4 - 3 - Å HERPE EN TROMME

Laplaceoperatoteren

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dukker opp overalt i fysikken. Vi har møtt dem gjennom real- og imaginærdelen til en kompleks analytisk funksjon, i bølgelikningen

$$\ddot{u} = \Delta u$$

og i varmelikningen

$$\dot{u} = \Delta u.$$

Dersom du tar en av disse likningene og antar at det ikke er noen tidsendring, for eksempel ved at varmeflyten er blitt stasjonær, får du **Laplaces likning**:

$$\Delta u = 0$$

Ting som passer i dette dyret kalles **harmoniske funksjoner**. Hvis du vil ha et mentalt bilde av en harmonisk funksjon, kan se for deg dette skarptrommeskinnet, som sitter på en treramme som har slått seg. Skinnet tilfedsstiller bølgelikningen med dirichletrandkrav også når det er i ro.

Takk til Lars i TSO for herpa skarptrommeskinn med form ikke ulik $f(x) = x_1 x_2$.

For å få en fysisk intuisjon på dette med harmoniske funksjoner, kan det være lurt å tenke litt på dette med **flyt**. Det finnes mange eksempler på fysikk der du har et vektorfelt som beskriver en eller annen flyt, og så er vektorfeltet gradienten til ett eller annet skalarfelt. Her er et par eksempler:

- Fouriers varmelov
$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$
der $\mathbf{q}$ er varmefluks, k termisk konduktivitet og T temperatur.

- Ohms lov
$$\mathbf{j} = -\sigma\nabla \phi$$
der $\mathbf{j}$ er strømtetthet, σ konduktivitet og ϕ spenning.

- Darcys lov
$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}\nabla p$$
der $\mathbf{q}$ er væskefluks, k permeabiliteten til bergarten, μ væskens viskositet, og p trykk.

- Ficks lov
$$\mathbf{J} = -D\nabla \phi$$
der $\mathbf{J}$ er massefluks, D er diffusivitet og ϕ er konsentrasjon.

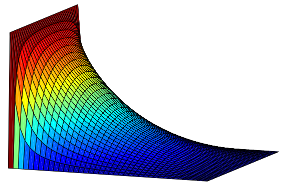
En harmonisk funksjon er en funksjon hvis gradient gir et flytfelt uten opplagring. For å se det må vi bygge ut divergensteoremet litt.

$\boxed{1}$ Skriv opp divergensteoremet, og anta at vektorfeltet er gradienten til en funksjon u. Hvordan ser divergensteoremet ut da?

For en harmonisk funksjon er er fluksen til gradientfeltet ut av et vilkårlig område alltid null.

$\boxed{2}$ Vis dette.
(Hint: klarte du oppgaven over er du nesten i mål.)

Trommeskinnet på første side viser en typisk harmonisk funksjon. Her er en annen. Den viser temperaturen i en tynn plate der temperaturen holdes konstant lik null på tre sider, konstant lik fem eller en eller noe på den siste siden, og tiden har gått langt nok til at varmeflyten er blitt stasjonær. (Figuren er faktisk en numerisk løsning av varmelikningen, etter at tidsendringen har avtatt.)



I trommeskinnet eller varmeflyten over, er det vel klart at det finnes bare én fysisk løsning. Spesifiserer du temperaturen på kanten og lar varmeflyten bli stasjonær, vil det nok bare være én temperaturfordeling som er korrekt. Dette kalles dirichletproblemet, og ser ut som følger. La Ω være et område i $\mathbb{R}^n$, og la $\partial\Omega$ være randen. Trommeskinnet eller varmeflyten er en funskjon u som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} \Delta u =& 0 \quad \text{på } \Omega \\ u =& f \quad \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dette problemet har entydig løsning. Det er ikke veldig vanskelig å se, men vi må ha enda noen varianter av divergensteoremet. Her er en ny variant for skalarfelt.

$\boxed{3}$ Anta at vektorfeltet kun har en komponent forskjellig fra null, og skriv opp divergensteoremet. Dette kalles noe sånt som gaussgreenteoremet eller noe i den dur.

$\boxed{4}$ Og dette gir oss igjen en delvisintegrasjonsformel som funker i flere dimensjoner, utled ved å sette uv inn for komponenten i forrige oppgave.

Nå kan vi vise entydighet. Anta det finnes to løsninger, la oss kalle differansen mellom dem w. Da vil w løse problemet

$$\begin{aligned} \Delta w =& 0 \quad \text{på } \Omega \\ w =& 0 \quad \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Nå kan du vise at $w = 0$ ved å gange likningen $\Delta w = 0$ med w, integrere, og så bruke delvisintegrasjonsformelene du fant i oppgave 4.

La oss begynne med noe enkelt og nyttig.[1]

$\boxed{6}$ Skriv opp Maxwells likninger på differensialform.[2] Vis at dersom feltene er statiske (altså ingen endring i tid) blir likningssettet dekoblet:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

Dersom du er et sted i rommet der det ikke er noen gitt ladningstetthet ($\rho = 0$) eller strømtetthet ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), sier vi som sagt at vi er i **tomt rom**. Nå finnes det et vanskelig teorem som sier at under noen milde glatthetsbetingelser er et rotasjonsfritt vektorfelt alltid konservativt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Med andre ord er det implisert av Gauss' lov for magnetisme at et stasjonært elektrisk felt er konservativt. Forhåpentligvis husker du at du har verifisert dette for coulombfeltet i TMA4111.

$\boxed{7}$ Nå kan du utlede at i tomt rom er spenningen ϕ harmonisk.

Løsninger av Laplaces likning kalles **harmoniske funksjoner**, og spenningen til et elektrostatisk felt i tomt rom er altså en harmonisk funksjon. Dersom rommet ikke er helt tomt, tilfredsstiller spenningen Poissons likning, som er en inhomogen variant av Laplaces likning:[3]

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\boxed{8}$ Sjekk at du er enig i at resonnementet fra oppgave 5 funker like godt for Poissons likning.

[1] https://www.mn.uio.no/fysikk/personer/vit/johask/elektromagnetisme.pdf

[2] Rene Descartes likte visst å ligge og dra seg til langt ut på morgenkvisten, for det var da han tenkte best. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26291552/

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics

Utledningen av løsningsformler for partikkel-i-boks, bølgelikning for streng og varmestang har en analog for harmonisk funksjon på plate. Matematikken er identisk, det er bare fysisk tolkning som er litt uvant.

$\boxed{9}$ Utled at løsningen til Laplaces likning

$$V_{xx} + V_{yy} = 0,$$

på rektangelet $[0,\pi] \times [0,\pi]$ med randkrav

$$V(x,0) = V(0,y) = V(\pi,y) = 0$$

og

$$V(x,\pi) = f(x).$$

er

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh ny \sin nx,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

og forklar hva dette er en modell for. Plott løsningen over i python eller matlab for $f(x) = 1$. Plottet bør se ut omtrent som min vakre figur over.

Hvis du studerer plottet du laget over eller trommeskinnet på første side, vil kanskje se at harmoniske funksjoner har pene egenskaper. Egenskapene under kalles "middelverdisatsene for harmoniske funksjoner".

$\boxed{10}$ Vis at for harmoniske funksjoner gjelder at

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

$\boxed{11}$ Bruk oppgaven over til å vise at også

$$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u \, dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

Tilsvarende resultater gjelder i $\mathbb{R}^2$, men bevisene er penest i $\mathbb{R}^3$. Av middelverdisatsene følger maksverdisatsen, som sier at en funksjon som er harmonisk på Ω alltid tar maksimums- og minimumsverdier på $\partial\Omega$.

$\boxed{12}$ Utled dette.

Harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante. Dette betyr at om du roterer koordinatsystemet ditt, vil de rene andrederiverte fortsatt summere til null. Dette kan vi vise ved en totrinnsprosess.

$\boxed{13}$ La A og B være kvadratiske matriser, og x en vektor. Vis at skalarproduktet mellom Ax og Bx kan skrives

$$(Ax, Bx) = (Ax)^T (Bx) = x^T A^T Bx = \sum_i \left(\sum_k a_{ki} x_i \left(\sum_j b_{kj} x_j \right) \right)$$

(Hint: Husk på formelen for kvadratisk form

$$x^T Cx = \sum_j \sum_k c_{jk} x_j x_k$$

samt formelen for komponentene i matriseprodukt $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.)

$\boxed{14}$ La A være en kvadratisk matrise, og la $x = Ay$. Vis at

$$\Delta_y = \sum_i \left(\sum_k a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) = \nabla_x^T A^T A \nabla_x$$

Hva skjer dersom A er en rotasjonsmatrise?

$\boxed{15}$ Vis at laplaces likning blir

$$\frac{2}{r} u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} u_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} u_\theta + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

i kulekoordinater.

Siden harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante, gir det mening å lete etter spesielle løsninger som kun avhenger av distansen $r = \|\mathbf{x}\|$ fra origo. Potensialet til coulombfeltet er det eksempel på hva man kan finne på dette viset.

$\boxed{16}$ Prøv. Ser du en interessant forskjell mellom $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$?