TMA4101/4106/4111/4121

OBLIG 6 - TMA4101

Standardnormalfordelingen har sannsynlighetstetthetsfunksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Denne skal du bli godt kjent med til våren i TMA4245. Nå tar vi en liten forsmak. I en kontinuerlig sannsynlighetsmodell finner man sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen. Sannsynligheten for at en standardnormalfordelt stokastisk variabel Z havner mellom a og b i et forsøk, er:

$$P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$$

Du kan lese mer om normalfordelingen i kap. 24.8 i Kreyszig eller i kap. 7.8 i Adams eller her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution`
I standardnormalfordelingen er $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

$\boxed{1}$ Du vet at standardnormalfordelingsfunksjonen ikke har noen antiderivert som er lett å evaluere. Lag en pythonfunksjon som tar inn a og b og returnerer $P(a < Z < b)$ ved trapesregelen.

Hvis du lykkes med denne oppgaven, har du din egen rutine for å beregne sannsynligheter i standardnormalfordelingen. Gratulerer. Du kan bruke den neste semester. Dersom f er to ganger kontinuerlig deriverbar, er feilen trapesregelen gjør alltid mindre enn

$$\max_{x \in [a,b]} f''(x) \frac{h^2(b-a)}{12}$$

der h er avstanden mellom gitterpunktene i partisjonen.

$\boxed{2}$ Bruk feilestimatet over til å implementere at koden din returnerer en øvre skranke for integrasjonsfeilen, slik at brukeren av koden kan få tilbakemelding om nøyaktigheten.

$\boxed{3}$ Hvis du vil gjøre koden enda mere praktisk i bruk, kan du modifisere den slik at brukeren (altså deg i TMA4245 til våren) kan spesifisere μ og σ i tillegg til a og b.

$\boxed{4}$ En gjennomsnittlig tørrfisk av lofotskrei veier visst $\mu = 2.7$ kg:
`https://no.wikipedia.org/wiki/Lofotfiskets_historie`
La oss for enkelhets skyld anta at $\sigma = 0.7$ kg. En elektroingeniør på fisketorget i Bergen plukker opp en tilfeldig tørrfisk. Finn sannsynligheten for at den veier mellom 2.7 og 3.4 kg.