

3 - 8 - TRIPPELINTEGRALER

Denne uken leser vi kapittel 14.5-14.7 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

14.5: 1-12, 17-20 og 27-29

14.6: 1-18

14.7: 13-38

Trippelintegral fungerer omtrent som dobbeltintegral, men det er vanskeligere å visualisere. Vi integrerer funksjoner fra \mathbb{R}^3 til \mathbb{R} . Du kan tenke på funksjonen som massetetthet eller ladningstetthet i rom, og på integrasjonsområdet Ω som en ting du ønsker å finne den totale ladningen til. Fysikere skriver

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

men matematikere liker kanskje bedre å skrive

$$\iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{eller bare} \quad \iiint_{\Omega} f$$

La oss begynne med noe enkelt. I oppgaven under er integrasjonsområdet en rektangulær boks. Integralene utføres fra innerst til ytterst.

1 Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x^2 y + z dz dy dx.$$

Dersom $x^2 y + z$ er massetetthet, hvordan vil du tolke det innerste integralet

$$g(x, y) = \int_0^3 x^2 y + z dz?$$

Hva med de to innerste integralene

$$h(x) = \int_0^2 \int_0^3 x^2 y + z dz dy?$$

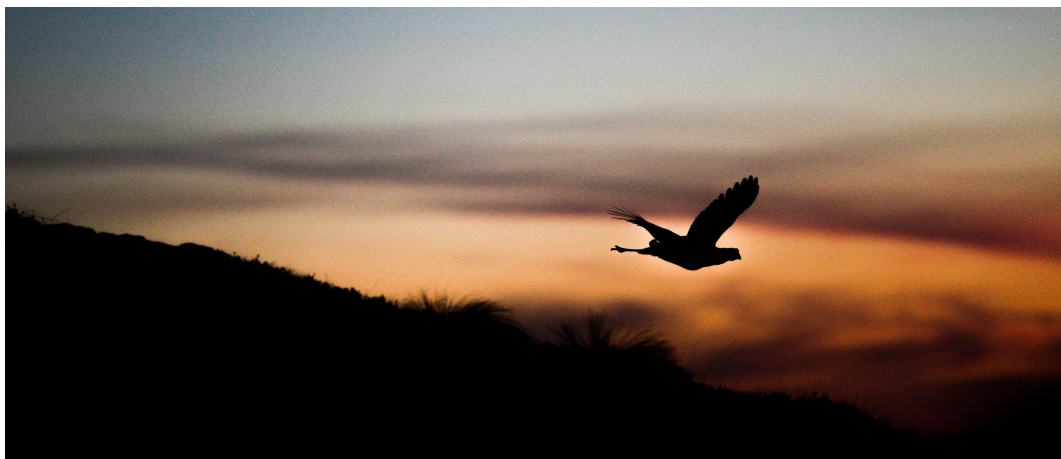
Det vanskelige kommer når integrasjonsområdet ikke er rektangulært. La oss prøve Adams sitt eksempel med tetraederformet integrasjonsområde. I de tre neste oppgavene er Ω et tetraeder med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.

2 Overflaten til Ω består av fire plan som har hver sin likning. Finn dem.

3 Skriv opp integralet

$$\iiint_T x^2 y + z dV$$

på seks forskjellige måter.



Hvis du tenker på integranden som massetetthet (kilo/kubikkmeter) og Ω som en klump med masse, er trippelintegralet f over Ω den totale massen til klumpen. Massesenteret $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ er gitt ved

$$m_1 = \frac{\iiint_{\Omega} x_1 f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}, \quad m_2 = \frac{\iiint_{\Omega} x_2 f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}, \quad m_3 = \frac{\iiint_{\Omega} x_3 f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}.$$

- 4] Anta at massetettheten til et objekt formet som Ω er gitt som $\delta(x, y, z) = xz$. Finn massen og massesenteret til objektet.

Nå tar vi en litt vanskeligere en.

- 5] Et område D er definert ved gitt ved ulikhetene $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$. Skisser området og skriv opp

$$\iiint_D x^2 y + z \, dV$$

på seks forskjellige måter. (Oppg 14.5.7 fra Adams.)

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene D som er enhetskuleformet, blir det et svineri uten like i vanlige koordinater:

$$\iiint_D f \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-x^2}}^{\sqrt{1-y^2-x^2}} f(x, y, z) \, dz dy dx$$

Heldigvis finnes det koordinatskift. Man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet hvis definisjonsmengde er en rektangulær boks. Akkurat som med linje- og flateintegraler må man huske å kompensere for farten til parametriseringen. La oss først se litt på volumer.

- 6] En funksjon $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ er gitt ved

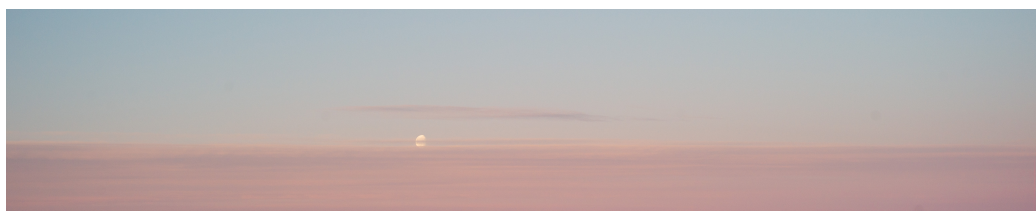
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Finn volumet av $\mathbf{F}(\Omega)$ dersom $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Akkurat som tidligere er det bare å gange volumet til Ω med determinanten til matrisen (som jo er volumet til parallelepipedet utspent av kolonnene) for å finne volumet til $\mathbf{F}(\Omega)$ så lenge \mathbf{F} er en lineærabildning. Men når koordinattransformasjonen ikke er lineær, blir det mer komplisert, og vi må integrere for å finne volum.

- 7] La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \rightarrow \mathbb{R}^3$, der $D \in \mathbb{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom \mathbf{z} . Forklar at volumet til Ω er

$$\int_{\Omega} d\mathbf{z} = \int_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| d\mathbf{x}$$



Det finnes to veldig viktige koordinattransformasjoner. Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z -aksen, bruker man sylinderkoordinater:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

8 Regn ut

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

der $R = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ og } 0 \leq z \leq 5\}$.

9 Finn volumet av den delen av kjeglen

$$z^2 \geq x^2 + y^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10 Regn ut

$$\iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} dV$$

der legemet Ω er gitt ved $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y \geq 0$.



Den andre viktige transformasjonen er kulekoordinater:

$$x = r \cos \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \phi$$

Her er θ vinkelen du er vant med i xy -planet, og ϕ vinkelen (x, y, z) gjør med z -aksen.

11 Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

12 Finn

$$\iiint_R z \, dV$$

der R er området i rommet avgrenset av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, xz -planet, yz -planet, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



UKENS NØTTER

- 1 La R være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ samt planene $z = 0$ og $z = \sqrt{5}$.

Regn ut volumet av R .

- 2 Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$\rho = 4 - \cos(\varphi).$$

UKENS FYSIKK

- 1 En kjøkkenbenk med en buet ende er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $y = \sin x$. Den har konstant massetetthet lik 1, og Ole Bjørn lurer på om han klarer å løfte den. Finn kjøkkenbenkens totale masse.

- 2 Ole Bjørn ønsker å balansere kjøkkenbenken på en finger i forbindelse med en jubileumskonkurranse i byggevarebutikken. Han må derfor beregne kjøkkenbenkens massesenter. Hjelp ham med det.

- 3 Ole Bjørn har bygget et hus med en interessant grunnflate og skrått tak. Grunnflaten er området som er innesluttet mellom kurvene $y = x^2$ og $x = y^2$, og taket er gitt ved

$$f(x, y) = x + y.$$

Finn volumet til huset.

- 4 Ole Bjørn ønsker å beregne massen til en oppvaskmaskin for å finne ut om han kan bære den opp i huset selv. Den har form som et rektangulært prisme avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ og $z = \pi$, og har massetetthet gitt ved

$$\rho = f(x, y, z) = \sin z.$$

- 5 Finn også massesenteret til oppvaskmaskinen.

- 6 Ole Bjørn har bygget en liten modell av holmenkollbakken. Den har konstant massetetthet 1, og er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ og $z = y^2$. Finn massen og massesenteret.

- 7 Ole Bjørn sager holmenkollbanen sin i to langs med planet gitt ved $x + 2y = 4$. Finn massen og massesenteret til delene.

