4 - 1 - NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER I

$\boxed{1}$ Python regner ut alt i om lag seksten desimalers presisjon, og gir

$$\frac{e^{1.6}-e^{1.5}}{0.1}-e^{1.5}\approx 0.2317444702324396$$
$$\frac{e^{1.51}-e^{1.5}}{0.01}-e^{1.5}\approx 0.022483327280713006$$
$$\frac{e^{1.501}-e^{1.5}}{0.001}-e^{1.5}\approx 0.0022415916702973604$$
$$\frac{e^{1.5001}-e^{1.5}}{0.0001}-e^{1.5}\approx 0.00022409192614158968$$
$$\frac{e^{1.50001}-e^{1.5}}{0.00001}-e^{1.5}\approx 2.2408571680010425\cdot 10^{-5}$$
$$\frac{e^{1.500001}-e^{1.5}}{0.000001}-e^{1.5}\approx 2.2410595752475615\cdot 10^{-6}$$
$$\frac{e^{1.5000001}-e^{1.5}}{0.0000001}-e^{1.5}\approx 2.3377634672527847\cdot 10^{-7}$$
$$\frac{e^{1.50000001}-e^{1.5}}{0.00000001}-e^{1.5}\approx -6.0318265937553406\cdot 10^{-9}$$
$$\frac{e^{1.500000001}-e^{1.5}}{0.000000001}-e^{1.5}\approx 6.156930671963323\cdot 10^{-7}$$
$$\frac{e^{1.50000000001}-e^{1.5}}{0.00000000001}-e^{1.5}\approx 5.92354687674046ee\cdot 10^{-5}$$
$$\frac{e^{1.500000000001}-e^{1.5}}{0.000000000001}-e^{1.5}\approx 0.0009474138884675298$$
$$\frac{e^{1.5000000000001}-e^{1.5}}{0.0000000000001}-e^{1.5}\approx 0.0036119491475679055$$
$$\frac{e^{1.50000000000001}-e^{1.5}}{0.00000000000001}-e^{1.5}\approx 0.04802087013257417$$
$$\frac{e^{1.500000000000001}-e^{1.5}}{0.000000000000001}-e^{1.5}\approx 0.8473814478626869$$
$$\frac{e^{1.5000000000000001}-e^{1.5}}{0.0000000000000001}-e^{1.5}\approx -4.4816890703380645$$

Feilen er tydelig proporsjonal med h - deler du h på 10, deler du feilen på 10, Helt til avrundingsfeilen begynner å ødelegge på $h = 0.00000001$. Hvis du vil lese mer om hvorfor dette skjer, kan du se her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Round-off_error`

$\boxed{2}$ Denne gangen får vi

$$\frac{e^{1.51} - e^{1.49}}{0.02} - e^{1.5} \approx 0.007473217414137423$$
$$\frac{e^{1.501} - e^{1.499}}{0.002} - e^{1.5} \approx 7.469519133618263 \cdot 10^{-5}$$
$$\frac{e^{1.5001} - e^{1.4999}}{0.0002} - e^{1.5} \approx 7.469480740596168 \cdot 10^{-7}$$
$$\frac{e^{1.50001} - e^{1.49999}}{0.00002} - e^{1.5} \approx 7.468485385686563 \cdot 10^{-9}$$
$$\frac{e^{1.500001} - e^{1.499999}}{0.000002} - e^{1.5} \approx 9.660450217552352e \cdot 10^{-11}$$
$$\frac{e^{1.5000001} - e^{1.4999999}}{0.0000002} - e^{1.5} \approx -2.5866686570452657e \cdot 10^{-10}$$

Her ser vi at avrundingsfeilen slår inn omtrent på samme h, men presisjonen blir bedre. Vi kan få en ide om hvorfor ved å studere taylorrekkene

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \cdots$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \cdots$$

Vi ser nå at

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots$$

mens

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots.$$

Dette forklarer sånn omtrent hvorfor vi får én ekstra desimal per tideling av h med den første formelen, og to ekstra desimaler per tideling med den andre formelen.

$\boxed{3}$ Denne gangen får vi

$$\frac{e^{1.3} - 8e^{1.4} + 8e^{1.6} - e^{1.7}}{1.2} - e^{1.5} \approx -1.4956758427331351 \cdot 10^{-5}$$
$$\frac{e^{1.48} - 8e^{1.49} + 8e^{1.51} - e^{1.52}}{0.12} - e^{1.5} \approx -1.4938787984419832e \cdot 10^{-9}$$
$$\frac{e^{1.498} - 8e^{1.499} + 8e^{1.501} - e^{1.502}}{0.012} - e^{1.5} \approx -3.552713678800501 \cdot 10^{-13}$$
$$\frac{e^{1.4998} - 8e^{1.4999} + 8e^{1.5001} - e^{1.5002}}{0.0012} - e^{1.5} \approx -3.8458125573015423e \cdot 10^{-13}$$

Jeg har ikke regna ut taylorutviklingen til denne på noen år, men setter på grunnlag av dette eksperimentet en månedslønn på at det første feilleddet er proporsjonalt med h^4.

$\boxed{4}$ `https://github.com/Lorangs/TMA4121_matematikk4_oblig/blob/main/varmelikningen_i_2koordinater.py`