diam} = \underline{0.47 \text{ m}}$$

## 5.5 Kavitasjon

Kavitasjon er en fysisk prosess som skjer der en har veldig lave trykk eller høye hastigheter. Når en får et trykk under kokepunktet, vil små bobler dannes. Boblene transporteres med strømmen, og der trykket øker litt igjen vil boblene kollapse. Siden boblene inneholder mye energi vil kollapsen frigjøre energi. Hvis kollapset skjer nær en vegg, vil energien kunne sprengte løs deler av veggen. Prosessen er så kraftig at både betong og stålvegger kan skades.



*Kavitasjonseksperiment ved et laboratorium i Beijing. Trykket senkes i beholderen vist til høyre, og den må derfor være solid bygd. Beholderen inneholder modellen med eksperimentet.  
(Foto: N. Olsen)*



Trykk kan defineres på to måter: Relativt trykk og absolutt trykk. Relativt trykk er null ved vannoverflaten. Absolutt trykk er null i vakum eller verdensrommet. For at kavitasjon skal skje må det i strømmingen finnes et område der absolutt trykk er lavere enn fordampningstrykket. Et lavt trykk kan skje over hele tverrsnittet eller kun lokalt, for eksempel bak noe som stikker ut i strømmingen. Hvis hastigheten er stor, så kan trykket bak et objekt bli veldig lite. jfr. Bernoullis ligning. Derfor kan kavitasjon også oppstå ved veldig store hastigheter.

Hvor stort trykk som skaper kavitasjon kommer an på atmosfæretrykket og temperaturen på vannet. Dette er gitt i tabellene under:

Høyde over havet (m)	Lufttrykk (kPa)	Temperatur (grader Celcius)	Fordampningstrykk (Pa)
0	101.3	0	611
500	95.43	5	872
1000	89.85	10	1230
2000	79.48	15	1700
4000	61.64	20	2340
		25	3170
		30	4250
		35	5630
		40	7380

Høyre side av denne tabellen står også i boka, side A 14. Venstre del av tabellen står ikke i boka.

Vanligvis brukes Bernoullis ligning til å finne trykkforskjellen mellom vannflaten og det kritiske punktet der kavitasjon kan oppstå. Til denne trykkforskjellen legger en til trykket ved vannoverflaten på venstre siden i tabellen over. Hvis dette trykket er under verdiene på høyre side i tabellen, kan en få kavitasjon.

Typiske steder der en kan få kavitasjon er der en får undertrykk, for eksempel i høybrekk i vannledninger eller i sugeoverløp. En kan også få det der hastighetene er store, for eksempel i turbiner, ledeskovler, overløp og under luker.

*Regneeksempel: En sugepumpe er plassert 9 meter over en innsjø, med et rør ned i innsjøen. Pumpen suger vann opp og pumper det videre til et reservoar. Hastigheten i røret er 1 m/s. Er det fare for kavitasjon? Reservoaret ligger 500 moh. og temperaturen er 10 grader.*

*Løsning: Må finne minste trykk inne i røret. Bruker Bernoulli mellom en partikkel i overflaten (A) av innsjøen og en inne i røret 9 meter over vannoverflaten (B):*

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g}$$

*Antar nullnivå for høyden i A, dvs  $z_A = 0$ . Antar også at hastigheten i vannoverflaten er null:*

$u_A = 0$ . Lufttrykket på vannoverflaten, A, er ifgl tabell: 95.43 kPa. Dette gir:

$$0 + \frac{95430}{\rho g} + \frac{0^2}{2g} = 9 + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1^2}{2g}$$

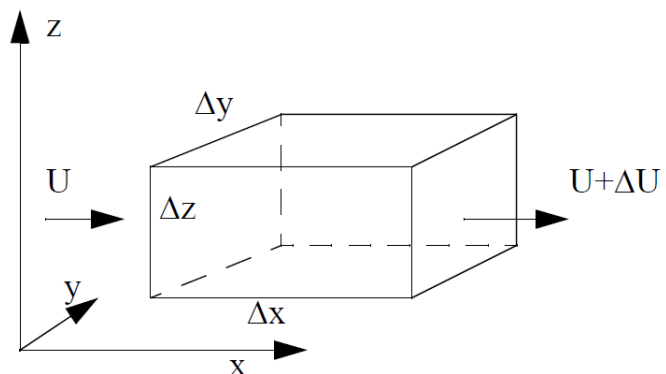
Dette gir trykket i B som:  $p_B = 6640 \text{ Pa}$ . Fordampningstrykket er ifgl. tabellen 1230 Pa. Da det absolute trykket er større enn fordampningstrykket ( $6640 > 1230$ ), er det ikke fare for kavitasjon i røret.

Merk at selv om det ikke er fare for kavitasjon i røret, kan det godt oppstå kavitasjon i pumpa. Dette må vurderes separat, med informasjon om hvor mye undertrykk pumpa tåler.

## 5.5 Kontinuitetsligningen på differensialform

Kontinuitetsligningen kan være på integralform eller differensialform. Når vi regner for hånd, må vi bruke versjonen på integralform. Et CFD program løser differensialligninger, og da brukes kontinuitetsligningen på differensialform. Dette gjelder også innen fagfeltet differensialanalyse.

I utledningen ser vi på et element med størrelse  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  og  $\Delta z$ , som vist i figuren til høyre:



Vi kaller hastigheten i x-retning for  $U$ , hastigheten i y-retning for  $V$  og hastigheten i z-retning for  $W$ . På flatene normalt på x-retningen, får vi følgende flukser:

$$\begin{aligned} \text{Inn: } & U \Delta z \Delta y \\ \text{Ut: } & (U + \Delta U) \Delta z \Delta y \end{aligned}$$

Tilsvarende får vi for de andre to retningene:

$$\begin{aligned} \text{Inn: } & V \Delta z \Delta x \\ \text{Ut: } & (V + \Delta V) \Delta z \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Inn: } & W \Delta x \Delta y \\ \text{Ut: } & (W + \Delta W) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Summen av fluksene inn og ut skal bli null ifgl. kontinuitet:

$$U \Delta z \Delta y - (U + \Delta U) \Delta z \Delta y + V \Delta z \Delta x - (V + \Delta V) \Delta z \Delta x + W \Delta x \Delta y - (W + \Delta W) \Delta x \Delta y = 0$$

Vi deler ligningen på volumet av cellen:  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , og ordner:

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta y} + \frac{\Delta W}{\Delta z} = 0$$

For et meget lite element, får vi at  $\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}$ , som gir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

Dette er kontinuitetsligningen på differensialform. Den kan også skrives som:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{eller} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Der en bruker indekser for de tre forskjellige retningene. På tensorform sløyfes summetegnet og en får:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Denne ligningen brukes i CFD beregninger sammen med Navier-Stokes ligninger.

## Kapittel 6. Kraftlikevekt

Dette kapitlet består stort sett av tre deler:

1. Utledning av impulssetsen (Kp. 6.2)
2. Eksempler på bruk av impulssetsen (Kp. 6.3-6.5)
3. Utledning av Navier-Stokes ligninger (Kp. 16.4)

### 6.2 Utledning av Impulssetsen

Impulssetsen er en av de grunnleggende ligningene i hydraulikken, sammen med kontinuitetsligningen og Bernoulli's ligning. Impulssetsen er basert på en kraftlikevekt. For å utlede den, bruker vi integrasjon av Newton's 2 lov over et kontrollvolum, samt Reynolds Transport Teorem:

Vi starter med Newtons 2. lov på vektorform for en vannpartikkel:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = \frac{d(m\vec{U})}{dt}$$

På Lagrangsk form er  $mU$  bevegelsesmengden til partikkelen. På Eulerisk form bruker vi i tettheten integrert over et kontrollvolum i stedet for massen. Dette gir:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{U})}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{U}) dV$$

Reynolds Transport Teorem er:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho b dV = \int_A \rho b \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

Vi bruker at  $b = \vec{U}$  som gir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{U} dV = \int_A \rho \vec{U} \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

Venstre side i ligningen over er lik høyre side av kraftlikevektsligningen. Tilsammen blir dette:

$$\sum \vec{F} = \int_A \rho \vec{U} \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

Dette er impulssetsen på generell form. Hvis vi nå antar at hastighetsfordelingen er uniform over et hvert tverrsnitt, og at det finnes  $n$  tverrsnitt med inn/utstrømning, får vi:

$$\sum \vec{F} = \sum_{i=1}^n \rho \vec{U}_i \vec{U}_i \cdot \vec{A}_i$$

Dette er en vektorligning med tre komponenter i tre dimensjoner. Hvis vi ser på den skalare kraftverdien i x-retningen får vi:

$$\sum F_x = \sum_{i=1}^n \rho U_{i,x} (\vec{U}_i \cdot \vec{A}_i)$$

Dette er en grei formel å bruke hvis vi har en situasjon med mange inn/utstrømningsområder. Vi må bare huske på fortegnene i prikkproduktet, som sier at  $A$  er en vektor som peker ut av kontrollvolumet. Hvis  $A$  ikke er normalt på x-retningen, må vi beregne prikkproduktet i parantesen i ligningen

*Prikkproduktet av hastighetsvektoren og arealvektoren er en skalar verdi. Dette prikkproduktet kommer av Reynolds Transportteorem, og er med i alle formler der dette teoremet brukes. I impulssetningen kan en bruke formelen for hastighetkomponenten i x-retningen, og få ut kraften i x-retningen. Imidlertid må en bruke hele vektoren i prikkproduktet  $\vec{U} \cdot \vec{A}$ , da denne delen ikke er avhengig av hvilken variabel  $b$  vi har brukt i teoremet.*

Hvis vi har en enda enklere situasjon der kontrollvolumet har ett innstrømningsområde med areal  $A_1$  og uniform fordelt hastighet  $U_1$ , og et annet utstrømningsområde med areal  $A_2$  og hastighet  $U_2$  og arealene står normalt på hastighetsretningen får vi.

$$\sum F_x = \rho \vec{U}_1 (\vec{U}_1 \cdot \vec{A}_1) + \rho \vec{U}_2 (\vec{U}_2 \cdot \vec{A}_2)$$

Merk at indeksene 1 og 2 nå står for to forskjellige områder, og ikke retning 1 eller 2. Begge hastighetene  $U_1$  og  $U_2$  er i x-retningen.

Vannføringen,  $Q$ , er gitt ved:

$$Q = \vec{U}_2 \cdot \vec{A}_2 = \vec{U}_1 \cdot \vec{A}_1$$

Hvis alle vektorene peker i x-retningen blir ligningen:

$$Q = U_2 A_2 = -U_1 A_1$$

Minustegnet kommer av at vektorene til  $U_1$  og  $A_1$  peker motsatt retning. Vektorene til  $U_2$  og  $A_2$  peker samme vei.

Når vi setter dette inn i kraftligningen over, får vi:

$$\sum F_x = \rho Q (\vec{U}_2 - \vec{U}_1)$$

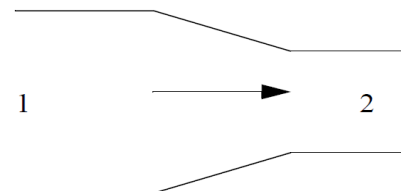
**Husk:** Impulssetningen er en vektorligning, mens Bernoulli's lov er en skalarligning. Dette betyr at Impulssetningen gir tre ligninger for et generelt tredimensjonalt strømningsbilde, mens Bernoulli's er kun en ligning.

## 6.3+4 Eksempler

Det gies veldig mange eksempler i Kapittel 6.3 og 6.4. Enkelte vil bli gjennomgått i forelesningene, og enkelte er gitt på øvingene.

### Eksempel 1: Dyse

*Problem:* Finn kraften i horisontal retning på dysen vist i figuren til høyre. Arealene i snittene 1 og 2 er gitt som:  $A_1 = 200 \text{ cm}^2$  og  $A_2 = 50 \text{ cm}^2$ . Vannføringen er 30 l/s. Vi antar at vannet strømmer ut i friluft i snitt 2.



*Løsning:* Finner først vannhastighetene i punktene 1 og 2. Vannføringen er 30 l/s = 30 dm<sup>3</sup>/s = 30 000 cm<sup>3</sup>/s.

Kontinuitetsligningen gir:

$$U_1 = Q/A_1 = 30\,000/200 = 150 \text{ cm/s} = 1.5 \text{ m/s}$$

$$U_2 = Q/A_2 = 30\,000/50 = 600 \text{ cm/s} = 6 \text{ m/s}$$

Finner så trykket i snitt 1, ved hjelp av Bernoulli's ligning. Antar at de to snittene ligger i samme nivå, og at trykket i snitt 2 er null:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1.5^2}{2g} = 0 + \frac{0}{\rho g} + \frac{6^2}{2g}$$

Trykket i snitt 1 blir: 16.9 kPa.

Finner så opplagerkraften,  $F_o$ , fra impulssetningen:

$$F_o + F_p = Q\rho(U_2 - U_1) = 0.03 \text{ m}^3/\text{s} * 1000 \text{ kg/s} (6 \text{ m/s} - 1.5 \text{ m/s}) = 135 \text{ N}$$

Kraften fra trykket er:

$$F_p = PA = 16\,900 \text{ Pa} * (200 \text{ cm}^2 / 10\,000 \text{ cm}^2/\text{m}^2) = 337 \text{ N}$$

Har her antatt at vannet strømmer ut i friluft i snitt 2, slik at trykkforskjellen virker på snitt 1.

Opplagerkraften er da:

$$F_o = -337 + 135 = -202 \text{ N}$$

Impulskraften virker i motsatt retning av aksellerasjonen. Siden hastigheten er større i snitt 1 enn i snitt 2, er aksellerasjonen i hastighetsretningen. Kraften på røret er da i motsatt retning, dvs mot hastighetsretningen. (Røret blir dyttet bakover). Trykkraften vil virke i motsatt retning, da trykket er høyere i snitt 1 enn i snitt 2.

Kraften virker i retning med hastighetsretningen, da trykkraften er større enn impulskraften.

Analogi til holding av en vannslange: Her kjenner en kun impulskraften når en holder slangen. Hvis en stenger dysa, og det fremdeles er trykk i slangen, vil slangeveggene ta opp denne kraften. Når en skrur på vannet, vil impulskraften presse slangen bakover. Hvis impulskraften hadde vært større enn trykkraften, ville slangen kollapset, om en kun holdt i slangen. Dette fordi gummislangen kun kan ta opp strekkrefter.

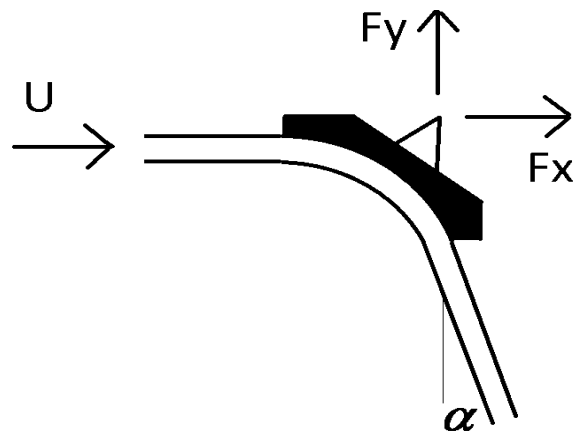
### Eksempel 2: Stråle som treffer en skrå plate

Gitt en vannhastighet på 30 m/s, og en tykkelse på strålen på 5 cm. Gitt en firkantet stråle, 50 cm bred, og en hastighetsforandring på 60 grader. Dvs,  $\alpha$  i figuren er 30 grader.

**Løsning:** Finner først vannføringen fra kontinuitetsligningen:

$$Q = UA = 30 \text{ m/s} * 0.05 \text{ m} * 0.5 \text{ m} = 0.75 \text{ m}^3/\text{s}$$

Bruker så impulssatsen for å finne kreftene i de to retningene. Må da først finne hastighetene etter defleksjonen. Antar at strålen har en konstant tykkelse, slik at hastigheten i strålen ikke forandrer seg.



Positiv x-retning er mot høyre, mens positiv y-retning er oppover.

Hastighetene etter defleksjonen blir:

$$X\text{-retning: } U_x = U \cos 60 = 30 \text{ m/s} * 0.5 = 15 \text{ m/s}$$

$$Y\text{-retning: } U_y = U \sin 60 = 30 \text{ m/s} * 0.866 = 26 \text{ m/s}$$

Kreftene i de to retningen blir da:

$$F_x = \rho(U_{x,1}U_1A_1 + U_{x,2}U_2A_2) = 1000 \text{ kg/s} * (30 \text{ m/s} * 30 \text{ m/s} * -0.025 \text{ m}^2 + 15 \text{ m/s} * 30 \text{ m/s} * 0.025 \text{ m}^2) = -11.3 \text{ kN}$$

$$F_y = \rho(U_{y,1}U_1A_1 + U_{y,2}U_2A_2) = 1000 \text{ kg/s} * (0 \text{ m/s} * 30 \text{ m/s} * -0.025 \text{ m}^2 + (-26 \text{ m/s}) * 30 \text{ m/s} * 0.025 \text{ m}^2) = -19.5 \text{ kN}$$

Kreftene mot vannvolumet blir i negativ retning for begge komponentene, dvs motsatt av vist på figuren over.

### Eksempel 3: Rørbend

Vi skal finne lagerkreftene som kreves for bendet i figuren på side 202-8, 178-9. En skisse er gitt under.

Gitt er vannføringen ( $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$ ), vekten av stålet ( $500 \text{ N}$ ), volumet av vannet ( $0.1 \text{ m}^3$ ), og trykket i innløpet ( $150 \text{ kPa}$ ). Det er også gitt at tverrsnittet er sirkulært, og diametrene er gitt ( $0.3 \text{ m}$  og  $0.15 \text{ m}$ ).

Kreftene på konstruksjonen er:

1. Trykkrefter
2. Impulskrefter
3. Vekten av metallet
4. Vekten av vannet

Trykkreftene virker kun i horisontal retning. Vekten av metallet og vannet virker kun i vertikal retning. Impulskreftene virker kun i horisontal retning.

Tverrsnittsarealene av rørene i snitt 1 og 2 er gitt fra  $A = \pi r^2$ :

$$A_1 = 0.07065 \text{ m}^2, A_2 = 0.01766 \text{ m}^2,$$

Starter med å finne hastighetene i snitt 1 og 2. Dette fås av kontinuitetsligningen:

$$U = Q/A \rightarrow U_1 = 3.54 \text{ m/s og } U_2 = 14.15 \text{ m/s.}$$

Finner så trykket i snitt 2 fra Bernoulli:  $59.3 \text{ kPa}$ . En har her satt direkte inn i ligningen. Høydeforskjellen er gitt som avstanden mellom midten av de to rørene: Dette blir summen av rørenes radius ( $0.15 \text{ m} + 0.075 \text{ m}$ ) i tillegg til avstanden mellom de ( $0.1 \text{ m}$ ). Tilsammen  $0.325 \text{ m}$ .

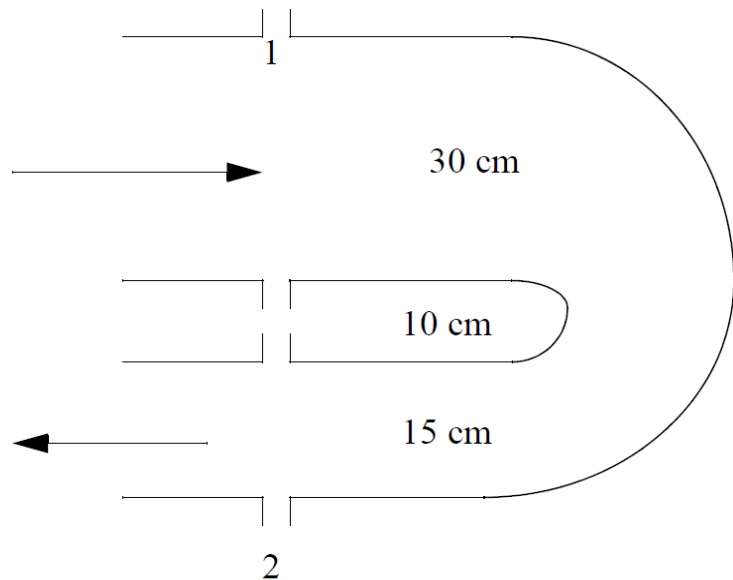
Trykkraften i horisontal retning blir:

$$F_p = P_1 A_1 + P_2 A_2 = 150\,000 * 0.07065 + 59\,300 * 0.01766 = 11\,645 \text{ N.}$$

Opplagerkraften,  $F_o$ , i horisontal retning blir:

$$F_o + F_p = \rho U_1 U_1 A_1 + \rho U_2 U_2 A_2 = 1000 * 3.54 * 3.54 * (-0.07065) + 1000 * (-14.5) * (-14.5) * (-0.01766) = -4422 \text{ N}$$

Opplagerkraften i x-retning blir:





$$F = -11\,645 - 4\,422 = -16\,067 \text{ N}$$

Bruk av retningene fra arealvektorene gir at impuls kraften blir negativ. Det betyr at stålet dytter vannet i negativ  $x$ -retning. Trykket virker fra vannet mot stålet, og dytter det i positiv retning. Det betyr at trykkraften fra stålet mot vannet også blir i negativ retning. Trykkraften og impuls kraften vil derved matematisk også få samme fortegn. Kraften blir negativ fra stålet mot vannet og positiv fra vannet mot stålet.

I vertikalretning virker vekten av stålet og vannet. Vekten av vannet blir:

$$F = \rho gV = 1000 \text{ kg/m}^3 * 0.1 \text{ m}^3 * -9.81 \text{ m/s}^2 = 981 \text{ N}.$$

Tilsammen med vekten av stålet blir dette:  $500 + 981 = 1\,481 \text{ N}$ .

#### **Eksempel 4: krefter på luke**

Finn kreftene på en 5 meter bred luke, som har en vannføring under seg på  $14 \text{ m}^3/\text{s}$ . Dybden oppstrøms er 2 meter, og dybden nedstrøms er 0.5 meter.

**Løsning:** Finner først hastighetene ved kontinuitetsligningen:

$$\text{Oppstrøms: } U = 14 / (5 * 2) = 1.4 \text{ m/s}$$

$$\text{Nedstrøms: } U = 14 / (5 * 0.5) = 5.6 \text{ m/s}$$

Bruker impuls satsen + hydrostatisk trykk:

$$F + \rho g (A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2) = \rho Q (U_2 - U_1)$$

$$F + 1000 * 9.81 (5 * 2 * 1 - 5 * 0.5 * 0.25) = 1000 * 14 (U_2 - U_1)$$

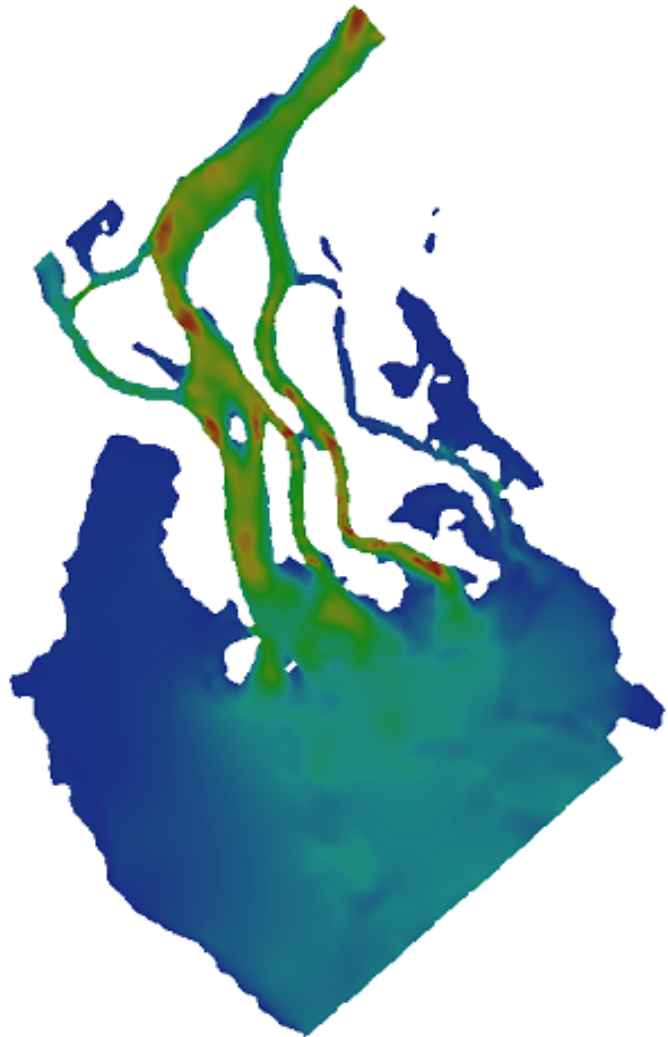
$$F = 58800 \text{ N} - 91959 \text{ N} = \underline{\underline{-33 \text{ kN}}}$$

Dette er de ytre kreftene på kontrollvolumet. Kraften fra vannet mot luka er motsatt rettet, dvs. i positiv retning (mot høyre).

## **6.6. Navier-Stokes ligninger**

Navier-Stokes ligninger brukes til å løse kompliserte strømningsproblemer numerisk ved hjelp av CFD programmer. De er derfor noen av de viktigste ligningene innen fluidmekanikken.

Fig. 6.6.1 til høyre viser vannhastighetene i Øyern-deltaet, som er funnet ved å løse Navier-Stokes ligninger. Beregningen er tredimensjonal, men figuren viser kun hastighetene ved vannoverflaten, sett ovenfra. Rødt er store hastigheter mens blått er lave hastigheter. Vannet kommer inn fra Glomma øverst i figuren, og Øyern er i den nedre delen av figuren. Beregningsnettet er laget av Peggy Zinke under hennes doktorstudium. Vi ser at vi har de største hastighetene i kanalene i deltaet og de laveste hastighetene i innsjøen.



Navier-Stokes ligninger har fire ledd. De to første leddene er aksellerasjonsledd. Aksellerasjonen er utledet tidligere:

$$a_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (6.6.1)$$

Navier-Stokes ligninger er **Kraft pr. volumenhet**. Vi ser på et lite element med volum  $V$  som blir utsatt for krefter. Aksellerasjonen blir da:

$$\frac{F_i}{V} = \frac{m}{V} a_i = \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.6.2)$$

Massen av elementet pr. volumenhet er lik tettheten av vannet. Dette er de to første leddene i Navier-Stokes ligninger. De to andre leddene kommer av kreftene på elementet vi ser på.

I figuren under ser en på kreftene i x-retning på et 2D fludelement med størrelse  $\Delta x$  og  $\Delta y$ : (Fig. 6.9, s 225-8, Fig 6.10, s. 196-9). Vi antar at dimensjonen i den tredje retningen er  $\Delta z$

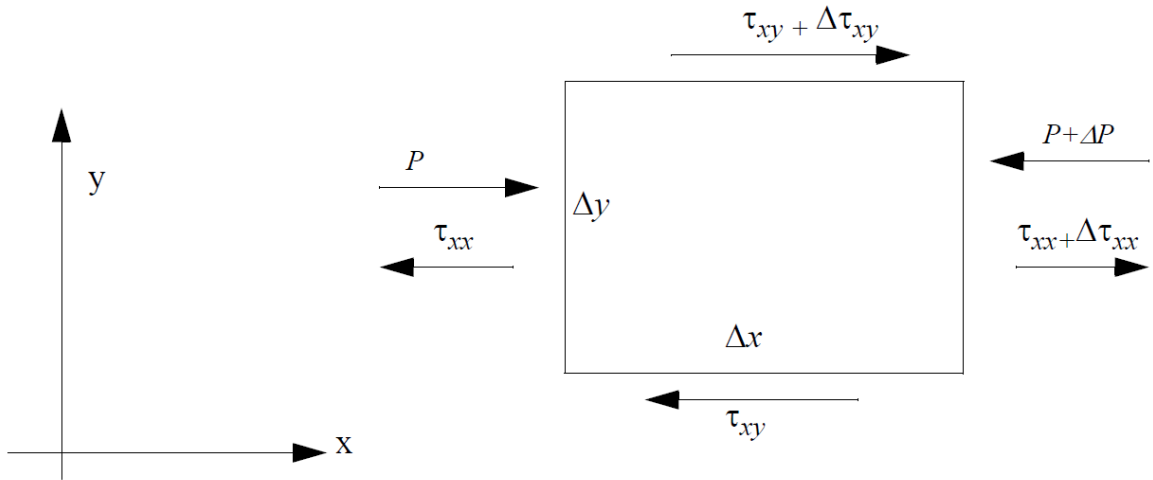


Fig. 6.6.2: Krefter og spenninger på et kontrollvolum i to dimensjoner

Det er to typer krefter på kontrollvolumet: normalspenninger og skjærspenninger. Normalspenningen på en flate er en sum av en isotropisk komponent og en ikke-isotropisk komponent. Den isotropiske komponenten er trykket,  $P$ . Den ikke-isotropiske komponenten kan vi kalle for avviksspenninger, dvs. de avviker fra isotropisk tilstand. Normalspenningen på en flate kan da skrives:

$$\sigma_x = -P + \tau_{xx}. \quad (6.6.3)$$

Der  $\tau_{xx}$  er avviksspenningen.

I den videre utledningen ser vi først kun på trykkreftene. Summen av trykkreftene over elementet blir:

$$F_x = (P - (P + \Delta P) \Delta y \Delta z) = -\Delta P \Delta y \Delta z \quad (6.6.4)$$

Grunnen til det negative fortegnet er at x-aksen er positiv mot høyre. Hvis trykket er høyere på venstre side av elementet enn på høyre, vil dette medføre at summen av trykkreftene blir i negativ x-retning.

I Navier-Stokes ligninger, regner vi på krefter pr. volumenhet. Vi deler derfor på volumet av elementet: Kraft/volum blir:

$$\frac{F_x}{V} = \frac{-\Delta P \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{-\Delta P}{\Delta x} \quad (6.6.5)$$

Når  $\Delta$  går mot null får vi at leddet blir  $-\frac{\partial P}{\partial x}$

Sammenstiller vi dette med trykkleddet, og neglisjerer de andre kraftleddene, får vi:

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (6.6.6)$$

På tensorform skrives dette ofte i stedet:

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij}) \quad (6.6.7)$$

For å gjøre det klart at  $P$  kun regnes i retningen til  $i$  når ligningen er på tensorform, brukes Kronecker's delta:  $\delta_{ij}$ . Denne er 1 når  $i=j$ , og 0 ellers. Dette gir for eksempel:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (P \delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (P \delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (P \delta_{i3}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (P) \quad (6.6.8)$$

### Viskøse ledd

De viskøse kreftene kan da utledes ved å se på skjærspenningene og avviksspenningene på et element, slik som vist i Fig. 6.6.2. Dette gir følgende krefter, når vi multipliserer med arealsidene  $\Delta x$  og  $\Delta y$ .

$$F_{viskøs} = [(\tau_{xy} + \Delta \tau_{xy}) - \tau_{xy}] \Delta x \Delta y + [(\tau_{xx} + \Delta \tau_{xx}) - \tau_{xx}] \Delta y \Delta z \quad (6.6.9)$$

Vi deler på volumet,  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , og lar  $\Delta$  gå mot null. Dette gir:

$$\frac{F_{viskøs}}{V} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) \quad (6.6.10)$$

Vi må så bruke et uttrykk for sammenhengen mellom spenningene og tøyningene. Denne sammenhengen er gitt med viskositetsdefinisjonen for en todimensjonal strømning:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad \text{og} \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6.6.11)$$

Vi setter det inn i ligningen over, og får:

$$\frac{F_{viskøs}}{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \quad (6.6.12)$$

Hvis i skriver dette med tensornotasjon, der x-retningen får index 1 og y retningen for indeks 2 får vi:

$$\frac{F_{viskøs}}{V} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( 2\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \right] \quad (6.6.13)$$

Vi vil nå vise at vi kan skrive dette som:

$$\frac{F_{viskøs}}{V} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (6.6.14)$$

Her er i retning 1 og j retning 2. De repeterte indeksene er i j-retningen. Dvs vi kan skrive uttrykket med summetegn:

$$\frac{F_{viskøs}}{V} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \quad (6.6.15)$$

Vi ser at dette er det samme uttrykket som Ligning 6.6.13. Vi har derfor vist at de viskøse leddene kan skrives på formen gitt i Ligning 6.6.14. Når vi legger dette til ligning 6.6.7, får vi Navier-Stokes ligninger:

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (-P \delta_{ij} + \rho \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)) \quad (6.6.16)$$

I denne ligningen har vi ikke antatt konstant viskositet, slik at denne kan variere. For laminær strømning vil imidlertid viskositeten være konstant. Hvis en skal beregne turbulent strømning, vil en ofte bruke en Reynolds midlet versjon av Navier- Stokes ligninger. Da blir det ofte brukt en turbulent viskositet, som varierer og blir beregnet med en turbulensmodell. Dette er et sett med matematiske ligninger for den turbulente viskositeten. Dette vil vi gå litt videre med i Del 4 av Hydromekanikk, samt i faget *TVM 4155 Numerisk modellering og hydraulikk*, der vi ser på løsningsalgoritmer for Navier-Stokes ligninger.

## Kapittel 7. Energibetraktninger

Dette kapittelet beskriver Energiligningen. Den ligner på Bernoulli's ligning, men den har i tillegg med energitap og energitilførsel, som for eksempel friksjonstap, pumper, vannkraftverk etc. I praksis er det denne ligningen som ofte blir brukt når en snakker om Bernoulli's ligning.

Vi vil først utlede ligningen, og så komme med noen eksempler på hvordan den kan brukes. Et delkapittel omhandler også hvordan en tar hensyn til ikke-uniforme strømningsprofiler i ligningen.

### 7.1+2 Utleddning av energiligningen

Utleddningen av ligningen starter med Termodynamikkens første hovedsetning:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad \text{Endring i energi er lik tilført energi minus energitap}$$

$dE$  er forandring i energi.  $Q$  er energi tilført systemet og  $W$  er energitap.  $W$  kan for eksempel komme fra en pumpe.  $W$  kan for eksempel være friksjonstap eller energi som tas ut i et kraftverk. Energitap måles i Watt, som er en benevnning for Nm/s.

Spesifikk energi,  $e$ , er energi pr. masseenheter, og kan være på følgende former: hastighetsenergi ( $e_k$ ), potensiell energi ( $e_p$ ), trykkenergi ( $e_t$ ) og indre energi ( $\hat{u}$ ). Indre energi er for eksempel temperaturenergi.

$$e = e_k + e_p + e_t + \hat{u} = \frac{U^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} + \hat{u}$$

Her har vi brukt følgende definisjoner på kinetisk og potensiell energi fra basisfysikken:

$$e_k = \frac{\frac{1}{2} M U^2}{M} = \frac{U^2}{2} \quad \text{og} \quad e_p = \frac{Mgz}{M} = gz$$

Trykkleddet fåes fra en omskrivning av hydrostatisk trykk:  $p = \rho gz$  som gir  $gz = \frac{p}{\rho}$

For å få en spesifikk trykkenergi som inneholder  $p$  og har samme dimensjoner som de andre to spesifikke energiene, må vi ha at:

$$e_t = \frac{p}{\rho}$$

Vi bruker ligningen på et kontrollvolum, og ser på tilført og avgitt energi i dette. Forandringen av energien i kontrollvolumet er da gitt ved integrasjon over kontrollvolumet av den spesifikke energien multiplisert med vannets tetthet:

$$E = \int_V \rho e dV$$

Innsatt i ligningen over:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV$$

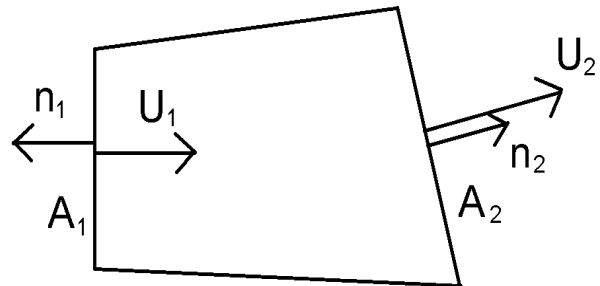
Når vi ser bort i fra ikke-stasjonære ledd og bruker Reynolds Transport Teorem, blir dette lik:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \rho \int_A e (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = \rho \int_A \left( \frac{U^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} + \hat{u} \right) (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA$$

Den indre energien,  $\hat{u}$ , forandrer seg pga. friksjonstap og andre energitap. Vi vil senere se på formler for å bestemme denne.

### Ett innstrømning og ett ustrømningsområde

Ligningen over er den generelle energiligningen. Vanligvis brukes en forenklet versjon der en kun har en innstrømningflate og en ustrømningsflate. Dette er typisk for strømning i et rør eller en kanal. Dette er vist på et kontrollvolum i figuren til høyre, der innstrømningsområdet kalles 1 og utstrømningsområdet kalles 2. Energiligningen blir da:



$$\dot{Q} - \dot{W} = \rho \int_{A_1} \left( \frac{U_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \hat{u}_1 \right) (\vec{U}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \rho \int_{A_2} \left( \frac{U_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \hat{u}_2 \right) (\vec{U}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2$$

Vi må så gjøre noen antagelser om hvordan variablene  $z$ ,  $U$  og  $P$  er fordelt over tverrsnittene  $A$ . Vi antar at  $z$  er verdien til arealsenterene til  $A$ , og derved konstanter. Vi antar det samme for  $P$  og  $\hat{u}$ , at vi bruker verdien i arealsenteret. Vi antar videre at hastighetsvektorene og arealvektorene er parallelle. Normalvektorene til flaten 1 peker i motsatt retning av hastighetsvektoren. Dette leddet får derfor et negativt fortegn.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \rho \int_{A_2} \left( \frac{U_2^3}{2} \right) dA_2 + \rho (gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \hat{u}_2) Q_2 - \rho \int_{A_1} \left( \frac{U_1^3}{2} \right) dA_1 - \rho (gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \hat{u}_1) Q_1$$

### Parameteren $\alpha$ :

Denne parameteren er definert ved formelen:

$$\alpha = \frac{\int U(y)^3 dA}{A \bar{U}^3}$$

Der  $\bar{U}$  er gjennomsnittshastigheten over tverrsnittet  $A$ . Parameteren sier noe om hvor mye hastighetsfeltet avviker i forhold til et uniformt profil. Et uniformt profil gir  $\alpha = 1$ . Jo større variasjoner hastigheten har over tverrsnittet, jo større blir  $\alpha$ . For laminær strømning i et rør kan det vises at hastighetsprofilen er en parabel, og at  $\alpha$  kan regnes ut til å bli 2. For turbulent strømning er hastighetsprofilen med uniformt, og en antar ofte at da kan  $\alpha$  settes til 1. Dette betyr også at ligningen kan skrives uten  $\alpha$ , noe som ofte gjøres. Det er da underforstått at en regner på turbulent strømning.

Leddet

$$\rho \int_{A_2} \left(\frac{U_2}{2}\right)^3 dA_2 = \frac{\rho}{2} \int_{A_2} U_2^3 dA_2$$

Kan da multipliseres med  $A\bar{U}^3$  og deles med  $A\bar{U}^3$ . Vi får da:

$$\frac{\rho}{2} \int_A U(y)^3 dA = \frac{\rho}{2} \frac{A}{A\bar{U}^3} \int U(y)^3 dA = \frac{\rho}{2} \alpha A \bar{U}^3 = \alpha \frac{\rho}{2} \bar{U}^2 Q$$

Med denne definisjonen, kan vi erstatte integralleddene over med  $\alpha\rho A\bar{U}^3$  som er lik  $\alpha\rho Q\bar{U}^2$ . Dette gir:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \rho \frac{\alpha_2}{2} Q_2 \bar{U}_2^2 + \rho \left( gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \hat{u}_2 \right) Q_2 - \rho \frac{\alpha_1}{2} Q_1 \bar{U}_1^2 - \rho \left( gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \hat{u}_1 \right) Q_1$$

Kontinuitetsligningen gir at  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Vi deler på  $\rho g Q$ :

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}}{\rho g Q} = \alpha_2 \frac{\bar{U}_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\hat{u}_2}{g} - \alpha_1 \frac{\bar{U}_1^2}{2g} - z_1 - \frac{p_1}{\rho g} - \frac{\hat{u}_1}{g}$$

### Friksjonstap og indre energi

Den indre energien,  $\hat{u}$ , forandrer seg pga. friksjonstap og andre energitap. Vi innfører begrepet energitap i form av en energihøyde, definert som:

$$h_L = \frac{(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{g}$$



Energiligningen kan da skrives:

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}}{\rho g Q} = \alpha_2 \frac{\overline{U_2^2}}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - \alpha_1 \frac{\overline{U_1^2}}{2g} - z_1 - \frac{p_1}{\rho g} + h_L$$

Ligningen er som Bernoulli's ligning, men med tapsledd. Tapsleddet tar vare på forandring i indre energi. Tapsleddene er i hovedsak singulærtap og friksjonstap. Friksjonstap regnes ofte i energitap pr. lengdeenhet av kanal/rør. Detaljerte formler for friksjonstapene blir gitt i Kap. 10 og 15.

**Eksempel: Vannstandssprang:**

Finn energitapet i et vannstandssprang, der vannstanden øker fra  $h_1=0.5$  m til  $h_2 = 1.5$  m. Gitt en vannføring pr. breddeenheter lik  $q=3\text{m}^3/\text{s}$ . Hastighetene blir  $U_1 = 6$  m/s og  $U_2 = 2$  m/s. Bruker energiligningen langs overflaten der trykket er null. Får innsatt:

$$\frac{0-0}{\rho g Q} = \frac{2^2}{2g} + 1.5 + \frac{0}{\rho g} - \frac{6^2}{2g} - 0.5 - \frac{0}{\rho g} + h_L$$

Dette gir at  $h_L = 0.8$  m. Dette kan konverteres til Watt ved å anta dette er et energitap som taes ut fra systemet.

$$\frac{0 - \dot{W}}{1000 * 9.81 * 3} = 0.8 \text{ m}$$

Dette gir at effekttapet blir 18.6 kW (pr. breddemeter)

## 7.4. Effekt og energi

Energi som tilføres til et system er ofte i form av en pumpe. Energi som taes ut, kan være en turbin i et vannkraftverk. Enhetene for effekt blir:

$$\text{Effekt, } \dot{W} = \text{Energi/tid (Watt)} = Q \rho g H / \eta \text{ [m}^3/\text{s kg/m}^3 \text{ m/s}^2 \text{ m} = \text{kg m/s}^2 \text{ m/s} = \text{Nm/s}]$$

$$\text{Virkningsgrad } (\eta) = (\text{Energi} - \text{tap}) / \text{Energi}$$

Eksempel: Et tap på 20 % vil gi en virkningsgrad på 0.8.

Formelen over gjelder for å finne pumpeeffekten, gitt en vannføring Q og en pumpehøyde H. Da vil nødvendig pumpeeffekt øke ettersom virkningsgraden går ned. For et vannkraftverk, må en i stedet gange med virkningsgraden. Dette fordi effekten vil minske med minskende virkningsgrad:.

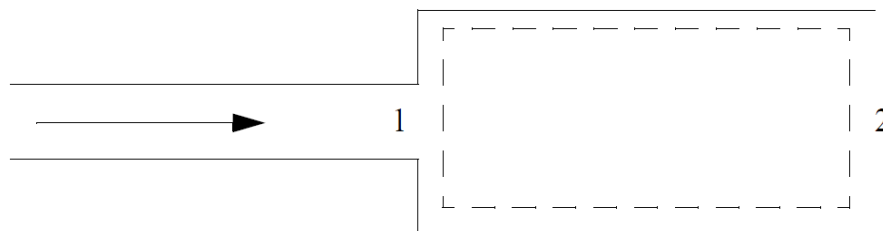
$$\text{Effekt, } \dot{W} = Q \rho g H \eta$$

Se eksempel med vannkraftverk på slutten av kapitlet.

## 7.7 Singulærtap

Hvis et rør får en relativt brå overgang til en større eller mindre diameter, så vil det dannes resirkulasjonssoner nedstrøms overgangen. Disse sonene vil produsere ekstra turbulens, som trekker energi i fra strømmingen. Dette energitapet kan beregnes analytisk for noen geometrier, mens for andre tilfeller må en ha et laboratorieforsøk for å bestemme verdiene.

Et tilfelle der overgangen er en ekspansjon tilsvarende figuren under, har vi mulighet til å finne en analytisk formel for energitapet.



Vi starter med energiligningen mellom punkt 1 og 2 i figuren over:

$$\frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - h_L$$

Vi har her antatt ingen pumper/vannkraftverk, og at hastigheten er uniform over tverrsnittet. Impulssatsen på kontrollvolumet mellom 1 og 2 (stiplet i figuren over):

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho A_2 U_2^2 - \rho A_1 U_1^2$$

Merk at trykket over side 1 virker over hele tverrsnittet  $A_2$ . Løser begge ligningene med hensyn på  $p_1 - p_2$ , og eliminerer disse:

$$\text{Impulssatsen: } p_1 - p_2 = \rho U_2^2 - \rho U_1^2 \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{Energiligningen: } p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(U_2^2 - U_1^2) + \rho g h_L$$

$$\text{Sammensatt: } \frac{\rho}{2}(U_2^2 - U_1^2) + \rho g h_L = \rho U_2^2 - \rho U_1^2 \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{Løser mhp } h_L: h_L = \frac{1}{g} \left[ U_2^2 - U_1^2 \frac{A_1}{A_2} - \frac{1}{2}(U_2^2 - U_1^2) \right]$$

Bruker kontinuitetsligningen til å eliminere  $A$ 'ene:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{U_2}{U_1}$

Som gir:  $h_L = \frac{1}{g} [U_2^2 - U_1^2 \frac{U_2}{U_1} - \frac{1}{2}(U_2^2 - U_1^2)] = \frac{1}{g} [\frac{1}{2}U_2^2 - U_1 U_2 + \frac{1}{2}U_1^2]$  eller  $h_L = \frac{1}{2g}(U_1 - U_2)^2$

Denne ligningen inneholder ingen empiriske koeffisienter, og gjelder kun for en rørekspansjon, der vinklene i ekspansjonen er 90 grader.

Merk: Hvis  $U_2$  er tilnærmet lik null fåes  $h_L = \frac{U^2}{2g}$  som tilsvarer en  $K$  faktor på 1.0 i ligningen under.

## Tapskoeffisienter

Den generelle ligningen for singulærtap er oftest på formen:

$$h_L = K \frac{U^2}{2g}$$

Den empiriske koeffisienten,  $K$ , avhenger av geometrien en ser på. Koeffisienten må bestemmes fra målinger, i felt eller i laboratoriet, eller ved bruk av CFD. Tabell 10.5, side 337-9 gir  $K$  faktorer for forskjellige geometrier. I tabellen merker vi oss:

**Innløpstep:** Faktoren  $K$  er ca. 0.5 for skarpkantet innløp. For mer avrundede innløp, vil en få lavere verdier.

**Utløpstep:** Faktoren  $K$  er som oftest 1.0. Dette fåes fra figuren med ekspansjonstep, der en setter at tverrsnittsarealet på nedstrøms rørbit er mye større enn oppstrøms rørbit. En  $K$  faktor på 1.0 betyr at hele hastighetshøyden tapes.

*Bildet er tatt fra en stasjon under laboratorieøvingen som omhandler falltap i bend. Vann strømmer igjennom røret rundt stativet, og en har trykkmålere i midten. Disse viser trykkehøyden før og etter bendene. En kan derved lese av trykfallhøyden direkte. (Foto: N. Olsen)*



**Eksempel: Vannkraftverk:**

Vann taes fra ett magasin til et annet. Nivåforskjell 30 meter. Rørlengde 2 km. Falltap 1m/km. Virkningsgrad turbin: 0.9. Vannføring 10 m<sup>3</sup>/s. Rørtverrsnitt 10 m<sup>2</sup>. Innløpstapskoeffisient: K=0.5. Utløpstapskoeffisient: 1.0. Lukepropptapskoeffisient: 0.2. Hva er effekten? Hvor stor prosentdel av energien går tapt?

**Løsning:** Regner først ut vannhastigheten fra kontinuitetsligningen:  $U=Q/A = 10/10 = 1$  m/s. Regner så ut falltapene:

Friksjonstap:  $2 \text{ km} * 1 \text{ m/km} = 2$  meter.

Singulærtap:

Innløp:  $0.5 \times 12/2g = 0.025$  m

Utløp:  $1.0 \times 12/2g = 0.05$  m

Lukepropp:  $0.2 \times 12/2g = 0.01$  m

Total fallhøyde er da:  $30 \text{ m} - 2 \text{ m} - 0.025 \text{ m} - 0.05 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 27.915$  m

Effekten på turbinen blir:  $\dot{Q} = \eta \rho Q g h = 0.9 * 1000 * 10 * 9.81 * 27.915 = 2.46$  MW.

Hvis det ikke hadde vært noe energitap, hadde effekten vært:  $1.0 * 10 * 1000 * 9.81 * 30 = 2.94$  MW

Energitalet er da:  $2.94 - 2.46 = 0.478$  MW. Dette er 16 % av den tilgjengelige energien.

**Eksempel: Pumpe:**

Vann taes fra en innsjø til et høydebasseng. Nivåforskjellen er 200 meter. Rørlengden er 3 km. Falltap 2 m/km. Virkningsgrad på pumpen er: 0.85. Vannføring 100 l/s. Rørtverrsnitt 0.04 m<sup>2</sup>. Innløpstapskoeffisient: K=0.5. Utløpstapskoeffisient: 1.0. Hvor stor må pumpeeffekten være?

**Løsning:** Regner først ut vannhastigheten fra kontinuitetsligningen:  $U=Q/A = 0.1/0.04 = 2.5$  m/s. Regner så ut falltapene:

Friksjonstap:  $3 \text{ km} * 2 \text{ m/km} = 6$  meter.

Singulærtap:

Innløp:  $0.5 \times 2.52/2g = 0.16$  m

Utløp:  $1.0 \times 2.52/2g = 0.31$  m

Total fallhøyde er da:  $200 \text{ m} + 6 \text{ m} + 0.31 \text{ m} + 0.16 \text{ m} = 206.47$  m

Effekten på pumpen blir:

$$\dot{W} = \rho Q g h / \eta = 1000 * 0.1 * 9.81 * 206.45 / 0.85 = 202 / 0.85 = 238 \text{ kW.}$$

## Del 4: Rør og friskeilstrømning (Kapittel 9, 10 og 15)

Del 4 inneholder temaene rørstrømning og friskeilstrømning. Disse er igjen omhandlet i hvert sitt kapittel: Rørstrømning i kapittel 9.5 og 10 og friskeilstrømning i kapittel 15.

### Kapittel 9 og 10 Rørstrømning

Motivasjon: Hensikten med dette kapittelet er å lære studentene å dimensjonere rørledninger: Hvor stort rør trenger en for å kunne transportere en viss mengde vann? Hvor mye vann kan ett bestemt rør transportere? Formlene og metodene i kapittelet er direkte anvendbare i konsulentvirksomhet innenfor vannfag. Typiske eksempler: Dimensjonere vannforsyningsanlegg, avløpsanlegg eller tunneller i forbindelse med vannkraftverk. Mange av formelene er også anvendbare til friskeilstrømning.

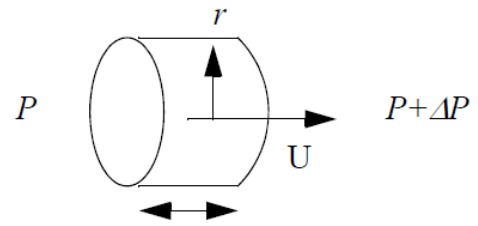


Bildet viser en rørgate til kraftverket Rio Macho i Costa Rica. (Foto: N. Olsen)

Energitap i rør deles i to: singularertap og friksjonstap. Singularertapet har vi sett på tidligere. Friksjonstapet skyldes friksjon mellom vannet og rørveggen. Friksjonen virker som en kraft i motsatt retning av vannhastigheten. Dette er en skjærspenning på innsiden av rørveggen. Vi skal først utlede en formel for denne skjærspenningen. Denne formelen vil igjen bli brukt til å utlede en formel for friksjonstapet.

## Skjærspenning på rørvegg

Vi ser på en del av et rør, med lengde  $\Delta s$ , der  $s$  er koordinataksen langs røret. Dette er vist i figuren til høyre. Radiusen i røret kalles  $r$ . Trykket på venstre side er  $P$ , og på høyre side er  $P + \Delta P$ .



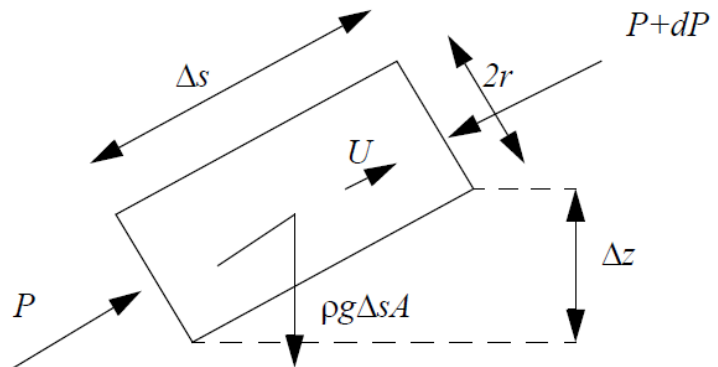
Utleddningen baseres på likevekt av krefter i retningen langs røraksen. Trykkraften er gitt fra trykket ganger arealet. I motsatt retning har vi skjærkraften, som er  $\tau$  ganger arealet på innsiden av røret. Ligningen blir:

$$(P \pi r^2 - (P + \frac{dP}{ds} \Delta s) \pi r^2) - \tau 2 \pi \Delta s = 0$$

som gir:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{dP}{ds}$$

Dette gjelder for horisontale rør. For rør som heller med en vinkel  $\alpha$  i forhold til horisontalplanet, fåes en gravitasjonskomponent i tillegg:



$$(P \pi r^2 - (P + \frac{dP}{ds} \Delta s) \pi r^2) - \tau 2 \pi \Delta s - \rho g V \sin(\alpha) = 0$$

Volumet av rørbiten er:  $V = \pi r^2 \Delta s$

Sinus til helningsvinkelen er:  $\sin(\alpha) = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{dz}{ds}$

Dette gir:

$$(P \pi r^2 - (P + \frac{dP}{ds} \Delta s) \pi r^2) - \tau 2 \pi \Delta s - \rho g \pi r^2 \Delta s \frac{dz}{ds} = 0$$

Som gir

$$\frac{dP}{ds} \pi r^2 + \tau 2\pi r + \rho g \pi r^2 \frac{dz}{ds} = 0$$

Løser mhp skjærspenningen:

$$\tau = -\frac{r}{2} \left[ \frac{dP}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} \right] = -\frac{r}{2} \frac{d}{ds} [P + \rho g z]$$

### Eksempel:

En tømmer vann i et rør som er 400 meter langt og har en diameter på 6 cm. Antar at oppstrøms og nedstrøms ende er i friluft. Høydeforskjellen mellom rørendene er 20 meter. Hva er skjærspenningen på veggen i røret?

Svar: Siden begge ender av røret er i friluft, er  $dP$  lik null. Vi setter inn i ligningen over:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{ds} [P + \rho g z] = -\frac{0.03}{2} \frac{[0 + 1000 \times 9.8 \times 20]}{400} = -7.4 \text{ Pa}$$

## Hastighetsfordeling i rør med laminær strømning

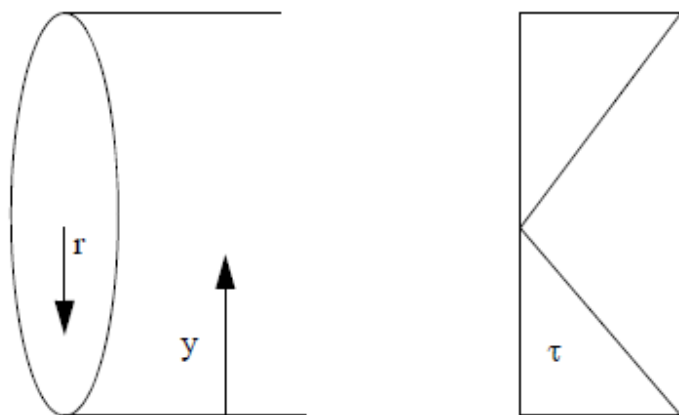
Vi skal så se på hastighetsfordelinger i rør. Dette er nyttig hvis en måler hastigheten på ett sted i røret, og ønsker å finne vannføringen eller hastigheten et annet sted. Samme prinsippet brukes også i frispeilstrømning, i kanaler og elver.

Definisjonen av viskositet ligger i formelen:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

Der  $y$  er regnet som null ved veggen, og økende i fra veggen. I den følgende utledningen brukes et koordinatsystem basert på  $r$ , der  $r$  er avstanden fra sentrum av et sirkulært rør.

Siden  $y$  er regnet som avstand fra rørveggen og  $r$  er regnet fra sentrum av røret, vil de alltid peke i motsatt retning. Vi har derfor at sammenhengen mellom





skjærspenningen og hastighetsgradienten må ganges med -1 når vi skifter variable fra  $y$  til  $r$ . Vi får derfor:

$$\tau = -\mu \frac{dU}{dr}$$

Høyre side av dette uttrykket satt likt høyre side av formelen for skjærspenningen i rør gir:

$$\mu \frac{dU}{dr} = \frac{r}{2} \frac{d}{ds} [P + \rho g z]$$

Eller

$$\frac{dU}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{d}{ds} [P + \rho g z]$$

I ligningen er  $s$  retningen og  $r$  retningen normalt på hverandre. Den deriverte mhp  $s$ -retningen vil derfor ikke variere i  $r$ -retningen. Denne blir dermed en konstant. Viskositeten er også en konstant, slik at  $r$  er den eneste variable i ligningen. Vi integrerer ligningen med hensyn på  $r$ , som gir:

$$U = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{ds} [P + \rho g z] + C$$

Dersom  $r$  regnes fra sentrum av røret, og radiusen av røret er  $r_0$  har vi som grensebetingelse at hastigheten er null på rørveggen, dvs.  $U=0$  for  $r=r_0$ . Dette gir integrasjonskonstanten  $C$  som:

$$C = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{d}{ds} [P + \rho g z]$$

Hastighetsprofilen i røret blir:

$$U(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{4\mu} \left( -\frac{d}{ds} [P + \rho g z] \right)$$

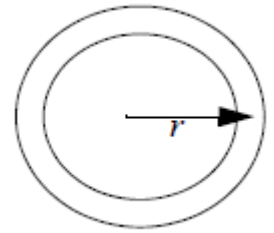
Dette er en parabel.

## Formel for friksjonstap i laminær strømning

Vi ønsker å finne en formel for friksjonstapet i røret. Dette må bli en sammenheng mellom et energitap,  $h_f$  og den gjennomsnittlige vannhastigheten i røret,  $U$ . For å finne et uttrykk for den gjennomsnittlige vannhastigheten, integrerer vi formelen for hastighetsprofilen over tverrsnittet:

$$U = \frac{\int_0^{r_0} U(r) dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} \frac{r_0^2 - r^2}{4\mu} \left( -\frac{d}{ds} [P + \rho g z] \right) 2\pi r dr}{\pi r_0^2}$$

Vi har her brukt at  $dA=2\pi r dr$ , som kan visualiseres som en ring med radius  $r$  og tykkelse  $dr$ .



I integralet over er  $r$  den eneste variable på tvers av strømrørningen. Alle andre parametre er konstante. Vi får derfor:

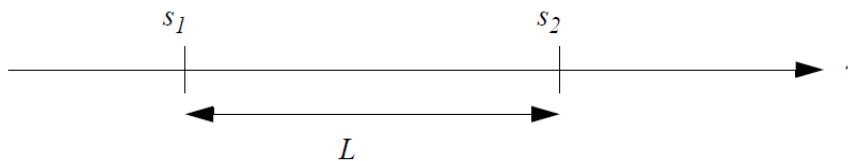
$$U = \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr \frac{2}{4\mu r_0^2} \left(-\frac{d}{ds}[P + \rho g z]\right)$$

$$U = \left(\frac{1}{2}r_0^4 - \frac{1}{4}r_0^4\right) \frac{1}{2\mu r_0^2} \left(-\frac{d}{ds}[P + \rho g z]\right)$$

$$U = \frac{r_0^2}{8\mu} \left(-\frac{d}{ds}[P + \rho g z]\right) = \frac{D^2}{32\mu} \left(-\frac{d}{ds}[P + \rho g z]\right)$$

$$-\frac{d}{ds}[P + \rho g z] = \frac{32\mu U}{D^2}$$

Vi integrerer denne ligningen over en rørlengde  $L$ , som er distansen fra punkt  $s_1$  til punkt  $s_2$ . Husk at  $s$  er avstand langs røret.  $D$  er en konstant.



$$-\int_{\text{punkt-1}}^{\text{punkt-2}} \frac{d}{ds}[P + \rho g z] ds = \int_{\text{punkt-1}}^{\text{punkt-2}} \frac{32\mu U}{D^2} ds = \frac{32\mu U}{D^2} \int_{\text{punkt-1}}^{\text{punkt-2}} ds = \frac{32\mu U}{D^2} L$$

Som gir

$$P_1 + \rho g z_1 - P_2 - \rho g z_2 = \frac{32\mu U L}{D^2} \quad \text{eller delt på } \rho g: \quad \frac{P_1}{\rho g} + z_1 - \frac{P_2}{\rho g} - z_2 = \frac{32\mu U L}{D^2 \rho g}$$

Vi bruker så energiligningen med et energitap  $h_L$  på røret mellom punktene 1 og 2:

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}}{\rho g Q} = \alpha_2 \frac{\overline{U_2^2}}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - \alpha_1 \frac{\overline{U_1^2}}{2g} - z_1 - \frac{p_1}{\rho g} + h_L \quad \text{eller} \quad 0 = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\rho g} - \frac{U_1^2}{2g} - z_1 - \frac{P_1}{\rho g} + h_L$$

Siden diameteren på røret er den samme ved punkt 1 og 2, er også hastighetene de samme. Hastighetsleddene vil da forsvinne. Høyre side av energiligningen sammen med ligningen vi har utledet blir da:

$$h_L = \frac{32\mu UL}{\rho g D^2}$$

Dette er formelen for friksjonstap i rør med laminær strømning.

**Eksempel:** For at et rør skal ha laminær strømning, må Reynolds tallet være under 2000. I eksempelet er derfor Reynolds tallet satt til 1000. Diameteren på røret er 1 cm. Hva er vannhastigheten og falltaptet på en 100 meters strekning? Anta at temperaturen er 20 grader Celsius.

**Svar:** Reynolds tallet gir at vannhastigheten blir:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2000 \quad \text{or} \quad U = 2000 \frac{\nu}{D} = 2000 * 1.0e-6 \frac{m^2/s}{0.01} = 0.2 m/s$$

Friksjonstapet blir:

$$h_L = \frac{32\mu UL}{\rho g D^2} = \frac{32 * 0.001 * 0.2 * 100}{1000 * 9.81 * 0.01^2} = 0.32 \text{ meter}$$

Formlene som er utledet over gjelder for laminær strømning. For turbulent strømning blir situasjonen mer komplisert, og vi klarer ikke å utlede analytisk en formel for hastighetsprofilen. Vi må derfor bruke andre metoder. Som bakgrunn ser vi noe nærmere på fenomenet turbulens.

## Beskrivelse av turbulens

Turbulens er et strømningsfenomen der vannpartiklene beveger seg i ikke-stasjonære hvirvler. Hvirvlene er tredimensjonale, og hastighetsvektorene i hvirvlene følger som oftest ikke strømrretningen. Hvirvlene dannes på grunn av gradienter i hastighetsfeltet. Først dannes det store hvirvler på grunn av hastighetsgradientene til det tidsmidlede hastighetsfeltet. Disse hvirvlene er størst. På grunn av disse hvirvlene vil det danne seg hastighetsgradienter også i de andre retningene. Disse mindre hvirvlene vil igjen føre til mindre hvirvler etc. De minste hvirvlene blir dissipert av viskositeten til vannet. Menden hvirvler og turbulens er derfor avhengig av viskositeten,  $\nu$ . Denne inngår i Reynolds tallet, som brukes til å bestemme om strømmingen er turbulent eller ikke:

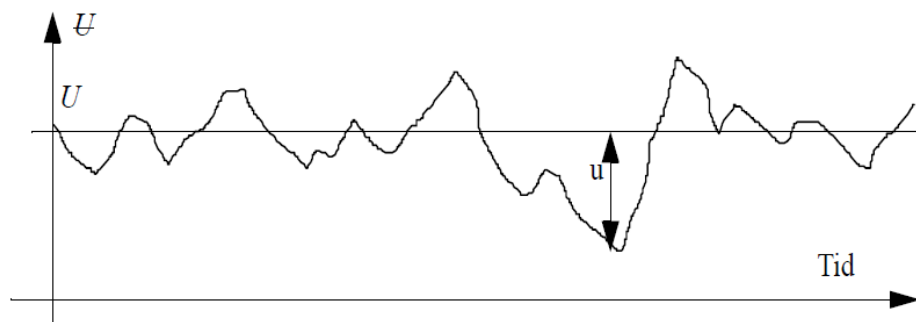
$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

Her er  $U$  en gjennomsnittshastighet og  $D$  en karakteristisk lengde på tvers av strømrretningen. For rør er denne lengden lik rørdiameteren.

For å kunne regne på turbulent strømning, brukes ofte Reynolds' dekomponering. Her deler en hastighetsverdiene i to: En gjennomsnittsverdi over tid,  $U$ , og en fluktuerende komponent,  $u$ :

$$\tilde{U} = U + u$$

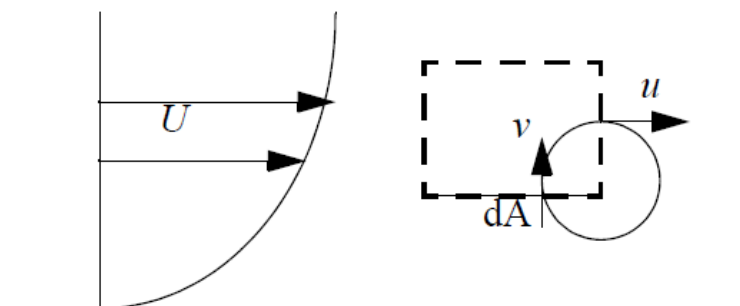
Her kan  $\tilde{U}$  typisk være en målt hastighet i en turbulent strømning. En tidsserie av  $\tilde{U}$  er vist i figuren på neste side, der de to komponentene også er visualisert.



## Turbulent skjærspenning

En kan utlede en formel for en skjærspenning i en strømning på grunn av turbulensen. Dette kalles turbulent skjærspenning, og er et mål på hvor mye turbulens det er i strømningen.

Vi ser på en flate med areal  $dA$  i en uniform strømning, der hastigheten er delt opp i en gjennomsnittshastighet,  $U$ , og en fluktuerende hastighet  $u$ .



Vi ønsker å finne kraften,  $dF$ , på flaten  $dA$  i løpet av tiden  $dt$ . Flaten ligger i en hvirvel, som vist på figuren over. Hvirvelen har komponenter  $u$  og  $v$  i horisontal og vertikal retning. Aksellerasjon av partiklene i positiv vertikal retning, som gir vannhastighetsfluktuasjonen  $v$ , gir en kraft som bremser vannstrømmen over flaten, dvs den er i negativ retning:

$$dF = -ma = -mu/dt$$

Vi regner ut massen som tetthet ganger volum. Volumet av elementet er lik høyden ganger  $dA$ . Høyden er like  $v*dt$ . Dette gir:

$$dF = -mu/dt = -\rho(v dA dt) u/dt = -\rho uv dA$$

En turbulent skjærspenning,  $\tau_T$ , kan uttrykkes som kraft pr. areal:

$$\tau_T = dF/dA = -\rho uv$$

Den effektive skjærspenningen er summen av turbulent og laminær skjærspenning:

$$\tau = \tau_T + \tau_L = -\rho \overline{uv} + \mu \frac{dU}{dy}$$

Med Reynolds dekomponeringen har vi fått en ekstra ukjent i hver retning: den fluktuierende hastigheten  $u$ . For å finne hastighetsfeltet, er det ønskelig å eliminere denne ukjente. Dette kan gjøres ved en turbulensmodell, der en relaterer den fluktuierende hastigheten til gjennomsnittshastigheten. Oftest brukes Boussinesq tilnærmelsen:

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Der  $\nu_T$  er en turbulent viskositet. Skjærspenningen kan da skrives:

$$\tau_T = (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Den effektive viskositeten er en sum av en dynamisk viskositet og turbulent viskositet. I praksis er den turbulente viskositeten ofte flere størrelsesordner enn den dynamiske viskositeten. Merk også at den dynamiske viskositeten er en væskeegenskap, mens den turbulente viskositeten er avhengig av hastighetsfeltet.

## Hastighetsprofiler for turbulent strømning

Nær veggen vil hastighetskomponenten normalt på veggen bli null. Hastighetsvektoren blir parallel med veggen. Antar vi at  $x$ -retningen er parallel med hastighetsvektoren, blir hastighetene i de andre retningene null, og vi har en forenklet situasjon med et hastighetsprofil der hastigheten er null på veggen. Hastighetsprofilen kalles et grensesjikt. Ved hjelp av dimensjonsløse parametre, kan en beskrive hastighetsprofilen.

### Dimensjonsløse størrelser

Dimensjonsløs hastighet:  $U^+ = \frac{U}{U_*}$

Dimensjonsløs avstand:  $y^+ = \frac{y U_*}{\nu}$  eller  $y^+ = \frac{y}{k_s}$

Parametrene er:

- $y$ : avstand fra veggen,
- $\nu$ : kinematisk viskositet
- $k_s$ : ruhet [m]
- $U_*$ : skjærhastighet:
- $\rho$ : vannets tetthet

Skjærspenningen bestemmes fra trykkgradienten i røret og en likevektsbetraktning i rørets lengderetning:

$$\tau = -\frac{r}{2} \left( \frac{dP}{dx} + \rho g \frac{dz}{dx} \right)$$

Eksperimenter viser at hastighetsprofilen i grensesjiktet kan beskrives med følgende formler:

### For glatte rør

For viskøst område ( $y^+ < 10$ ):  $U^+ = y^+$   
og for ikke-viskøst område:

$$U^+ = \frac{U(y)}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{EyU_*}{\nu} \right)$$

Her er  $\kappa$  en konstant med verdi 0.4, og  $E$  er en annen konstant med verdi 9.0. Figuren til høyre viser profilen.



For ru rør blir profilen:

$$\frac{U(y)}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 30 \frac{y}{k_s} \right)$$

Et rør er glatt hvis ruhetselementene er innenfor det viskøse området, dvs.  $\frac{Uk_s}{\nu} < 10$ , eller

$$k_s < 10 \frac{\nu}{U}$$

Et alternativ til de logaritmiske profilene er potenslovprofilen:

$$\frac{U(y)}{U_{max}} = \left( \frac{y}{r} \right)^n$$

Parameteren  $n$  varierer mellom 5 og 10, avhengig av Reynolds tallet i røret og ruheten. Vi skal litt senere i kapitlet regne et eksempel på hvor stort det viskøse grensesjiktet kan være.

**Eksempel:** Vannføringen i en elv:

En elv har steiner med størrelse 0.1 m, og en skjærhastighet på 0.02 m/s. Hva er vannhastigheten 1.3 meter over bunnen?

**Løsning:** Setter inn i formelen for hastighetsprofilen:

$$U(y) = \frac{U_*}{\kappa} \ln\left(30 \frac{y}{k_s}\right) = \frac{0.02}{0.4} \ln\left(\frac{30 * 1.3}{0.1}\right) = \underline{0.3 \text{ m/s}}$$

**Eksempel:** Finn tykkelsen av det viskøse grensesjiktet for strømning i et rør med diameter 10 cm, ruhet 0.046 mm og energigradient 0.026.

**Løsning:** Falltap pr. lengdeenhet er gitt som 0.026. Er lik gradient i  $P + \rho g z$ :

Skjærspenningen på røret er gitt ved formelen som er utledet tidligere:

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{d}{ds} [P + \rho g z] = \frac{r}{2} \rho g \frac{h_f}{L} = \frac{0.05}{2} 1000 * 9.8 * 0.026 = 6.4 \text{ Pa}$$

Friksjonshastigheten er:

$$u_* = \sqrt{\left(\frac{\tau}{\rho}\right)} = \sqrt{\left(\frac{6.4}{1000}\right)} = 0.08 \text{ m/s}$$

Tykkelsen på det viskøse grensesjiktet blir da:

$$\delta = 10 \frac{\nu}{u_*} = \frac{10 * 10^{-6}}{0.08} = \underline{0.12 \text{ mm}}$$

## Friksjonstap for rør med turbulent eller laminær strømning

Vannstrømningen vil medføre en skjærspenning på innsiden av røret. Skjærkraften fører til et friksjonstap. For singulærtap brukes følgende formel:

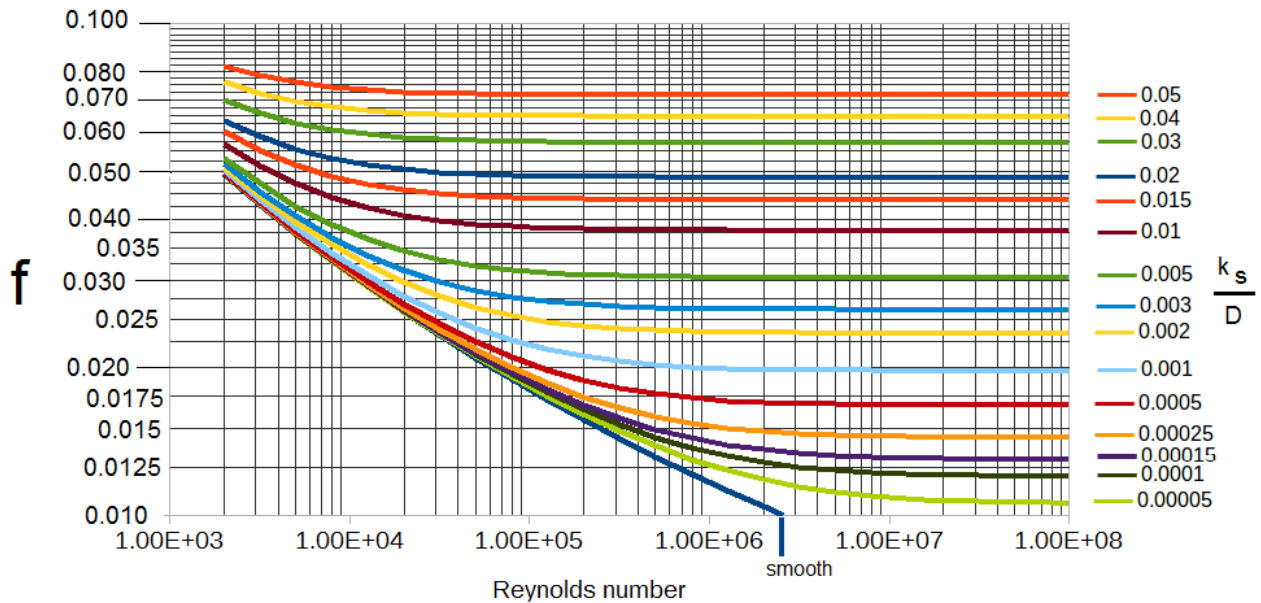
$$h_s = K \frac{U^2}{2g}$$

For et rør vil friksjonstapet komme over lengden av røret, og tapet vil derfor være proporsjonalt med rørlengden,  $L$ . Denne parameteren må derfor være med i formelen. For å lage en dimensjonsløs lengde, dividerer vi på rørdiameteren,  $D$ . Dette gir Darcy-Weissbach's formel for å finne friksjonstapet/falltapet:  $h_f$ .

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

I stedet for en singulærtapskoeffisient,  $K$ , brukes en friksjonsfaktor,  $f$ . Både singulærtapskoeffisienten og friksjonsfaktoren er dimensjonsløse. Friksjonstapsfaktoren finnes fra Moody's diagram, som er vist under.

Moody's diagram



Moody's diagram brukes på følgende måte:

1. Regn ut Reynolds tallet:  $Re = \frac{UD}{\nu}$ . Dette bestemmer posisjonen på horisontal akse
2. Finn absolutt ruhet  $k_s$ .
3. Regn ut relativ ruhet,  $k_s/D$ , og finn riktig posisjon på høyre side av diagrammet.
4. Følg de tykke, fargede, linjene mot venstre, til en kommer til Reynolds tallet som en fant i punkt 1.
5. I kryssningspunktet, følg de horisontale linjene mot venstre. Verdien av  $f$  leses av på venstre akse.

Merk at for høye verdier av Reynolds tallet og ruheten, så vil friksjonskoeffisienten være uavhengig av Reynolds tallet. Også merk at ved glatte rør vil en følge den nederste linjen i diagrammet. Hvis man på forhånd kan anta ett av disse tilfellene vil det være lettere å finne  $f$ .

*Merk: Det finnes to versjoner av Moody-diagrammet: Ett for SI enheter og ett for britiske enheter. Forskjellen mellom de er en faktor 4. Se tilhørende tekst til diagrammene.*



**Eksempel, friksjonstap i rør:**

Hva blir friksjonstapet i et 100 meter langt rør, der vi har en vannføring på 10 l/s og diameteren er 8 cm. Ruheten på røret er 0.1 mm.

**Løsning:** Regner først ut vannhastigheten:

$$U = Q/A = 0.01 / (3.14 * 0.04^2) = 2 \text{ m/s}$$

Reynolds tallet blir:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2 * 0.08 / 1e-6 = 160\ 000$$

Relativ ruhet er

$$0.1 \text{ mm} / 80 \text{ mm} = 0.00125.$$

Moody diagrammet gir at  $f = 0.0225$ .

Friksjonstapet er da:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$h_f = 0.0225 \frac{100 \text{ m}}{0.08 \text{ m}} \frac{(2 \text{ m/s})^2}{2 * 9.8 \text{ m/s}^2}$$

$$\underline{h_f = 5.7 \text{ m}}$$

Dette kan gjøres om til Pascal ved å gange med rho og g:

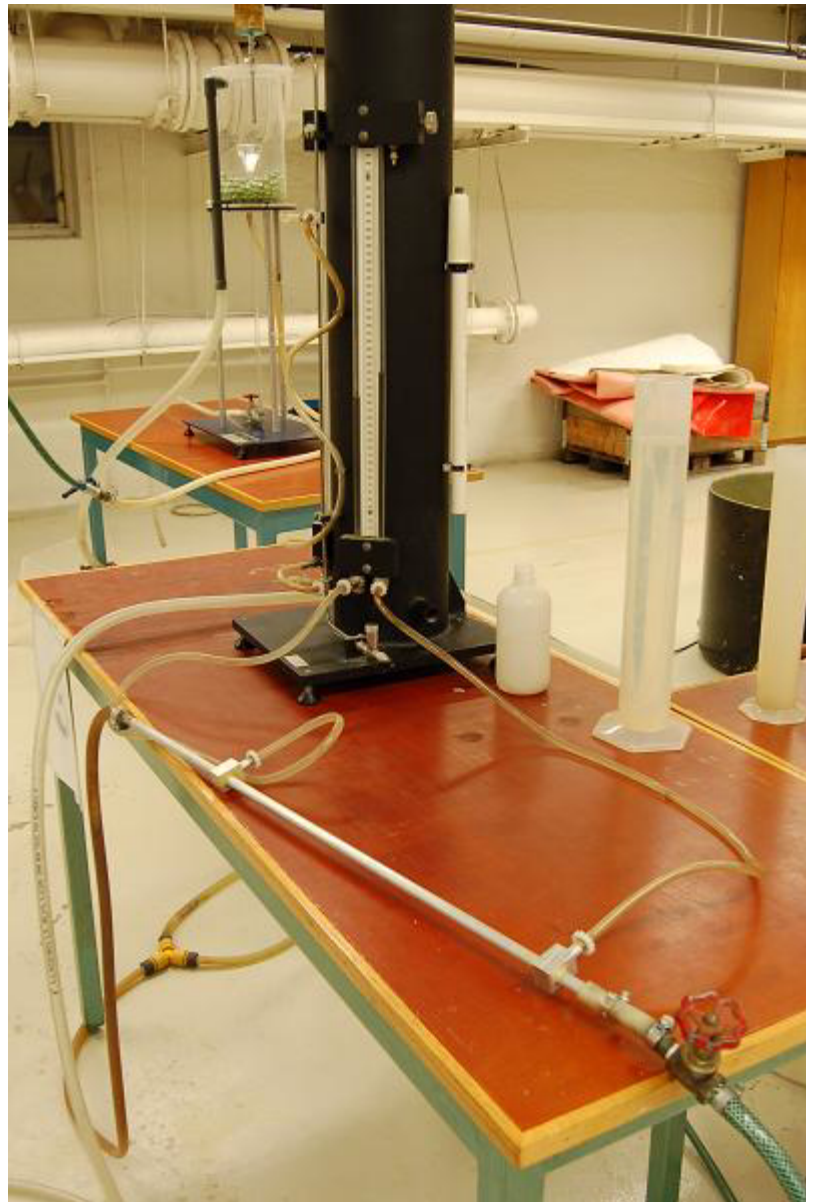
$$\Delta P = \rho g h_f = 1000 * 9.81 * 5.7 = \underline{56 \text{ kPa}}$$

**Eksempel: Finn vannføringen i et rør:**

Beregn vannføringen i et rør der trykktapet er 700 kPa,  $L = 300 \text{ m}$ ,  $D = 10 \text{ cm}$ , ruhet: 0.046mm.

Relativ ruhet:  $k_s/D = 0.046/100 = 0.00046$

Antar fullstendig turbulent strømning. Moody diagrammet gir da:  $f=0.0162$



$$\text{Falltapet blir: } h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{700 \text{ kPa}}{1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 71.3 \text{ m}$$

Darcy-Weissbach's formel der en har løst mhp. hastigheten:

$$U = \sqrt{\left(\frac{2 g h_f D}{f L}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 * 9.81 * 71.3 * 0.1}{0.162 * 300}\right)} = 5.4 \text{ m/s}$$

Sjekker Reynolds tallet:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{5.4 \times 0.1}{10^{-6}} = 5.4 \times 10^5$$

Går inn i Moody diagrammet og leser ut en ny  $f$ : 0.0175

Regner ut ny hastighet: 5.16 m/s

Reynolds tallet blir da  $5.16 \times 10^5$

Som gir  $f=0.0175 \rightarrow$  ok

Vannføringen er da gitt ved kontinuitetsligningen:

$$Q = UA = 5.16 * 3.14 * \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 = 40.5 \text{ l/s}$$

**Eksempel, finn diameteren på et rør:**

Vann med temperatur 20 grader C skal transporteres mellom to tanker, der høydeforskjellen er 30 meter. Vannmengden som skal transporteres er 2 liter/sekund, og avstanden mellom tankene er 300 meter. Finn diameteren på røret. Røret har en ruhet på 0.0015 mm.

**Løsning:** De ligningene som brukes er:

$$\text{Kontinuitetsligningen: } U = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{3.14 \frac{D^2}{4}} = \frac{0.00255}{D^2}$$

Setter inn dette uttrykket for hastigheten inn i Darcy-Weissbach's ligning:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 30 \text{ m} = f \frac{400}{D} \frac{\left(\frac{0.00255}{D^2}\right)^2}{2 * 9.81}$$

eller:

$$D = (4.4 * 10^{-6} f)^{\frac{1}{5}}$$

Reynolds tallet blir:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{0.00255 D^2}{10^{-6}} = \frac{2550}{D}$$

Prøve og feile metode: Antar  $f$ , regner ut  $D$ ,  $Re$ ,  $e/D$  og får en ny  $f$ .

$f$ (antatt)	$D$ (m)	Reynolds tall	$k_s/D$	$f$ (Moody)
0.03	0.042	60 000	0.000036	0.02
0.02	0.039	65 700	0.000029	0.02

Diameteren blir 3.9 cm.

## Ikke-runde rør

For rør som ikke er runde, kan en også bruke Darcy-Weissbach's formel. Problemet er da hva en skal bruke i stedet for diameteren. En kan definere en hydraulisk radius,  $r_h$ , fra følgende formel:

$$r_h = A/P$$

$A$  er vanddekt areal i et tverrsnitt, og  $P$  er våt omkrets. Sammenhengen mellom diameteren,  $D$ , og hydraulisk radius for et rundt rør blir  $D=4r_h$ . I Darcy-Weissbach's formel bruker en derfor  $4r_h$  i stedet for  $D$ .

En kan også bruke formelen på delvis fylte rør. Den våte omkretsen blir da regnet kun på den delen der vannet berører vegg. Den frie vannoverflaten taes ikke med i den våte omkretsen.

I stedet for å bruke Moody's diagram, kan en også bruke formel 10.26 på side 419 for å finne  $f$ , eller formlene 10.27 og 10.28 på side 424 for å finne vannføring/rørdiameter.

## Mer om singulærtap

Singulærtap skyldes kontraksjoner/ekspansjoner, der ekstra turbulens blir generert. Den turbulente energien som blir produsert taes fra energien til vannstrømmen.

Singulærtap,  $h_s$ , regnes ofte på formen:

$$h_s = K \frac{U^2}{2g}$$

$K$  er en empirisk koeffisient, avhengig av den aktuelle geometri.  $K$  varierer innenfor området 0-1. Ved  $K=1$  vil hele hastighetsenergien tapes.

Eksempler på  $K$  verdier er gitt i boka, side 390-8, 337-9, 381-10 (Crowe/Elger). Slike tabeller brukes ofte i sammenheng med konsulentoppdrag. Koeffisientene er ikke så veldig nøyaktige. Hvis en har en geometri som ikke er gitt i tabellene, eller en ønsker mer nøyaktige svar, må en bruke en fysisk modell eller CFD. Det er tidligere vist et bilde fra laboratorieøvingen, der studentene finne  $K$  verdiene for rørbend med forskjellig radius. Også vist tidligere er lukeproppen, der en ser trykktapet over proppen fra fargene.

Strømningen i en innsnevring tilsvarende ofte en slags vene contracta, der falltapet er avhengig av arealforholdet mellom opprinnelig areal og arealet i kontraksjonen. (tegning, forskjellige strømnings situasjoner, inkludert bend - Figur side 389-8, 337-9).

## Kontraksjonskoeffisienter

Hvis en har en innsnevring av et rør, for eksempel ved en måleblende, kan en uttrykke falltapet ved følgende formel:

$$h_s = \frac{(U_i - U_0)^2}{2g}$$

En måleblende er en flat plate med et hull i, som monteres vinkelrett på strømmen i røret.

I formelen over er  $U_0$  gjennomsnittshastigheten i røret, og  $U_i$  er den største hastigheten gjennom kontraksjonen. Problemet er å finne  $U_i$ . Hvis en antar at  $U_i$  er jevnt fordelt over et tverrsnitt  $A_i$ , gir kontinuitetsligningen:

$$A_0 U_0 = A_i U_i$$

Merk at  $A_i$  ofte er mindre enn det fysiske hullet i kontraksjonen. En må da finne  $A_i$  fra fysiske modellforsøk. Ofte definerer en en kontraksjonskoeffisient,  $C_c$ , fra følgende uttrykk:

$$C_c = \frac{A_i}{A_0}$$

Denne kan da beregnes fra resultatene av de fysiske modellforsøkene. Hvis vi setter dette uttrykket, samt kontinuitetsligningen over inn i formelen for falltapet, får vi:

$$h_s = \frac{(U_i - U_0)^2}{2g} = \frac{(U_0 \frac{A_0}{A_i} - U_0)^2}{2g} = \frac{(\frac{U_0}{C_c} - U_0)^2}{2g} = (\frac{1}{C_c} - 1)^2 \frac{U_0^2}{2g}$$

Vi sammenligner denne formelen med den vanlige formelen for singulærtap:

$$h_s = K \frac{U^2}{2g}$$

Dette gir følgende sammenheng mellom  $C_c$  og  $K$ :

$$K = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

**Eksempel:** Vi måler  $C_c$  til å bli 0.33. Hva er tilsvarende  $K$  faktor?

**Løsning:** Vi setter inn i formelen:

$$K = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{0.33} - 1\right)^2 = \underline{4}$$

Her ser vi at  $K$  faktoren er større enn 1. Dette er fordi at hastighetshøyden i kontraksjonen er mye større enn før/etter kontraksjonen. Siden hastighetshøyden er proporsjonal med hastigheten i andre potens, er hastighetshøyden i kontraksjonen ni ganger større enn i røret før/etter kontraksjonen. Dette pga at tverrsnittsarealet har minsket med en faktor  $1/3$ , noe som gjør at hastigheten blir 3 ganger større.

**Eksempel, pumpe.**

En skal pumpe vann fra et lavtliggende kar til et høyereliggende kar. Høydeforskjellen er 35 meter. Lengden av stålrøret er 140 meter. Rørets diameter er 200 mm. Det er et bend med radius 200 mm. Vannføringen er  $0.314 \text{ m}^3/\text{s}$ . Rørets ruhet er  $0.046 \text{ mm}$ . Finn effekten av en pumpe som har virkningsgrad 0.9.

**Løsning:**

Finner først energitapene. En har et falltap i bendet, og friksjonstap i røret. Samt et utløpstap i det øvre bassenget. Singulærtapet i bendet har en koeffisient fra tabell s. 429 på 0.35. Finner først vannhastigheten i røret fra kontinuitetsligningen:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{0.314}{3.14 \left(\frac{0.2}{2}\right)^2} = 10 \text{ m/s}$$

Tap i bend og utløp blir:

$$h_s = (K_{\text{bend}} + K_{\text{utløp}}) \frac{U^2}{2g} = (0.35 + 1.0) \frac{10^2}{2 * 9.8} = 6.9 \text{ m}$$

For å beregne friksjonstapet, må vi bruke Darcy-Weissbach's formel. Da må vi først finne Reynolds-tallet:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{10 * 0.2}{10^{-6}} = 2 \times 10^6$$

Stålrøret har en ruhet på  $0.046 \text{ mm}$ . Relativ ruhet er da:

$$0.046/200 = 0.00023$$

Moody's diagram gir at friksjonsfaktoren i røret er 0.015. Dette setter vi inn i Darcy-Weissbach's formel:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.015 \frac{140}{0.2} \frac{10^2}{2 \cdot 9.8} = 53.5 \text{ m}$$

Den totale energihøyden blir da:  $35 + 6.9 + 53.5 = 95.4 \text{ m}$

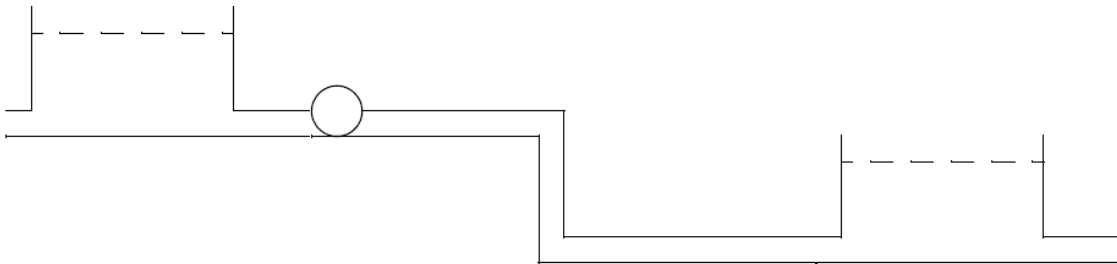
Nødvendig effekt av pumpen er:

$$\dot{Q}_0 = \rho g H Q = 1000 \cdot 9.8 \cdot 95.4 \cdot 0.314 = 295 \text{ kW}$$

Hvis det var gitt at pumpen hadde en virkningsgrad på 0.9, så blir energiforbruket:

$$\dot{Q} = \frac{\dot{Q}_0}{\eta} = \frac{295}{0.9} = \underline{\underline{330 \text{ kW}}}$$

### Eksempel, to tanker



Finn høyden mellom vannoverflaten i to tanker, gitt vannføring:  $Q = 40 \text{ l/s}$  og rørdiameter  $10 \text{ cm}$ , rørlengde  $50 \text{ meter}$ , 2 albue-bend og en åpen kuleventil. Antar stasjonær tilstand, dvs. at vannhastigheten i rørene er konstant, og at vannspeilene i tankene er i ro. Anta en ruhet på  $0.046 \text{ mm}$ , og en tapskoeffisient på kuleventilen på  $5.7$ . Anta skarpkantet innløp til røret og at radiusen på rørbendet er lik diameteren på røret.

Finner først hastigheten:  $U = Q/A = 0.04 / (3.14 \cdot 0.05 \cdot 0.05) = 5.09 \text{ m/s}$

Vannstandsforskjellen er lik falltapet mellom tankene. Finner hvert falltap for seg, og summerer etterpå:

1. Friksjonstap:

Regner ut  $Re$ :

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{5.09 \cdot 0.1}{10^{-6}} = 5.09 \times 10^5$$

Ruheten er  $k_s = 0.046 \text{ mm}$

$$\frac{k_s}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

Moody diagrammet gir  $f=0.017$

Friksjonstapet er gitt fra Darcy-Weissbach's formel:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.017 \frac{50}{0.1} \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 11.22 \text{ m}$$

Singulærtapskoeffisientene taes fra tabell 10.3, side 390:

Innløpstap:

$$h_i = K \frac{U^2}{2g} = 0.5 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 0.66 \text{ m}$$

Tap i kuleventil:

$$h_i = K \frac{U^2}{2g} = 5.7 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 7.50 \text{ m}$$

Tap i bend:

$$h_i = 2 K \frac{U^2}{2g} = 2 * 0.35 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 0.92 \text{ m}$$

Tap i utløp

$$h_i = K \frac{U^2}{2g} = 1.0 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 1.32 \text{ m}$$

Tilsammen blir dette:

$$11.22 + 0.66 + 7.5 + 0.92 + 1.32 = \underline{\underline{21.7m}}$$

## 7.8 Energilinjer og trykklinjer

En energilinje sier hvor mye energi det er i vannet i et rør, der energien er konvertert til en energihøyde. Energihøyden i et rør/kanal/basseng er definert fra Bernoullis ligning:

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$$

Her er  $z$  avstanden fra et nullpunkt til bunnen av kanalen/bassenget,  $U$  er hastigheten og  $p$  er trykket ved bunnen.

Når vi tegner linja, tar vi også med energitap og energi tilført systemet. Med  $x$  som horisontal akse blir ligningen for linja:

$$E(x) = z(x) + p \frac{(x)}{\rho g} + U \frac{(x)^2}{2g} - h_l(x) - \left( \frac{\dot{Q}(x) - \dot{W}(x)}{Q \rho g} \right)$$

En trykklinje er en linje i høyde der vannet ville stått, dersom en hadde en rekke trykkrør i hovedrøret. En kan regne ut avstanden mellom trykklinjen og røret ved å konvertere trykket til en trykkehøyde. En bruker da formelen:

$$h = \frac{P}{\rho g}$$

Energilinjen ligger en hastighetshøyde over trykklinjen. Eksempler er gitt på Fig. 7.12 til 7.16 i læreboka (Elger, 10. utgave). Det er ofte greit å regne ut energilinjen først, og så trekke fra hastighetshøyden for å få trykklinjen. En bruker energiligningen til å regne ut energilinjen. En starter på et punkt der en har en kjent energi, for eksempel i et vannreservoir med frispeil. Der er  $p$  og  $U$  null. Så regner en seg videre i systemet ved å regne ut og ta med energitap.

Beregninger av trykklinjer skjer ofte når en skal finne ut om det er fare for kavitasjon i et system. Det brukes også til å finne ut om det blir undertrykk i et vannforsyningssystem for drikkevann. Dette er uønsket da forurensent vann kan sige inn i drikkevannet. Trykklinjer brukes også til å finne ut om det er for høyt trykk i deler av et vannforsyningssystem. Rør kan ha et maksimalt trykk som de tåler. I forbindelse med dimensjonering av avløpssystem brukes trykklinjer til å finne ut om vannspeilet kan komme "opp i dagen", noe som fører til oversvømmelser.

### **Eksempel Eksamen 2008, Oppgave 1:**

Vann strømmer fra et kar A til et annet kar B igjennom to rør med forskjellige diametre. Dette er vist i figuren under. Lengden av Rør 1 er 50 meter, og diameteren er 0.1 meter. Lengden av Rør 2 er også 50 meter, men diameteren er 0.2 meter. Vannføringen i rørene er 0.04 m<sup>3</sup>/s. Rørene er hydraulisk glatte.

a) Hvilke energitap har vi i systemet?

1. Innløpstap basseng A -> rør 1
2. Ekspansjonstap mellom rør 1 og 2
3. Utløpstap rør 2 -> basseng B
4. Friksjonstap rør 1
5. Friksjonstap rør 2

b+c) Tegn trykk og energilinjer for systemet, og før på karakteristiske verdier.



Regner først ut hastighetene i de to rørene. Denne fåes ved å ta vannføringen og dele på tverrsnittsarealet. Dette gir:

$$U_1 = Q/A_1 = 0.04 / (3.14 * (0.05 \text{ m})^2) = 5.09 \text{ m/s}$$

$$U_2 = Q/A_2 = 1.27 \text{ m/s}$$

Vi regner så ut Reynolds tallene for de to rørene:

$$Re_1 = UD/\nu = 5.09 * 0.1 / 10e-6 = 509\ 000$$

$$Re_2 = UD/\nu = 1.27 * 0.2 / 10e-6 = 254\ 000$$

Moody's diagram gir følgende friksjonsfaktorer for de to rørene:

$$f_1 = 0.013$$

$$f_2 = 0.015$$

Friksjonstapene finnes fra Darcy-Weissbachs ligning:

$$\text{Rør 1: } h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.013 \frac{50}{0.1} \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 8.58 \text{ m}$$

$$\text{Rør 2: } h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0.015 \frac{50}{0.2} \frac{1.27^2}{2 * 9.8} = 0.31 \text{ m}$$

Singulærtapene blir:

$$\text{Innløpstap: } h_i = K \frac{U^2}{2g} = 0.5 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 0.66 \text{ m}$$

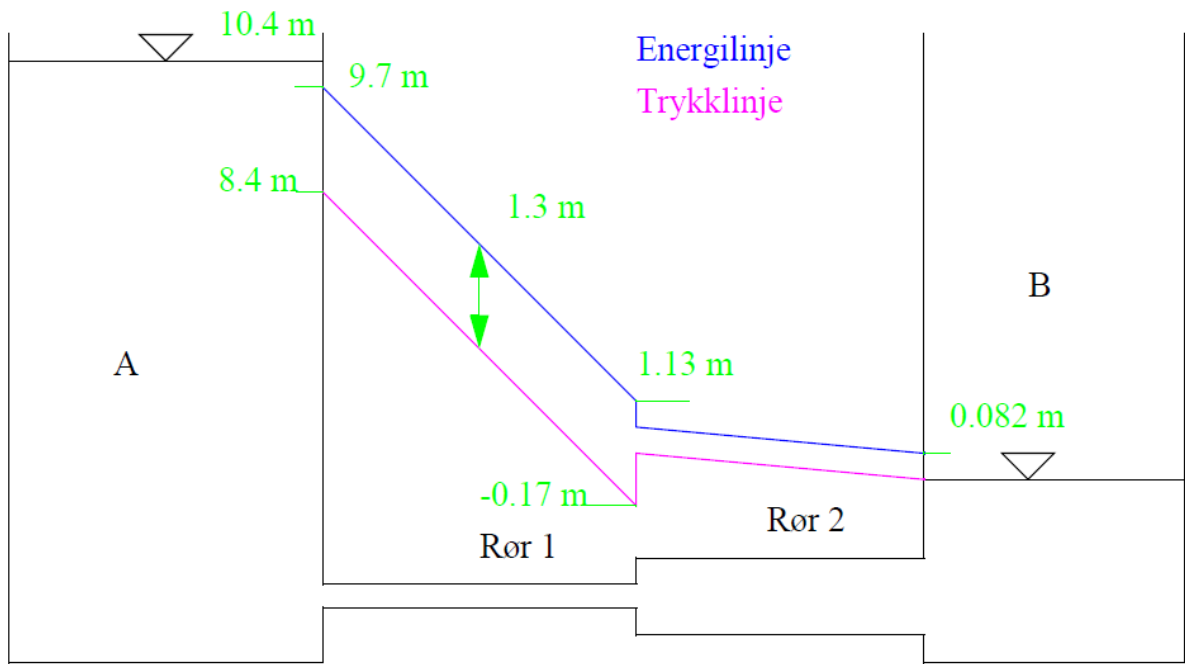
$$\text{Utløpstap: } h_i = K \frac{U^2}{2g} = 1.0 \frac{1.27^2}{2 * 9.8} = 0.08 \text{ m}$$

Tap i ekspansjonen mellom rør 1 og 2. Bruker tabell side 391-8/337-9. Diameterforholdet er:  $D_2/D_1 = 10/20 = 0.5$ . Med ekspansjonsvinkel på 180 grader, interpolerer vi fra tabellen mellom diameterforholdene 0.4 og 0.6. Dette gir en K verdi på 0.56.

$$h_s = K \frac{U^2}{2g} = 0.56 \frac{5.09^2}{2 * 9.8} = 0.74 \text{ m}$$

Totalt:  $8.58 + 0.31 + 0.66 + 0.082 + 0.74 = \underline{10.4 \text{ meter}}$ .

Energilinjen og trykklinjen vises på figuren under:



## Kapittel 15 Frispeilstrømning

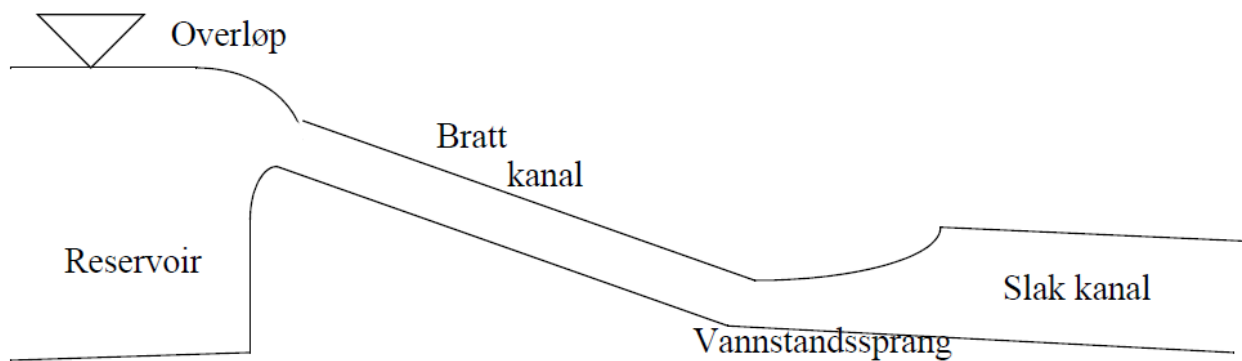
Frispeilstrømning er beskrevet i kapittel 15 i læreboka (9. og 10 utg). Pensum er normalt fra kap. 15.1 til og med kap. 15.6. Dette inkluderer formler for vannhastigheten i kanaler med normalstrømning, tilsvarende Darcy-Weissbach's formel. Kapitlet inneholder også teori for overløp og vannstandssprang, som er to viktige fenomener innen frispeilhydraulikken.



### Introduksjon

Ved frispeilstrømning faller trykklinja sammen med vannspeilet. I motsetning til rørstrømning vil vanddybden forandres i strømetningen, noe som betyr at vannhastigheten også forandres. Ved kompliserte geometrier, slik som på bildet over, vil hastighetsfeltet være tredimensjonalt med komponenter i alle retninger. Bak stener vil en få hvirvler med hastighetskomponenter i motsatt retning av hovedstrømmen. Hvirvler kan også dannes normalt på hovedstrømetningen. Dette kalles sekundærstrømninger.

De to fenomenene overløp og vannstandssprang er viktige i dette kapitlet. Vi vil utlede formler for å bestemme vanddybden for disse situasjonene. Begge fenomenene vises på figuren under. Vann renner her fra et reservoir over en dam som har en bratt helning nedover. Nedenfor dammen er det en kanal med relativt slak helning. Et sted i den slake kanalen vil det dannes en bølge. Denne bølgen vil kunne stå stille på et sted. Bølgen kalles et vannstandssprang, siden vanddybden øker relativt brått. Overløpet er området på toppen av demningen, der vannet får en sterk aksellerasjon.



*Strømningssituasjon med både overløp og vannstandssprang*

## Klassifikasjon av fristpeilstrømning:

Strømning i en generell geometri i en elv kan være meget komplisert. For å kunne bruke enkle formler som kan løses med håndregning må vi gjøre endel forenklinger og antagelser. En av antagelsene er at strømmingen er endimensjonal. Dette betyr at vi har en hovedstrømningsretning, og at hastighetene normalt på denne er tilnærmet lik null. En endimensjonal strømning kan videre deles i tre typer:

- 1. Uniform strømning:** Her har vi konstant dybde og hastighet i strømmingen, både over tid og sted langs strømrretningen. Alle strømlinjene er rette og parallelle.
- 2. Stasjonær strømning:** I denne strømmingen er dybden og hastigheten konstant over tid, men ikke i strømrretningen. Både dybde og hastighet kan variere langs strømrretningen.
- 3. Ikke-stasjonær strømning.** Her kan vi ha variasjon av hastighet og dybde både over tid og langs strømrretningen.

I dette faget regner vi kun på uniform, stasjonær strømning. (utenom vannstandssprang og overløp). Ikke-uniform og ikke-stasjonær strømning blir undervist i faget TVM 4155 Numerisk modellering og hydraulikk.

Uniform stasjonær strømning kalles også for normalstrømning. I og med at vanddybde ikke forandrer seg i en slik situasjon, vil vi ha en bestemt karakteristisk vanddybde. Dette kalles normaldybden.

For uniform strømning har vi to friksjonsformler som brukes: Manning's formel og Chezy's formel. Begge formlene bruker konseptet hydraulisk radius. For rørstrømning har vi tidligere brukt Darcy-Weissbachs formel. I denne formelen er tverrsnittsgeometrien gitt ved en diameter på et rør. For fristpeilstrømning vil en ha et mer komplisert tverrsnitt. En må derfor definere en annen parameter enn diameteren. Parameteren som brukes heter hydraulisk radius.

## Hydraulisk radius for en kanal

$$r_h = A/P$$

der  $A$  er tverrsnittsarealet, og  $P$  er våt omkrets - der vannet er i kontakt med bunnen eller sidene. For eksempel, en kanal med rektanulært tverrsnitt med bredde  $b$  og dybde  $y$  vil gi:

$$A=yb, P=2y+b$$

som gir

$$r_h = \frac{yb}{2y+b}$$

For bred kanal, der dybden er mye mindre enn bredden får vi at  $r_h=y$ . Ofte brukes  $b/y=10-20$  som grenseverdi. Dvs, hvis verdien er under 10 har vi ikke-bred kanal, og hvis den er over 20 har vi bred kanal. Når hydraulisk radius er lik dybden, blir det mye lettere å bruke formlene.

## Chezy's formel

For bestemmelse av friksjonstapet i elver (og rør), kan Chezy's formel brukes:

$$U = C \sqrt{r_h I}$$

Der  $I$  er helningen på energilinja og  $C$  er Chezy's friksjonsformel. Formelen gjelder for normalstrømning.

## Manning's formel

$$U = M r_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}}$$

Der  $M$  kalles Manning's friksjonskoeffisient i Norge. Denne formelen brukes mye i praksis.  $M$  har en verdi mellom 15 for elver med stor stein, til 120 for glasskanaler i laboratoriet. I utlandet brukes det inverse tallet:  $n=1/M$ . Formelen blir da:

$$U = \frac{1}{n} r_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}}$$

I utlandet blir  $n$  kalt Mannings friksjonsfaktor, mens  $M$  blir kalt Strickler's friksjonsfaktor.

Tabell 15.1. s. 561 (Crowe et al, 10. utg.) gir Mannings  $n$  for forskjellige overflater.

**Eksempel:** Bruk av Manning's formel.

En elv har uniform strømning med dybde 2 meter. Bredden er 30 meter, og vannspeilets helning er på 1:300. Manningstallet blir anslått til  $M=50$ . Hva er vannføringen?

**Løsning:** Antar bred elv, dvs:  $r=h$ . Setter inn i formelen for å finne hastigheten:

$$U = M h^{2/3} I^{1/2} = 50 \cdot 2^{2/3} (1/300)^{1/2} = 4.6 \text{ m/s}$$

Vannføringen finnes ved kontinuitetsligningen:

$$Q = UA = 4.6 \cdot 2 \cdot 30 = \underline{275 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

Hvis bredden er 10 meter må vi regne ut hydraulisk radius:

$$r_h = \frac{A}{P} = \frac{10 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 10} = 1.43 \text{ m}$$

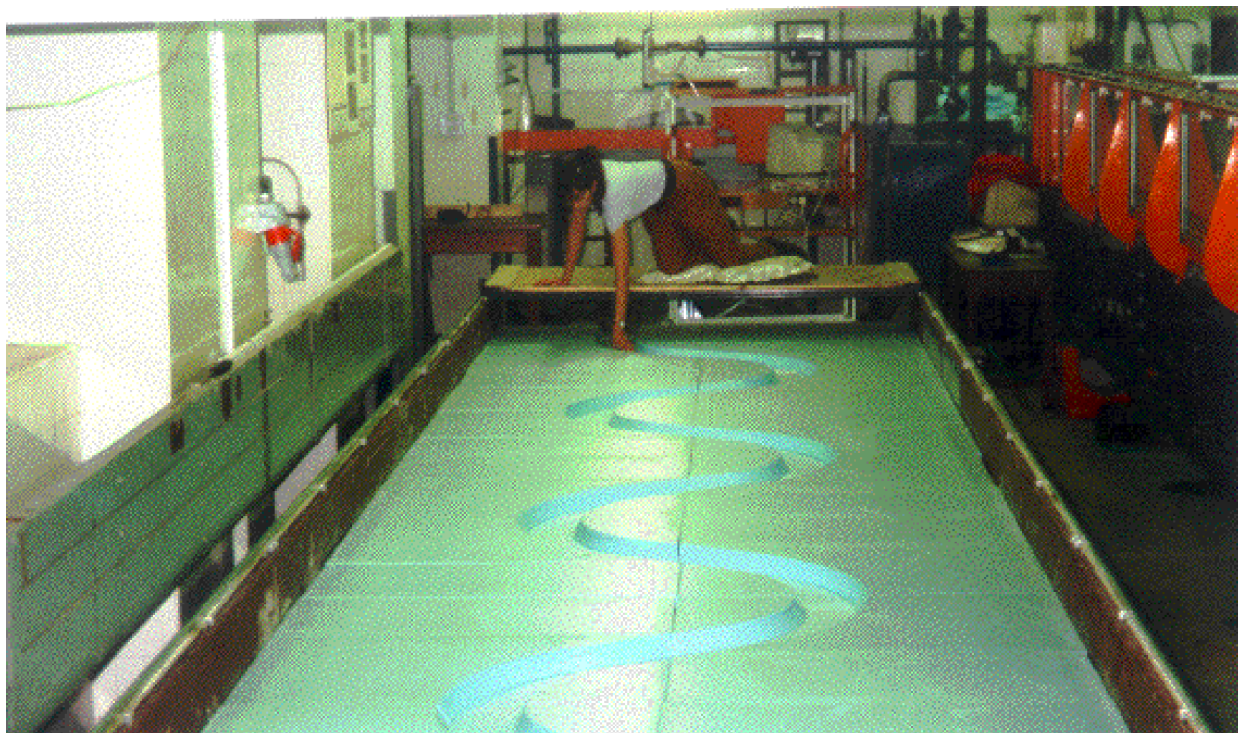
$$U = M r_h^{2/3} I^{1/2} = 50 \cdot 1.43^{2/3} (1/300)^{1/2} = 3.7 \text{ m/s}$$

Vannføringen finnes ved kontinuitetsligningen:

$$Q = UA = 3.7 \cdot 2 \cdot 10 = \underline{73 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

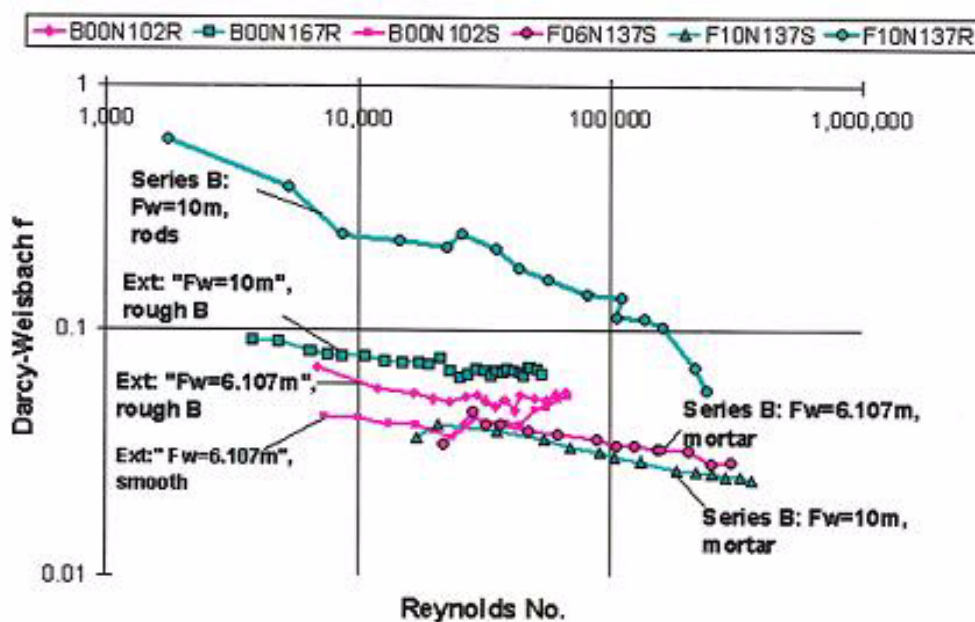
Kommentar i forhold til Darcy-Weissbach: Ruhet og singulærtap.

I teorien burde det gått an å bruke Darcy-Weissbach's formel i steden for Manning/Chezy for å finne friksjonstapet i en elv/kanal. Dette forutsetter imidlertid at energitapet skyldes kun friksjon mot bunnen, og at ruheten kan bestemmes entydig. I en naturlig elv vil en ta med singulærtap i Manning's formel, slik at Mannings friksjonsfaktor omfatter både skjærspenning mot bunnen og singulærtap. Grunnen til at Mannings formel benyttes i stedet for Darcy-Weissbachs formel i elver er også for en stor del begrunnet i tradisjon.



Bildet over er fra det hydrauliske laboratoriet ved Universitetet i Bristol, England. En har her gjort eksperimenter med vannføringer i meanderende kanaler. Kanalen er skjært ut i isopor. En har også brukt knappenåler til å lage ruhet på bunnen. Ved å kjøre forskjellige vannføringer har en sett hva vann dybden blir kan en beregne en friksjonsfaktor fra Darcy-Weissbach's formel. Resultatene satt inn i en figur med tilsvarende akser som Moody diagrammet er gitt under. Merk at det ikke er klare linjer slik som i Moody diagrammet. Dette er fordi strømmingen er mer komplisert, og en får en rekke singulærtap på forskjellige steder i kanalsvingene.

(Foto og figur: Catherine Wilson, University of Cardiff, UK)



## Vannstandssprang og overløp, Froude tallet

Teorien bak formlene for overløp og vannstandssprang inneholder konseptet kritisk strømning. Dette er meget viktig for all friskeilstrømning. Utledningen starter med å se på energien til vannet i en kanal. Den totale energien for en vannpartikkel blir lik summen av hastighetsenergi, trykkenergi og stedsenergi (vertikalt nivå),  $z$ :

$$H = z + y + \frac{U^2}{2g}$$

Den totale energien vil forandre seg ettersom vannet renner nedover elva. Noe energi blir tapt på grunn av friksjonen. En vannpartikkel vil få tilført energihøyden  $z$ , når den renner nedover elva. For en normalstrømning, så vil denne tilførte energien være lik friksjonstapet.

Vannstandssprang og overløp skjer over korte strekninger, og da er friksjonstapet ofte lite. I teorien som følger bruker vi den spesifikke energien,  $E$ , som er definert som hastighetsenergi + trykkenergi i et gitt tverrprofil av en elv/kanal:

$$E = y + \frac{U^2}{2g}$$

En antar også i det videre at en har stasjonær strømning, som betyr at vannføringen er konstant. Dybden og hastigheten vil imidlertid kunne variere.

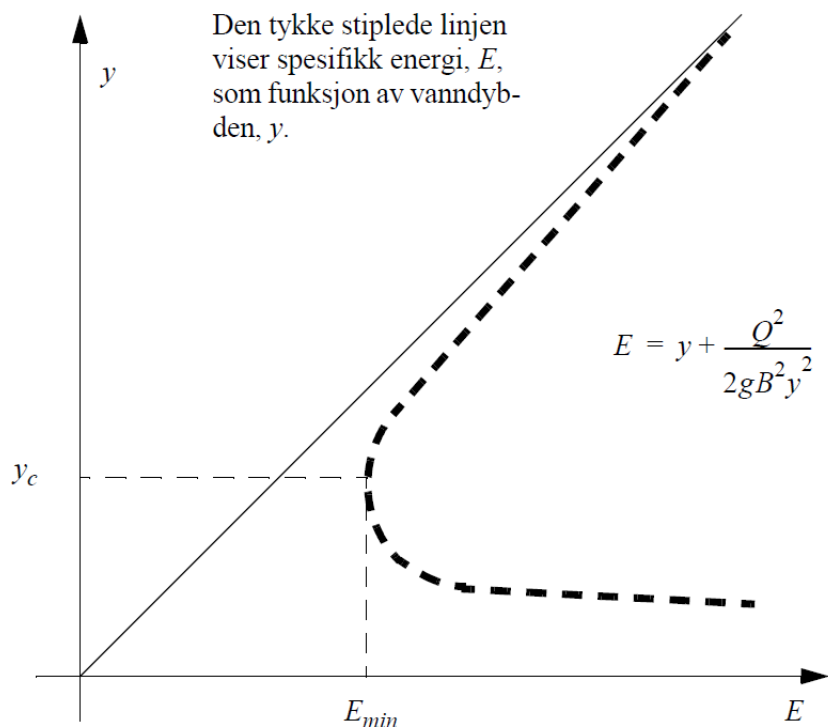
Ved kanaler med en generell tverrsnittsform får vi følgende formel for den spesifikke energien, der hastigheten er erstattet med  $Q/A$ :

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Merk at vi antar at hastigheten er uniformt fordelt over tverrsnittet. Dette er en tilnærming, som fører med seg en viss unøyaktighet. Tverrsnittsarealet vil være en funksjon av vandybden,  $y$ . For et rektangulært tverrsnitt med bredde  $B$  vil vi få:

$$E = y + \frac{Q^2}{2gB^2 y^2}$$

Denne funksjonen vises i figuren til høyre.





Minimum spesifikk energi fås ved å derivere formelen for et generelt tverrsnitt mhp.  $y$  og sette dette lik null. Siden  $A$  er en funksjon av  $y$ , bruker vi kjerneregelen og deriverer først mhp  $A$ , og så ganger med  $dA / dy$ :

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 0$$

For små forandringer i vannstanden har vi at  $dA = Bdy$ . Setter vi dette inn i formelen over får vi følgende ligning:

$$\frac{Q^2 B}{gA^3} = 1$$

Tar vi roten av hver side av likhetstegnet, vil venstre side av ligningen være det dimensjonsløse Froude tallet for en generell geometri:

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{U}{\sqrt{g \frac{A}{B}}}$$

For en kanal med rektangulært tverrsnitt får vi at  $y = A / B$ . Når vi setter dette inn i formelen for Froude tallet, får vi

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gy}}$$

For minimum spesifikk energi blir altså Froude tallet lik 1. Vi kaller dette for en kritisk strømning, og bruker indeksen  $c$  (engelsk: critical):

$$\frac{U_c}{\sqrt{gy_c}} = 1$$

Dette kan løses med hensyn på  $y_c$ , og gir følgende formel for kritisk dybde i en kanal:

$$y_c = \frac{U^2}{g}$$

Vi kan også løse mhp. hastigheten for å finne kritisk hastighet,  $U_c$ :

$$U_c = \sqrt{gy}$$

Ved hastigheter over kritisk, kalles strømmingen for overkritisk. Ved hastigheter under kritisk, kalles strømmingen for underkritisk. Siden Froudetallet er 1 ved kritisk strømming har vi:

**Fr = 1 betyr at strømmingen er kritisk**

**Fr > 1 betyr at strømmingen er overkritisk**

**Fr < 1 betyr at strømmingen er underkritisk**

**Eksempel:** Vi har en bred kanal med rektangulært tverrsnitt, vanndybde 5 meter og vannhastighet 2 m/s. Er strømmingen overkritisk eller underkritisk?

**Løsning:** Vi regner ut Froude-tallet:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gy}} = \frac{2}{\sqrt{9.8 * 5}} = 0.29$$

Siden Froude tallet er under 1.0 er strømmingen underkritisk.

**Eksempel:** En kanal har trekantformet tverrsnitt, med spissen ned. Sidehelningene er på 45 grader. Vannføringen er 3 m<sup>3</sup>/s, og vanndybden er 2.5 meter. Er strømmen over eller underkritisk? Hva blir dybden med motsatt under/overkritisk strømming av det vi har, når den spesifikke energien er den samme?

**Løsning:** Finner først arealet, A som funksjon av dybden y:

$$A = 2y * y * 1/2 = y^2 = 2.252 = 6.25 \text{ m}^2$$

Bredden av kanalen er:  $2y = 2 * 2.5 \text{ m} = 5 \text{ m}$ .

Froude tallet for en generell geometri er:

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2 B}{g A^3}} = \sqrt{\frac{3^2 * 5}{9.8 * 6.25^3}} = 0.137$$

Siden Froude tallet er mindre enn 1, er strømmingen underkritisk. Den spesifikke energien, E, blir:

$$E = y + U^2/2g = 2.5 \text{ m} + (3/6.25)^2/2 * 9.81 = 2.51 \text{ m}$$

Når vi setter denne lik den spesifikke energien ved overkritisk strømming, får vi:

$$E = y + (Q/A)^2/2g = 2.51 \text{ m} = y + (3/y^2)^2/2g = y + 0.46/y^4$$

Denne ligningen må løses ved iterasjon. Forsøker forskjellige verdier av y, og ser om vi får 2.51 meter:

$y$	$E=2.51?$
0.5	7.84
1.0	1.459
0.8	1.92
0.7	2.61
0.72	2.43
0.71	2.52

En vanndybde på 0.71 meter gir den rette spesifikke energien. Merk at en vanndybde på 2.5 meter ville også gi rett svar på ligningen, men da ville vi hatt underkritisk strømning.

### Forhold mellom trykk og hastighetsenergi ved kritisk strømning

Ved kritisk strømning er Froude tallet lik 1.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gy}} = 1$$

Dette gir følgende uttrykk:

$$U^2 = gy$$

Vi kan bruke dette til å eliminere  $U$  i uttrykket for spesifikk energi,  $E$ :

$$E = y + \frac{U^2}{2g} = y + \frac{gy}{2g} = y + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}y$$

Den totale spesifikke energimengden i kritisk strømning er lik 1.5 ganger trykkhøyden. Dette kan vi igjen bruke til å løse mhp.  $y_c$ :

$$y_c = \frac{2}{3}E$$

Dette betyr at vi har følgende fakta som gjelder ved kritisk strømning:

- Trykkhøyden eller vanndybden er lik 2/3 av den spesifikke energien
- Hastighetshøyden er lik 1/3 av den spesifikke energien
- Hastighetshøyden er lik halvparten av trykkhøyden

Hvis vi innfører en vannføring pr. breddenhet,  $q$ , blir den definert som:

$$q = Uy$$

Hvis vi løser mhp  $U$  får vi:

$$U = \frac{q}{y}$$

Setter vi dette inn i definisjonen på Froude tallet for en rektangulær kanal med kritisk strømning får vi:

$$Fr^2=1=\frac{U^2}{gy}=\frac{q^2}{y^2gy} \quad \text{eller} \quad y^3=\frac{q^2}{g} \quad \text{eller} \quad y_c=\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Her er  $y_c$  kritisk dybde. Siden vannføringen er gitt, og kritisk dybde kan beregnes, kan også en tilsvarende kritisk vannhastighet fås. Denne vannhastigheten og vanndybden kan så brukes i Mannings formel til å finne en kritisk bunnhelning:

$$I_c = \frac{U_c^2}{M^2 r_c^{4/3}}$$

## Overgang mellom over og underkritisk strømning

Froude tallet brukes til å bestemme om vi har en av tre forskjellige strømningssituasjoner:

- Overløp
- Kontraksjon
- Vannstandssprang

I det følgende er dette forklart nærmere. Vi starter med overløpet.

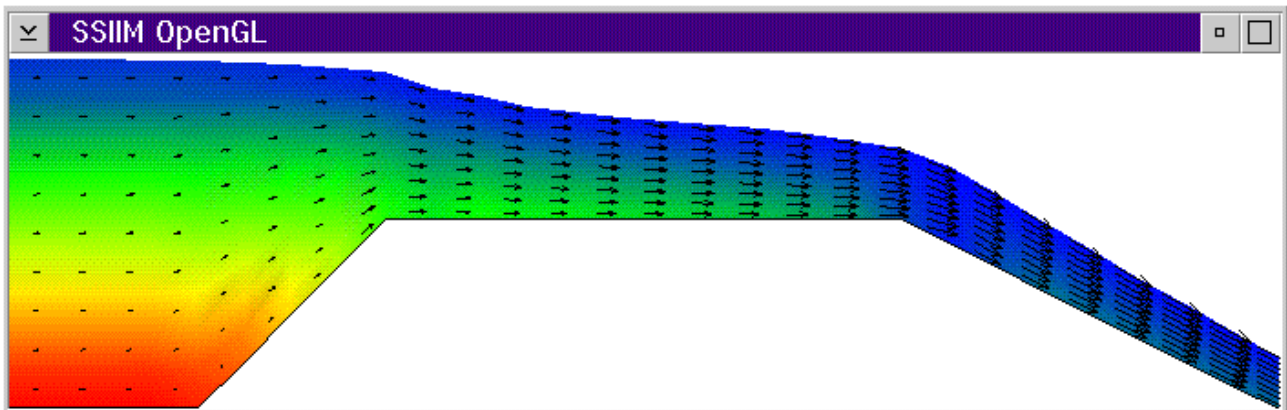
### Overløp

I et overløp har vi overgang fra underkritisk til overkritisk strømning. Dette betyr at det er kritisk strømning på ett punkt i overløpet. Hvis vi kan måle vanndybden der, kan vi bruke definisjonen av Froude-tallet til å finne vannhastigheten. Når vi har vannhastighet og dybde, kan vi regne ut vannføringen. Dette betyr at vi kan finne vannføringen ved kun å måle en vanndybde.

Ofte er det vanskelig å vite hvor kritisk dybde er. Derfor måles i stedet forskjellen mellom dybden et godt stykke bak overløpet og toppen av overløpet. Denne vertikale avstanden korreleres mot vannføringen i en overløpsformel.

Overløp er sentrale deler av alle damkonstruksjoner, både til vannforsyning og vannkraftverk. En stor del av damsikkerhetsvurderinger omhandler hvor stor kapasiteten på overløpet er. Stor overløpskapasitet betyr at vannstanden stiger lite bak demningen under en flom. Hvis overløpskapasiteten er for liten, vil vannstandsstigningen bak dammen bli for stor. En kan da få såkalt overtopping av dammen, dvs at vannet renner over toppen. Dette kan føre til erosjon på nedstrøms side av dammen, med påfølgende dambrudd. Høy vannstand på vannsiden av demningen betyr også større hydrostatiske krefter på dammen, noe som kan føre til lekkasjer og brudd.

Det finnes mange typer overløp. Vi skal se på formler for overløpskapasiteten for forskjellige typer.



### Langkronet overløp

Utleder formel for vannstand/vannføring. Bernoulli mellom reservoaret og midten av overløpet gir:

$$E = H = y_c + \frac{U^2}{2g}$$

Vi har her definert  $H$  til å være den vertikale avstanden mellom toppen av overløpskonstruksjonen og vannspeilet bak overløpet. Dette er en variabel som er vanlig å bruke ved overløpsberegninger. Definisjonen er også vist i figuren over.

I den videre utledningen er det antatt at det vertikale hastighetsprofilen er uniformt. Bruker at  $y = 2/3 E$ , som gir:

$$H = \frac{2}{3} H + \frac{U^2}{2g}$$

Dette kan løses med hensyn på  $U$ :

$$U = \sqrt{\frac{2}{3} g H}$$

Vannføringen blir:

$$Q = AU = B \frac{2}{3} H \sqrt{\frac{2}{3} g H} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g} B H^{\frac{3}{2}} = 1.7 B H^{3/2}$$

Den generelle formelen for et overløp er på følgende form:

$$Q = C B H^{\frac{3}{2}}$$

Der  $C$  er en overløpskoeffisient. For et langkronet overløp har vi klart å regne ut  $C$  til å bli 1.7. Dette viser seg å være rimelig nøyaktig, fordi vannhastigheten er rimelig uniform og trykket er relativt hydrostatisk. Imidlertid er dette ofte ikke tilfelle for andre geometrier, og da må  $C$  bestemmes empirisk.



Overløpskoeffisienten vil ha dimensjon  $m^{1/2}/s$ , som kommer av at den inneholder roten av  $g$ . Hvis man tok med roten av  $g$  i formelen, ville en fått en dimensjonsløs koeffisient. Siden gravitasjonen virker likt på en prototype og en fysisk modell, får vi samme overløpskoeffisient for forskjellige opp/ned skaleringer av geometrien til et bestemt overløp.

### Skarpkantet overløp

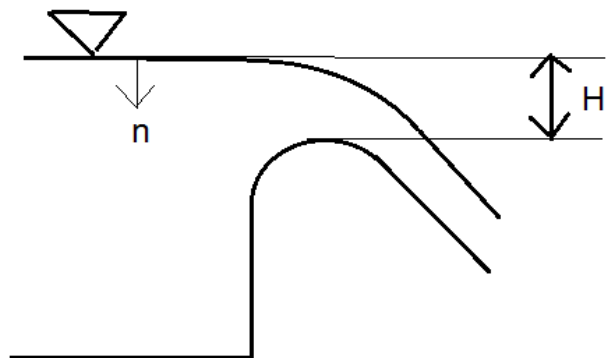
Problemet i forhold til et bredt overløp er at en har relativt ikke-uniformt hastighetsfelt over kanten. En delvis utledning kan baseres på antagelsen om at vannhastighetsvariasjonen kan bestemmes fra Bernoullis ligning:

$$U(n) = \sqrt{2gn}$$

Der  $n$  er den vertikale avstanden fra nivået i reservoaret. Ved å integrere denne ligningen fra  $1/3H$  til  $H$ , får vi et uttrykk for vannføringen:

$$Q = B \int_{\frac{1}{3}H}^H U(n) dn = B \int_{\frac{1}{3}H}^H \sqrt{2gn} dn$$

$$Q = \frac{2}{3} B \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{1}{3} H \right)^{\frac{3}{2}} \right] = 2.4 BH^{\frac{3}{2}}$$



Ekspirer viser imidlertid at koeffisienten blir lik 1.8. Dette betyr at antagelsen om at hastigheten kan beskrives med Bernoulli's ligning ikke er så veldig nøyaktig. Som oftest finnes  $C$  ved laboratorieforsøk.

## Parshall renne

Parshall rennen er et spesielt utformet overløp, der geometrien er enkel og standardisert. Dette gjør at renna egner seg godt til vannføringsmålinger. En har relativt slak bunnhelning nedstrøms, med et vannstandssprang som ikke er altfor stort. Det mistes derfor ikke så mye energi, og ting som flyter med strømmen setter seg ikke så lett fast i konstruksjonen.

## Kanalendringer

En kanalendring er her definert som en brå heving av bunnivået av kanalen eller minskning av kanalbredde. Hvis en har en heving av bunnen, vil dette føre til at den spesifikke energien minsker. Er strømmingen underkritisk, vil vannivået synke. Vi kan regne på dette med formelen for den spesifikke energien til strømmingen. Hvis vi har en bunnheving  $\Delta y$  får vi følgende ligning for spesifikk energi før (1) og etter (2) hevingen:

$$E_1 = E_2 + \Delta y = y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = y_2 + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta y$$

Hvis vi vet dybde og vannføring før hevingen, samt hvor stor hevingen er, kan vi løse denne ligningen sammen med kontinuitetsligningen for å finne hva dybden blir etter hevingen.

Vi kan bruke samme prinsippet ved en forandring i bredden av en kanal. Når vi forandrer bredden vil hastigheten forandres, og derved også hastighetshøyden. Hvis den spesifikke energien er lik før og etter kontraksjonen, så vil endel av trykkhøyden gå over til hastighetshøyde ved underkritisk strømming. Derved vil vann dybden minke etter kontraksjonen.

**Eksempel:** En kanal har en vannføring på 150 l/s, og en bredde på 1 meter i et rektangulært tverrsnitt. Vannstanden oppstrøms en kontraksjon er 34 cm. I kontraksjonen er bredden 0.5 meter. Hva blir vannstanden i kontraksjonen?

**Løsning:** Hastigheten før kontraksjonen er  $U = Q/A = 0.15 / (0.34 * 1.0) = 0.44$  m/s. Den spesifikke energien før kontraksjonen blir:

$$E_1 = y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = 0.34 + \frac{(0.44)^2}{2 * 9.8} = 0.35 \text{ m}$$

Vi setter opp samme ligningen for den spesifikke energien i kontraksjonen. Men vi bruker kontinuitetsligningen til å eliminere hastigheten:

$$E_2 = y_2 + \frac{U_2^2}{2g} = y_2 + \frac{\left(\frac{0.15}{0.5 y_2}\right)^2}{2 * 9.8} = y_2 + 0.00459 / y_2^2 = 0.35 \text{ m}$$

Dette er blir en tredjegradsligning med  $y_2$  som ukjent. For å løse denne gjetter vi på forskjellige verdier av  $y_2$ , og setter inn i uttrykket på venstre side for å se om vi får 0.35 m.

$y_2$	$E_2$
0.25	0.323
0.32	0.364
0.30	0.351

Vi ser at en dybde på 30 cm gir en spesifikk energi på 0.35 m, som er det samme som før kontraksjonen. Vi får derfor denne dybden i kontraksjonen.

## Vannstandssprang

Et vannstandssprang er en stående bølge der Froude-tallet oppstrøms spranget er større enn 1 og Froude tallet nedstrøms spranget er mindre enn 1. Strømningen går derfor fra å være overkritisk til å bli underkritisk. Vannstandssprang forekommer ofte nedstrøms overløp. Når en designer en overløpskonstruksjon, må en derfor ta vannstandsspranget med i beregningen. I design av overløp vil det være et problem at vannstandsspranget vil medføre stor turbulens og potensiell erosjon under spranget. En må derfor vanligvis ha betong i området der spranget foregår. Siden vannnybden nedstrøms spranget er større enn oppstrøms spranget, trengs det også sidevegger i kanalen for overløpet, for å få vannet til å følge kanalen og ikke forsvinne i områder som ikke skal bli oversvømmet.

Et spørsmål er derfor ofte hvor høye disse sideveggene skal være. Dette er igjen et spørsmål om hvor stor vannnybden blir nedstrøms spranget. Vi trenger derfor en formel/metode for å finne vannnybden nedstrøms et vannstandssprang.

Impulssatsen er mye brukt til å bestemme vannnybder i vannstandssprang. Beliggenheten av vannstandsspranget bestemmes ofte av kanalforandringer: endringer i bunnhellingen eller kanalbredde. Ofte vil en ønske at vannstandsspranget kommer på ett bestemt sted, da det vil være lettere å sikre et mindre område mot erosjon og oversvømmelser. En kan da bruke klosser på bunnen, som bremser vannet og gjør at vannstandsspranget oppstår rundt klossene.

Når en skal regne på et vannstandssprang med klosser, bestemmes kreftene på klossene fra formelen for krefter på en sylinder:

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho A U^2$$

Gitt kreftene på klossene, kan en bruke disse i impulssatsen som beskriver vannstandsspranget:

$$F + \rho g (A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2) = \rho Q (U_2 - U_1)$$



Kraften,  $F$ , er fra klossen på vannet. Hvis en ikke har klosser, blir  $F$  lik null. Det første leddet på høyre side er impuls kraftene fra vannet, og det andre leddet er de hydrostatiske trykkraftene. Parameteren  $\bar{y}$  er avstanden fra vannoverflaten til nivået der trykket er lik gjennomsnittstrykket over tverrsnittet. For en rektangulær kanal er  $\bar{y} = 1/2 h$ , der  $h$  er vann dybden. For en trekantformet kanal, med spissen i bunnen er  $\bar{y} = 1/3 h$ . Dette kan regnes ut fra hydrostatikk.

**Eksempel:** Et vannstandssprang i en 4 meter bred kanal med rektangulært tverrsnitt har en oppstrøms dybde på 0.2 meter. Vannføringen er 7.5 m<sup>3</sup>/s. Det er 0.15 høye blokker i kanalen med en drag koeffisient på 0.25. De dekker hele kanalens bredde. Bestem nedstrøms dybde.

**Løsning:** Først bestemmes effektivt areal av blokkene. Bredden av summen av blokkene antas lik kanalbredden. Tilnærmer arealet til høyden ganger bredden av kanalen.

Dybden oppstrøms var 0.2 meter, og vannføringen var 7.5 m<sup>3</sup>/s. Vannhastigheten finnes fra kontinuitetsligningen til å bli 9.4 m/s. Kraften på blokkene er:

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho A U^2 = \frac{1}{2} 0.25 * 1000 * 0.15 * 4.0 * 9.4^2 = 6.6 \text{ kN}$$

Setter dette inn i impuls satsen. Kraften på klossen virker i motsatt retning av kraften på vannet fra klossen. Bruker kontinuitetsligningen til å eliminere hastigheten nedstrøms vannstandsspranget,  $U_2$ :

$$F + \rho g (A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2) = \rho Q (U_2 - U_1)$$

$$-6600 + 1000 * 9.8 (4 * 0.5 * 0.2 - 4 * 0.5 * h_2^2) = 1000 * 7.5 \left( \frac{7.5}{4 h_2} - 9.4 \right)$$

$$-6600 = \frac{14062}{h_2} - 70275 + 19620 h_2^2 - 784.8$$

$$h_2^2 + \frac{0.7167}{h_2} = 3.28$$

Setter inn i venstre side, og ser om en får det som står på høyre side:

$h_2$	3.28
1.8	3.64
1.7	3.31
1.68	3.25
1.69	3.28

Nedstrøms dybde blir 1.69 m.

## Formel for vannstandssprang

Hvis en ikke har klosser i vannstandsspranget, og tverrsnittet er rektangulært med horisontal bunn, kan en utlede en formel for vanndybden nedstrøms vannstandsspranget. En bruker da først impulslikningen:

$$F + \rho g (A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2) = \rho Q (U_2 - U_1)$$

For en rektangulær kanal der  $F=0$  og  $y=1/2 h$  får vi:

$$\frac{1}{2} \rho g (A_1 h_1 - A_2 h_2) = \rho Q (U_2 - U_1)$$

Deler på bredden og tettheten, og antar en kanal med rektangulært tverrsnitt:

$$\frac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2) = q (U_2 - U_1)$$

Bruker kontinuitetslikningen til å eliminere hastighetene:

$$\frac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2) = q \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right)$$

Løser mhp.  $q^2$ :

$$q^2 = \frac{-\frac{1}{2} g (h_2^2 - h_1^2)}{\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}} = \frac{\frac{1}{2} g (h_2^2 - h_1^2)}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}$$

Bruker så definisjonen av Froude tallet:

$$Fr_1^2 = \frac{U_1^2}{gh_1} = \frac{q^2}{gh_1^3} \quad \text{som kan løses mhp } q^2: \quad q^2 = Fr_1^2 gh_1^3$$

Vi har da to likninger for  $q^2$ , som kan elimineres:

$$Fr_1^2 gh_1^3 = \frac{\frac{1}{2} g (h_2^2 - h_1^2)}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}} = \frac{\frac{1}{2} g (h_2 - h_1)(h_2 + h_1) h_1 h_2}{(h_2 - h_1)}$$

Tar bort  $g$ , og får Froude tallet på venstre side:

$$Fr_1^2 = \frac{1}{2} (h_2 + h_1) \frac{h_1 h_2}{h_1^3} = \frac{1}{2} (h_2 + h_1) \frac{h_2}{h_1^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_2^2}{h_1^2} + \frac{h_2}{h_1} \right)$$

Løser mhp.  $h_2/h_1$ :

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1^2 = 0$$

Løsningen av annengradsligningen:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1)$$

Dette er den klassiske formelen for vannstandssprang, som gjelder for et rektangulært kanalverrsnitt. For andre kanalformer, må en bruke impulssetningen direkte. Avhengig av tverrsnittsformen kan en få en høyere (enn 2) ordens ligning, som en må iterere for å løse. Formelen gjelder heller ikke hvis en har klosser i vannstandsspranget eller hvis kanalen ikke har en horisontal bunn.

**Eksempel:** Et vannstandssprang i en 4 meter bred kanal har en oppstrøms dybde på 0.2 meter. Vannføringen er 7.5 m<sup>3</sup>/s. Bestem nedstrøms dybde og energidissipasjonen.

**Løsning:** Regner ut Froude tallet oppstrøms, men først vannhastigheten:

$$U = Q/A = 7.5/(4*0.2) = 9.37 \text{ m/s}$$

$$Fr^2 = U^2/gh = 9.37^2/(9.81*0.2) = 44.8$$

Bruker formelen for vannstandssprang:

$$h_2 = \frac{h_1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1) = \frac{0.2}{2}(\sqrt{1+8*44.8}-1) = \underline{1.8 \text{ m}}$$

Energien før vannstandsspranget er:

$$E_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = 0.2 + \frac{9.4^2}{2*9.8} = 4.67 \text{ m}$$

Energien etter vannstandsspranget er:

$$E_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = 1.8 + \frac{\left(\frac{7.5}{4*1.8}\right)^2}{2*9.8} = 1.85 \text{ m}$$

Energitalpet er da i meter:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = 4.67 - 1.85 = 2.82 \text{ m}$$

Hvis vi konverterer dette til Watt med Energiligningen blir energitalpet:

$$N = \rho g Q (E_2 - E_1) = 1000 \times 9.18 \times 7.5 \times 2.82 = \underline{207 \text{ kW}}$$

## Klassifisering av vannstandssprang

Vannstandssprang kan klassifiseres etter oppstrøms Froude tall. Dette er gitt i tabellen under.

Froude tall	Navn	Beskrivelse
1.0-1.7	Bølger	Bølger på overflaten
1.7-2.5	Svakt	Liten endring i vannstand, lite energitap
2.5-4.5	Svingende	Flyttes frem og tilbake langs strømmen. Bør unngås i konstruksjoner
4.5-9.0	Stasjonært	Stabilt sprang, der energidissipasjonen foregår over en kort strekning. Anbefales for energidrepere.
Over 9.0	Kraftig	Stabilt, men med bølger nedstrøms

## Når bruker vi de forskjellige formlene?

For å beregne friksjonstap i et rør brukes oftest Darcy-Weissbach's formel  
Både Mannings og Chezy's formler kan også brukes

For å beregne friksjonstap i en kanal med fritt vannspeil brukes oftest Manning's formel  
Chezy's formel kan også brukes i kanaler

Både i rør og kanaler brukes forskjellige formler for å finne singularøstap. Som oftest er de på formen:  $h_f = K \cdot U^2 / 2g$ , der K er en empirisk faktor tatt fra en tabell.

I et vannstandsprang brukes nesten alltid impulssetningen for å finne en ukjent vanndybde. Kontinuitetsligningen brukes så til å finne en ukjent vannhastighet. Friksjon neglisjeres oftest i vannstandspranget, men selve vannstandspranget vil medføre et energitap. Dette kan beregnes med Bernoulli's ligning.

Beregning av trykk i rør skjer ved bruk av Bernoulli's ligning eller Energiligningen.

Krefter på konstruksjonsflater som blir truffet av stråler beregnes oftest fra Impulssetningen. Dette gjelder spesielt hvis en søker komponenter i forskjellige retninger. Kraftene på søyler, klosser etc. i en kanal eller i et rør kan også beregnes fra drag-formelen.

Ved et overløp vil alltid strømmingen være kritisk. Vannføringen finnes ved at Froude-tallet = 1 sammen med Kontinuitetsligningen.

## Appendix I Utledning av spenningsrelasjoner

Utledning av sammenhenger mellom spenninger og viskositet+hastighetsgradienter. Brukes til utledning av viskøse ledd i Navier-Stokes ligninger (kp. 6). Står ikke i boka, og er ikke pensum.

Vi skal utlede følgende formler:

$$1. \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$2. \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vi begynner med å se på deformasjon av et element i en todimensjonal strømning, fra tiden  $t$  til tiden  $t+dt$ . Figuren til venstre viser elementet ved de to tidspunktene. Venstre element er ved tidspunkt  $t$  og høyre element er ved tidspunkt  $t+dt$ .

Hastigheten i  $x$ -retning er  $u$ , og hastigheten i  $y$ -retning er  $v$ . Elementsiden  $AB$  roterer en vinkel  $d\alpha$ , mens elementsiden  $AD$  roterer en vinkel  $d\beta$ .

Gjennomsnittlig

vinkeløyningshastighet av elementet,  $\epsilon_{xy}$ , er gjennomsnittet av vinkelendringene  $d\alpha$  og  $d\beta$  delt på tidskrittet:

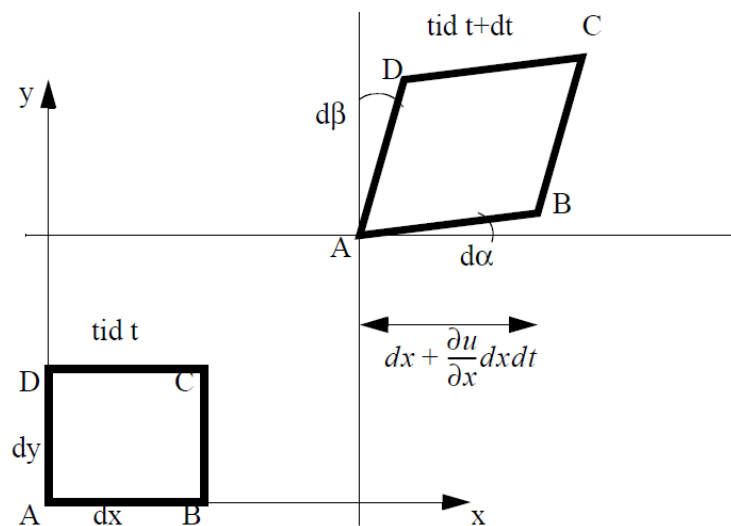
$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right)$$

Fra geometribetraktninger i figuren over har vi:

$$\partial\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

og

$$\partial\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$



Dette gir:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Lengden av elementet i x-retning øker i løpet av tidsskrittet fra  $dx$  til  $dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx dt$ . Dette betyr en lengdetøyningshastighet av elementet i x-retning,  $\epsilon_{xx}$  lik:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} dx dt}{dx dt} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Vi har her delt på  $dx$  fordi vi ønsker en dimensjonsløs tøyning. Vi har delt på  $dt$  fordi vi ønsker en tøyningshastighet, dvs tøyning pr. tid.

For Newtonske væsker, har vi at en påført skjærspenning er proporsjonal med tøyningshastighetene:

$$\tau \sim \epsilon \quad \text{eller} \quad \tau \sim \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Viskositet er definert ut i fra:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

For at denne ligningen skal passe inn i den todimensjonale ligningen, må vi ha at:

$$\tau_{xy} = 2\mu \epsilon_{xy}$$

Hvis vi bruker denne relasjonen om  $\tau_{xy}$ , må vi også bruke den om  $\tau_{xx}$ . Vi får derfor

$$\tau_{xx} = 2\mu \epsilon_{xx}$$

Dette gir

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad \text{og} \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}$$

som var det vil skulle vise.