3 - 9 - VEKTORKALKULUS

Kvaternionene ble oppdaget av W. D. Hamilton i 1843, og er en utvidelse av de komplekse tallene. Utvidelsen består i at man legger til to nye imaginære enheter j og k, definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inksripsjonen er dessverre vekk. Et kvaternion ser slik ut

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k.$$

der z_0, z_1, z_2 og z_3 er reelle tall. Realdelen x_0 kalles **skalardelen**, mens imaginærdelen $z_1 i + z_2 j + z_3 k$ kalles **vektordelen**.

$\boxed{11}$ Utled regnereglene

$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

Likner dette på noe du har lært på gymnaset?
(Hint: du bør ha kryssproduktet og høyrehåndsregelen i bakhodet.)

Som du kan se er multiplikasjon mellom kvaternioner er ikke **kommutativt**. Dette er litt awkward i begynnelsen; hvis du ikke har vært med i abelkonkurransen eller noe, er antagelig alt du har sett til nå i livet vært kommutativt.[1] Det er viktig å venne seg til at enkelte ting ikke er kommutativt, for kommutering ligger i bånn for Heisenbergs usikkerhetsprinsipp.[2]

$\boxed{12}$ Regn ut

$$zw = (z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)(w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

og

$$wz = (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

Vi konjugerer kvaternioner akkurat som vi konjugerer komplekse tall:

$$\overline{z} = z^* = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Commutative_property
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

$\boxed{13}$ Akkurat z og $\overline{z}$ kommuterer faktisk med hensyn på multiplikasjon. Regn ut $z\overline{z}$ og $\overline{z}z$.

Dette kan brukes til å definere absoluttverdi $\sqrt{\overline{z}z}$, samt finne invers.

$\boxed{14}$ La

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \qquad \text{og} \qquad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k)$$

Vis at $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Jeg foretrekker vanligvis å begynne indeksering fra en og ikke null, men akkurat for kvaternioner er det en fordel å begynne på null. [3] Grunnen er at man i anvendelser ofte er interessert i å tenke på imaginærdelen som et punkt i $\mathbb{R}^3$. Regnereglene for de imaginære enhetene i, j og k illustrerer nemlig hvorfor vi i gamle dager skrev

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, og

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$$

for vektorer i $\mathbb{R}^3$. Denne notasjonen er nå gått av moten, og det er i bunn og grunn synd, for hvis man skriver alt slik, kan man bruke høyrehåndsregelen til å huske formelen for kryssprodukt.

$\boxed{15}$ La

$$z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$$

og

$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

og regn ut $\overline{z}w$ og se om det ser kjent ut.

[3]Det er et mysterium hvorfor alle programmeringsspråk insisterer på å indeksere fra 0 istedet for 1. Hvis du har en vektor med tre elementer, er det mer naturlig å kalle dem $x[1]$, $x[2]$ og $x[3]$ enn $x[0]$, $x[1]$ og $x[2]$, og skriver du for i in range(n) i python må du huske på at denne går fra 0 til n-1, ikke fra 1 til n:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Off-by-one_error`

Grunnen til at jeg nå plaget deg med kvaternioner, er at dersom du husker multiplikasjonsreglene for kvaternioner, slipper du å pugge formelen for kryssprodukt, som er sentral i ukens pensum - vektorkalkulus.

Denne uken leser vi kapittel 16 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

16.1: 1-8

16.2: 10-16

16.4: 1-17

16.5: 1-10

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Maxwell formulerte dette som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne pene formen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

noen år etter Maxwells originale publikasjon. Likningene kalles henholdsvis Gauss' lov, Faradays induksjonslov, Gauss' lov for magnetisme og Amperes lov. Dette er et koblet sett med differensiallikninger, der

- $\mathbf{E}$ er det elektriske feltet
- $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet
- c er lyshastigheten i vakuum
- ρ er ladningstetthet i rommet
- ϵ_0 er permittiviteten i vakuum
- $\mathbf{J}$ er en gitt strømtetthet i rommet

Da avslutter vi semesteret med et par klassikere som avhenger av divergensteoremet og Stokes teorem.

$\boxed{1}$ Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled de korresponderende likningene på integralform:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot dS &= 0 \\ \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS \\ c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot dS \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Fra maxwell følger at ladning er konservert.

$\boxed{4}$ Utled varmelikningen

$$\dot{u} = \Delta u$$

i tre romlige dimensjoner.

DIVERGENS

Divergensen til et vektorfelt er summen av diagonalelementene i vektrofeltets jacobimatrise:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \text{trace}\,(DF)$$

$\boxed{1}$ Finn divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

Nå skal vi se litt på hva divergensen betyr.

$\boxed{2}$ La $\S_\epsilon$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius ϵ, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\mathbf{N}$ være enhetsnormalen til $\S_\epsilon$ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

$\boxed{3}$ Finn divergensen til det elektriske feltet til en punktladning.

Divergensteoremet

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathbb{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

Regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\mathbf{N}$ peker ut fra T.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 7}$, $z = 0$ og $z = 2$. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x + y, z + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?

ROTASJON

Rotasjonen til et vektorfelt er litt mer grisete enn divergensen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$\boxed{1}$ Finn rotasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2 + y^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \, .$$

$\boxed{3}$ Finn rotasjonen til coulombkraften til en ladning q.

Stokes teorem

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{5}$ La R være den delen av ellipsoiden $x^2 + y^2 + 8(z-1)^2 = 9$ hvor $z \geq 0$, og la vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz - 5y^3 \cos z, 5x^3 e^z, 6xye^{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Regn ut

$$\iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

der $\mathbf{N}$ er enhetsnormalen på R som peker vekk fra origo.

Se her for flere regneregler for divergens og rotasjon:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities#Second_derivative_identities`