TMA4101/4106/4111/4121

3 - 7 - FLATE- OG FLUKSINTEGRALER

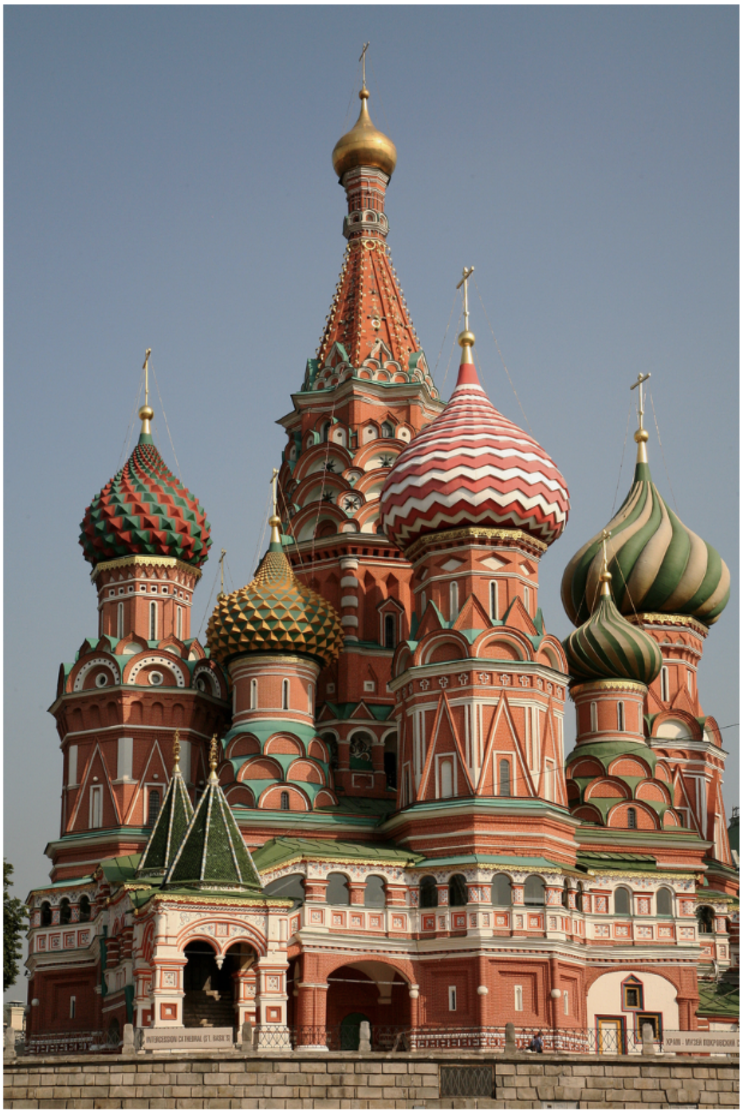
Denne uken leser vi kapittel 15.5-6 i Adams, og gjør oppgave 2-10 og 13-19 i 15.5 og 1-13 i 15.6.

Når man skal skjønne noe av funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er det fornuftig å ha den riktige visualiseringen. Hva som er den riktige visualiseringen avhenger av m og n. Det er to valg av m og n der "flate i rommet" er den korrekte visualiseringen, og det ene valget er $m = 2$, $n = 1$. Dette har vi jobbet mye med til nå. Dersom f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$, ligger punktene som passer i likningen

$$z = f(x, y)$$

på en flate i $\mathbb{R}^3$. Du tenker på (x, y) som en koordinat i husets gulv, og så angir f takhøyden.

Men hva om du har en løkkuppel på huset ditt? (`https://snl.no/løkkuppel`)



Vasilijkatedralen ved Røde plass har flere løkformede kupler.

Vasilijkatedralen
Av W. Bulach.

Denne lar seg ikke så lett beskrive av en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Heldigvis finnes det et annet valg av m og n som duger, nemlig $m = 2$ og $n = 3$. En funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ kalles gjerne en **parametrisert flate**. Forskjellen er er analog til kurver i planet. Både $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

tenker vi på som kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. Du kan for eksempel ikke beskrive en kurve som krysser seg selv med en likning på formen $y = f(x)$.

$\boxed{1}$ En funksjon fra $[0,1] \times [0,1]$ til $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hva slags flate er dette?

$\boxed{2}$ En annen funksjon fra $[0, 2\pi) \times [0,1]$ til $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\begin{aligned} x(\theta, h) &= \cos\theta \\ y(\theta, h) &= \sin\theta \\ z(\theta, h) &= h \end{aligned}$$

Hva er dette for noe?

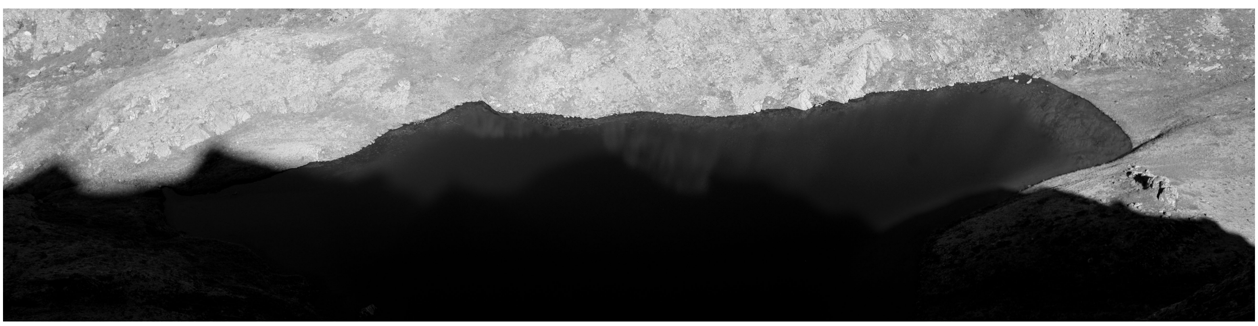
$\boxed{3}$ Hva med denne? Definisjonsmengden er $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= \cos\theta \sin\phi \\ y(\theta, \phi) &= \sin\theta \sin\phi \\ z(\theta, \phi) &= \cos\phi \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Funksjonen $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$p(x) = (40x - 4)(x - 1)^4$$

ser nå i bunn og grunn ut som tverrsnittet av en kuppel, spør du meg. Bruk p til å sette opp en passelig parametrisering for en typisk løkkuppel.



Nå skal vi se på hvordan vi regner ut overflatearealet til en parametrisert flate. La oss begynne med en lett en.

$\boxed{5}$ Hva er arealet til flaten i oppgave 1?

Funksjonen $\mathbf{F}$ i oppgave 1 over er en lineæravbildning, og hvis du endrer definisjonsmengden til noe annet enn enhetskvadratet, er det null stress, du ganger bare arealet av definisjonsmengden med

$$\left|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{11}$$

og vips så har du arealet av flaten. Men når parametriseringen for flaten ikke er en lineæravbildning, er kryssproduktet over forskjellig for hvert punkt i rommet, og vi må til med et integral. Jobben din er nå å forstå følgende.

$\boxed{6}$ En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

der $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Les kap. 15.5 i Adams og forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_\Omega \left|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\right| \, d\mathbf{x}$$

$\boxed{7}$ Regn ut arealet til flatene i oppgave 2-4 over.

$\boxed{8}$ La Σ være kuleflaten som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$. Finn arealet av den delen av Σ som ligger over planet $z = 2$.

La oss nå fortsette med dette semesterets store hyttetema. Vi har forstått skalarfelt i to variable som taket i hytten, linjeintegral over skalarfelt som arealet til en typisk vegg i hytten, og dobbeltintegral som volumet til hytten. Nå skal vi ta for oss taket. Den som har vært med å bygge et tak, vet at vekten til taket er langt fra uniform. I et tak finnes det sperrer, isolasjon, undertak, blikkplater, og massevises av skruer og vinkeljern og så videre. Her er noen bilder av taket på Revneset.



På Revneset er alt skeivt, så isolasjonen i taket er 5 cm på det tynneste og 20 cm på det tykkeste, og det sier seg selv at vekten på taket er langt fra uniform. Hvis du skjærer ut en tilfeldig bit på en kvadratmeter av taket og veier den, vil vekten variere med hvor du skar ut biten. Når man konstruerer store bygg er dette selvfølgelig viktig å vite.

Du kan tenke at du står på et bestemt punkt på taket og har til hensikt å bestemme massetettheten til taket i det punktet du står i, målt i kilo per kvadratmeter. Funksjonen du søker går fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$ og kalles gjerne ρ. Taket er ikke flatt, så den totale vekten blir

$$\iint_\Sigma \rho = \iint_\Omega \rho\left(\mathbf{z}(\mathbf{x})\right) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

der Σ er taket og $\mathbf{z} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ takets parametrisering.

$\boxed{9}$ Forklar dette for noen.

Har du skjønt koordinatskift i dobbeltintegraler, vil du kanskje se at et flateintegral er en generalisering av dette. Eller motsatt, har du skjønt flateintegraler, kan du tenke på et dobbeltintegral med koordinatskifte som et flateintegral der flaten ligger flatt i $\mathbb{R}^2$. Massesenteret (m_x, m_y, m_z) til en todimensjonal ting med masstetthet ρ er gitt ved

$$m_x = \frac{\iint_\Sigma x\rho \, dS}{\iint_\Sigma \rho \, dS} \qquad m_y = \frac{\iint_\Sigma y\rho \, dS}{\iint_\Sigma \rho \, dS} \qquad m_z = \frac{\iint_\Sigma z\rho \, dS}{\iint_\Sigma \rho \, dS}$$

$\boxed{10}$ Finn massesenteret til et halvt kuleskall med uniform tetthet.

Har man forstått formelen for flateintegral over skalarfelt, blir fluksintegraler greit. La oss begynne med noe relatert til flaten.

$\boxed{11}$ La flaten være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at de partiellderiverte

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}$$

begge er tangentvektorer til flaten. og at enhetsnormalvektoren til flaten er gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

Tenk at du står ute i en elv med vadebukser og holder en tom ramme under vann eller noe slikt og måler hvor mange liter vann som flyter gjennom rammen per tidsenhet. Vannstrømmen kan modelleres av en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{12}$ Sett at vi har en flate Σ med enhetsnormalvektor $\mathbf{N}$. Tegn og forklar at dersom vannstrømmen er gitt av $\mathbf{F}$, er strømmen gjennom et punkt på flaten (i liter per kvadratmeter per sekund) gitt ved

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$$

og at den totale utstrømmningen gjennom flaten Σ (i liter per sekund) er

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

$$= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}$$

(Merk at vi har litt flaks her. Normaliseringsfaktoren i enhetsnormalvektoren til flaten er jo den samme som arealelementet i flateintegralet, og disse kansellerer på samme måte som de gjorde for linjeintegral over vektorfelt.)

Hvis du har skjønt alt over, kan vi gå over til det som er viktig for elmag, nemlig elektrisk fluks. Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dersom vektorfeltet i definisjonen av fluksintegral er et elektrisk felt, kalles fluksintegralet **den elektriske fluksen gjennom flaten**.

$\boxed{13}$ Regn ut den elektriske fluksen til en punktladning q plassert i orige gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R.

$\boxed{14}$ Hva med fluksen ut gjennom en eller annen sylinder?

$\boxed{15}$ Hva med ut gjennom den triangulære flaten med hjørner $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$?