3 - 5 - LINJEINTEGRALER

Dette semesteret har så langt handlet mye om å forstå tre nye funksjonstyper - funksjoner med flere variable inn, funksjoner med flere variable ut, og funksjoner med flere variable ut og inn. Resten av semesteret vil stort sett handle om å forske videre på disse funksjonstypene. Nå skal vi kombinere alle tre i en helt ny type integral dere ikke har sett før, nemlig **linjeintegralet**.

Dette semesteret vil introdusere en haug med nye integraltyper for dere, og det er essensielt å forstå geometrien i dem hvis man skal få en føleølse av forståelse. La $\mathbf{x}$ være en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

med definisjonsmengde $[a, b]$. Grafen til $\mathbf{x}$ kaller vi Γ. Husk at $\dot{\mathbf{x}}$ gir tangenten til kurven og at $\|\dot{\mathbf{x}}\|$ er speedometerfarten. Buelengden til Γ finner du ved å integrere speedometerfarten

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt.$$

$\boxed{1}$ Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at integralet over blir buelengden til kurven. og regn ut lengden til denne utrolig kule kurven (som bare er konstruert for å gi en integrand som er lett å integrere)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan t \end{bmatrix}$$

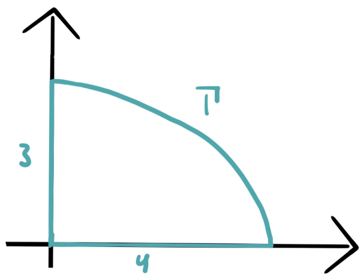
mellom $t = 0$ og $t = 2$.

$\boxed{2}$ Regn ut omkretsen av en ellipse med halvakser 3 og 4. (Bruk numerisk integrasjon.)

En av de tingene som er vanskelig med dette semesteret, er at det er utrolig vanskelig å finne regneoppgaver som både har noen som helst fysisk relevans, men som samtidig lar seg beregne med penn og papir. Det er i det hele tatt ikke så mange kurvene du klarer å regne ut lengden til med penn og papir. Det som er viktig er å skjønne formlene.

La oss nå gå et knepp videre, og tenke at du har tenkt å bygge en stilig grillhytte med grunnflate som ser ut som figuren til høyre. Den krumme delen Γ er ellipsen fra forrige oppgave. Takets form er inspirert av den ideelle gasslov og gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 2 + x_1 x_2/10$$



Du skal bestille panel og glass til veggene, og trenger derfor å regne ut veggenes totale areal.

Dette med notasjon er alltid litt komplisert i flervariabel kalkulus. Det er mange innarbeidete praksiser som ikke er så gode. Jeg skal gjøre et forsøk på konsistent notasjon i dette kurset, og derfor bytter jeg nå fra $\dot{\mathbf{x}}(t)$ til $\mathbf{x}'(t)$.

3 Bruk din forståelse av riemannsummer samt det som sto på forrige side til å forklare at arealet til den krumme delen av veggen blir

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f ds &= \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{x}(\theta)) \|\mathbf{x}'(\theta)\| \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(2 + \frac{3 \cdot 4}{10} \cos\theta \sin\theta\right) \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta} \, d\theta\end{aligned}$$

og regn ut arealet numerisk.

Integralet over kalles **linjeintegralet til f over kurven** Γ, og dersom $\mathbf{x}$ er en parametrisering for Γ med endepunkter $\mathbf{x}(a)$ og $\mathbf{x}(b)$, skriver vi generelt

$$\int_\Gamma f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt.$$

Dette integralet kan tolkes fysisk på mange måter, men i begynnelsen bør du altså tenke på det som arealet til en husvegg der f er taket og Γ er husveggen slik den er tegnet i arealtegningen. Men du kan også tenke at du har en brugde som beiter pelagisk og svømmer langs kurven Γ. Dersom planktontettheten er gitt ved f, blir linjeintegralet brugdens totale måltid.

4 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Hvor mye plankton spiser brugden på en runde rundt?


Foto: Greg Skomal

5 Brugden svømmer så fra x_1-aksen til x_2-aksen langs den rette linjen $x_1 + x_2 = 1$, med samme planktontetthet. Hvor mye spiser den på denne turen?

6 Den rette linjen i oppgaven over kan parametriseres på mange forskjellige måter. Prøv å regne ut integralet med to forskjellige parametriseringer.

Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven Γ, får linjeintegralet over Γ den samme verdien. Dette er langt i fra innlysenede, men en fin motivasjon for å lære den flervariable kjerneregelen. Denne er mer komplisert enn kjerneregelen i en variabel, men ikke så vanskelig å få grepet om dersom man kan matrisemultiplikasjon. Jeg tror vi skal klinke til å bare skrive opp den generelle versjonen med en gang.

Det er lurt å tenke på $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som en søylevektor:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

og på den deriverte som en $m \times n$-matrise:

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ \vdots \\ F_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Denne kalles **jacobimatrisen** til $\mathbf{F}$. Nå ser vi hvorfor det er lurt å skrive gradienten til en funksjon fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}$ som en rekkevektor:

$$\nabla g = g' = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]$$

og farten til en parametrisert kurve på høykant:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

for disse derivasjonene passer inn i $m \times n$-systemet over. [1] La oss nå ta noen meningsløse regneoppgaver for å trene litt på dette.

$\boxed{7}$ Et meningsløst vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{G}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og et annet ved

$$\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

Finn jacobimatrisene til $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$.

[1] Det er fullt mulig å bytte konvensjon og skrive gradienten som søylevektor og parametriserte kurver på lavkant, så lenge man er konsistent.

Nå kommer en av fordelene med å ha lært matriseregning. Hvis du synes det som kommer under her er hardt, så kan jeg trøste deg med at de fleste andre ingeniørstudenter, som lærer kjerneregelen i flere variable *før* de lærer matriseregning, har det mye mye verre. For dem blir alt veldig uoversiktlig; de må nemlig lære mange forskjellige varianter av kjerneregelen, mens vi klarer oss med bare én.

La $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, og la $\mathbf{H} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ være gitt ved

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x})).$$

Da er $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ gitt ved matriseproduktet

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{G}'(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\,\mathbf{F}'(\mathbf{x}).$$

$\boxed{8}$ I oppgave 7 over er det mulig å sette $\mathbf{F}$ inn i $\mathbf{G}$. Finn jacobimatrisen til $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{z}))$.

Uttrykket $f' \cdot \mathbf{T} = f' \cdot \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$ kalles den **retningsderiverte**.

$\boxed{9}$ Du går en skitur langs trajektorien gitt av $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ på et fjell gitt av $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fjellfunksjonen f måles i meter (både inn og utvariable), mens skiturtrajektorien $\mathbf{x}$ tar inn sekund og gir ut meter. Bruk kjerneregelen til å forklare at

- antall momentane høydemeter per sekund er gitt ved $f'(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$.
- antall momentane høydemetre per lengdemeter er gitt ved $f'(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$.
- du må peke skiene i retningen gitt av f' dersom du bestemmer deg for å kjøre rett utfor, så bratt som overhodet mulig.
- du må peke skiene normalt på f' dersom du vil følge ekvidistanselinjen.

$\boxed{10}$ Vi tar en med noen tall og. Du går en skitur på fjellet $h(x, y) = 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$. Du befinner deg i punktet $(1/2, \sqrt{3})$, og har farten $\mathbf{x}'(t) = (1/2, 1/3)^T$. Finn

- antall høydemeter per tidsenhet.
- antall momentane høydemetre per lengdemeter.
- retningen du må peke skiene dersom du vil kjøre rett utfor, så bratt som overhodet mulig.
- retningen du må peke skiene dersom du bestemmer deg for å følge ekvidistanselinjen.

Hvis man først har skjønt kjerneregelen, er det ikke så vanskelig å forstå at linjeintegralet er uavhengig av parametriseringen. Tilbake til kurven Γ som er parametrisert ved $\mathbf{x}\,(t)$. Dersom $t(u)$ er en monoton funksjon med $t(c) = a$ og $t(d) = b$, vil $\mathbf{y}\,(u) = \mathbf{x}\,(t(u))$ være en annen parametrisering for Γ, men en som løper gjennom Γ med litt annen fart enn $\mathbf{x}$. Vi kjører variabelskifte, bruker kjerneregelen

$$\dot{\mathbf{y}}(u) \;= \dot{\mathbf{x}}(t(u))t'(u),$$

og beregner

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f\,(\mathbf{x}(t))\,\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\,dt = \int_c^d f\,(\mathbf{x}(t(u)))\,\|\dot{\mathbf{x}}(t(u))\|t'(u)\,du = \int_c^d f\,(\mathbf{y}(u))\,\|\dot{\mathbf{y}}(u)\|\,du.$$

Hvis du leser en “ordentlig” mattebok vil du se at jeg har feid noen detaljer om kurvens glatthet og at $t(u)$ bør være deriverbar og slikt under teppet, men det får holde inntil videre.

$\boxed{11}$ Bare for å være hundre prosent sikker på at poenget er drevet gjennom, kan du jo prøve oppgave 4 på nytt, men med en annen parametrisering for sirkelen, for eksempel

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Linjeintegralet vi har studert til nå, kombinerer funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ (som skal integreres) med funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ (som angir kurven det skal integreres over). Nå skal vi inkorporere enda en funksjon, nemlig de fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$. Disse bør du i begynnelsen tenke på som **kraft**, og det første eksemplet man støter på, er selvfølgelig tyngdekraften, som overalt på campus er en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

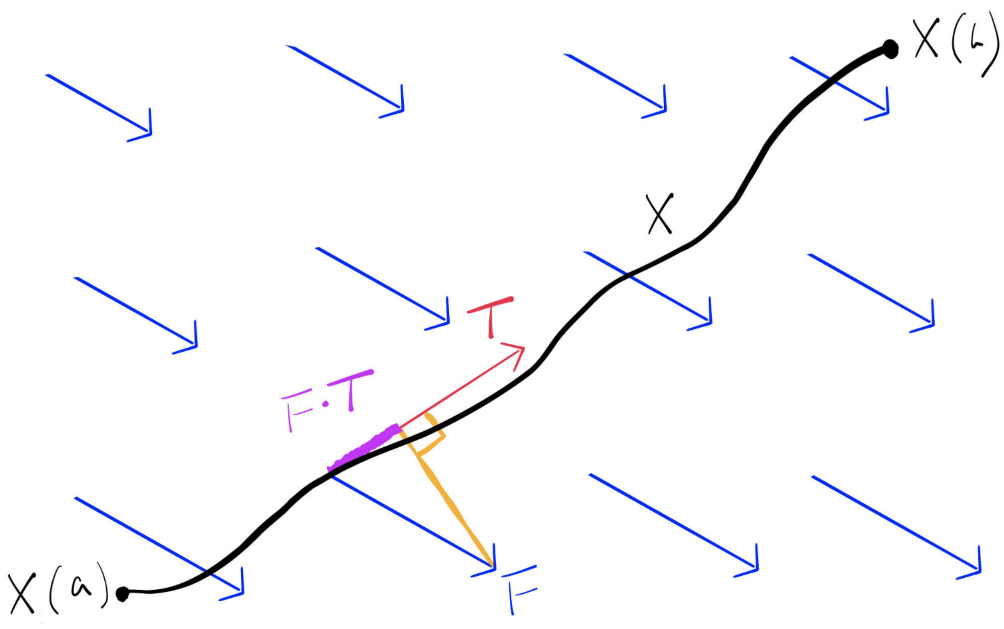
der $g = 9.8214675$ (målt ganske nøyaktig i kjelleren på Institutt for Fysikk) og m er massen din. På skolen lærte du forhåpentligvis at arbeid er kraft ganger vei, og nå skal vi generalisere dette.

Det vanlige spørsmålet i et problem i klassisk fysikk er "hva skjer med denne tingen om du slipper den løs i dette kraftfeltet?" Dette innebærer å løse en differensiallikning, så det skal vi vente litt med. Akkurat nå skal vi ta et mye enklere spørsmål, nemlig "hvor stort arbeid gjør kraftfeltet på tingen dersom den reiser langs en allerede bestemt kurve $\mathbf{x}$ i rommet". Det første du er nødt til å skjønne for å besvare dette, er at det er kun kraftfeltets tangentielle komponent til kurven

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$$

som har noe å si. Den delen av kraftfeltet som står normalt på trajektorien, gjør ikke arbeid. På skolen var stort sett kraften konstant og bevegelsen rettlinjet, slik at du kunne gange kraften med cosinus til vinkelen mellom denne og bevegelsesretningen og så gange med distansen, og så fikk du rett svar. In real life kan for det første kraften være forskjellig fra sted til sted i rommet, og for det andre kan retningen på kurven og retningen på kraften variere i forhold til hverandre. Med andre ord må du *linjeintegrere kraftens tangentielle komponent til kurven* for å finne det totale arbeidet. Dette kalles **linjeintegralet til $\mathbf{F}$ over Γ** og skrives slik:[2]

$$W = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \ dt$$



[2]Akkurat nå skriver jeg $\dot{\mathbf{x}}(t)$ igjen, siden det er det fysikerne gjør.

Du må se nøye på integralet over og være helt sikker på at du skjønner definisjonen og den pene kanselleringen. Normaliseringsfaktoren til enhetstangenten er den samme som lengdeelementet til buelengden. Om du ikke er overbevist over at definisjonen gir fysisk mening, kan vi angripe det litt annerledes. En partikkel har trajektorie $\mathbf{x}(t)$, fart $\dot{\mathbf{x}}(t)$ og kinetisk energi

$$E(t) = \frac{1}{2} m \left(\dot{\mathbf{x}}(t)\right)^2 .$$

Hvis vi deriverer E, får vi, via $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$,

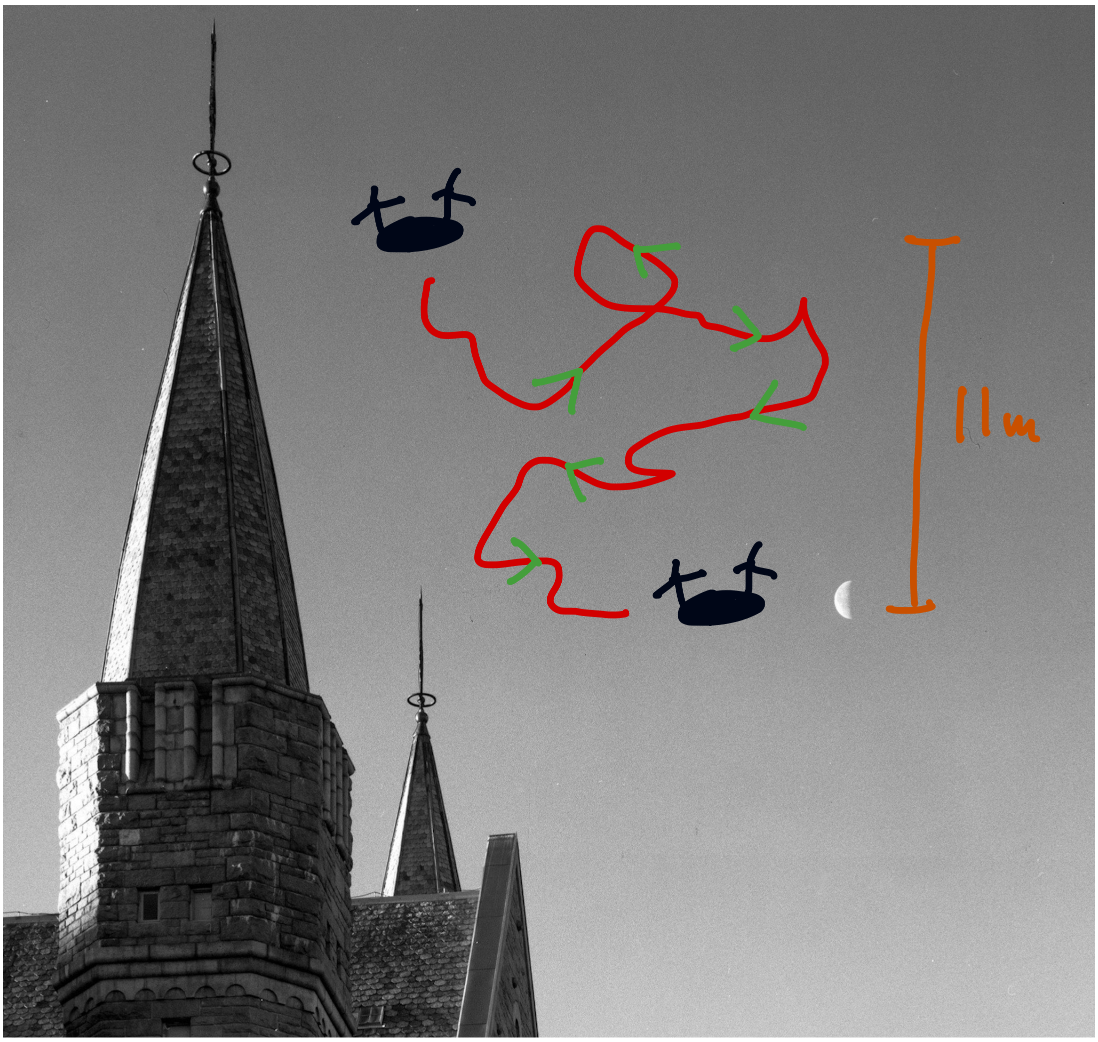
$$\dot{E} = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

og skal vi ha endring i kinetisk energi mellom to tidspunkter, må vi integrere dette uttrykket:

$$E(b) - E(a) = \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{x}(t)\right) \cdot \dot{\mathbf{x}}\left(t\right)\ dt$$

Arbeidet om gjøres på en partikkel er som kjent lik endring i kinetisk energi, så det er klart at integralet på høyre side må representere arbeid. Integralet ser litt sleipt ut, men for de mest klassiske kraftfeltene er det ikke nødvendig å faktisk beregne det. Dette lærte du på skolen.

$\boxed{12}$ En drone flyr rundt i tyngdefeltet på campus. Trajektorien er avbildet. Hva er tyngdekraftens totale arbeid på dronen?



Svaret på forrige oppgave er selvfølgelig mgh (eller mgx_3 eller mgz om du vil), der m er dronens masse og h er den vertikale distansen. Den matematiske forklaringen på at det er så enkelt, er at kraftfeltet er **konservativt**. Dette betyr at $\mathbf{F}$ er gradienten til et skalarfelt V:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = V'(\mathbf{x})$$

Der veldig vanlig at vektorfelt som oppstår i anvendelser er gradienten til et eller annet skalarfelt. Gravitasjon fungerer slik, og det er mange andre eksempler; den elektrostatiske kraften fra en ladd partikkel, Ohms lov for elektrisk strøm i medier med motstand, Fouriers varmelov som relaterer varmefluks og temperaturfordeling, Ficks lov som relaterer diffusjon og konsentrasjon, Darcys lov om væskeflyt versus trykkgradient i porøse medier, og Newtons lov for væskeflyt med friksjon.

$\boxed{15}$ Finn en passelig V dersom $\mathbf{F}$ er det konstante tyngdefeltet på campus.
(Jeg har i bunn og grunn allerede sagt hva det er.)

Den matematiske forklaringen på at du bare kan ta høydeforskjellen mgh mellom endepunktene til Γ i oppgave 15 kommer fra kjerneregelen:

$$\begin{aligned} W &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\ dt \\ &= \int_a^b V'(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\ dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t))\ dt \\ &= V(\mathbf{x}(b)) - V(\mathbf{x}(a)) \end{aligned}$$

Det finnes et viktig skalarfelt hvis gradient gir opphav til to veldig viktige konservative kraftfelt, nemlig coloumbkraften fra en ladd partikkel og Newtons gravitasjonslov. Disse kraftfeltene er matematisk sett helt identiske, og er avledet av skalarfeltet

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

så la oss studere dette litt.

$\boxed{16}$ Finn gradienten til V. I hvilken retning peker den? Hvordan ser nivåflatene til V ut?

Det ene kraftfeltet er Newtons gravitasjonslov.[3] På skolen lærte du antagelig denne som

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Her er m_1 og m_2 massene til to svære ting i verdensrommet (for eksempel jorden og månen), mens G er Newtons gravitasjonskonstant,[4] og $\mathbf{F}$ den tiltrekkende kraften mellom massesentrene til m_1 og m_2. Vi skal gå et knepp videre og skrive kraftfeltet på vektorform:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) = Gm_1m_2\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{Gm_1m_2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Her er det ene massesenteret plassert i origo og det andre i $\mathbf{x}$, slik at $\mathbf{F}$ blir den tiltrekkende kraften på massen i origo fra den i $\mathbf{x}$. Bytter du fortegn, får du kraften fra den i $\mathbf{x}$ på den i origo.

$\boxed{17}$ Vær sikker på at du skjønner at den siste formen bare er en vektoriell versjon av den første. Hva er forholdet til funksjonen V fra forrige oppgave?

Det var Cavendish som først klarte å måle G noenlunde presist med et avansert instrument i lab,[5] men de første forsøkene ved å henge opp en pendel ved siden av et stort fjell er artig lesning.[6]

$\boxed{18}$ Ifølge Wikipedia er månen om lag 362 600 km unna jordens sentrum på sitt nærmeste, og 405 400 på sitt fjerneste. Hva er kraften fra jorden på månen i disse punktene? Hva er forskjellen i potensiell energi?

[3]https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_law_of_universal_gravitation
[4]https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant
[5]https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_07.html
[6]https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion_experiment

Det vanlige er å dele ut den ene massen og sette opp gravitasjonsfeltet til punktmassen m:

$$Gm\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{Gm}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Denne måles i Newton per kg, og har den samme tallverdien som kraften fra m på et enkilos testlodd. Men dere skal jo ikke bli astrofysikere, så jeg har slengt inn gravitasjon mest som oppvarming til noe som er viktigere (for dere), nemlig coloumkraften

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

fra en ladning q_1 i origo på en annen ladning q_2 i $\mathbf{x}$. Her er ϵ_0 en fysisk konstant kalt permittiviteten i vakuum,[7] og jeg håper du ser at denne kraften er matematisk sett identisk med gravitasjonskraften. Men de er voldsomt forskjellig i styrke. Gravitasjonskraften mellom to elektroner er omtrent en 10^{42}-del av coloumbkraften mellom dem.

Akkurat som med gravitasjon, er det vanlig å dele ut den ene ladningen, slik at vi får **det elektriske feltet fra en punktladning** q:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Denne har selvfølgelig også et potensiale $V(\mathbf{x})$, som vi skal vende tilbake til gjentatte ganger. Akkurat i elektrostatikk er det vanlig å definere

$$\mathbf{E} = -V'.$$

$\boxed{19}$ Finn V. Hva slags benevning har V?

Alle diskusjoner om arbeid og linjeintegral på dette nivået ender som regel opp i en diskusjon om forståelse av konservative vektorfelt. Nå er det selvfølgelig veldig fristende å sette opp et linjeintegral og beregne arbeidet et statisk elektrisk felt gjør på en ladning dersom vi flytter den mellom to punkter i det, men dette er litt skummelt, for hvis ladningen akselereres, genererer den et magnetfelt og så blir ikke kraften konservativ lenger og så blir arbeidet feil. La oss derfor heller ta litt termodynamikk.

$\boxed{20}$ Gjør oppgave 6.1 her:
`https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/matte3_kjemi.pdf`

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity`

Funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$ brukes i hovedsak til to ting. Den ene har vi nå sett på, nemlig kraft- og hastighetsfelter. Den andre er **koordinatskift**. Vi visualiserer da alt på en litt annen måte. La oss introdusere dette gjennom en viktig funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) \\ x_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Du har allerede vært borti denne i forbindelse med komplekse tall. Koordinatparet (r,θ) kalles **polarkoordinater**. Her er slik det skal visualiseres:

$\boxed{21}$ Et område D begrenset av $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ og $1 \leq r \leq 2$. Skisser dette området i

- et plan der aksene heter r og θ.
- et plan der aksene heter x_1 og x_2.

Sett disse to figurene ved siden av hverandre og tegn en pil fra den første til den andre. Skriv $\mathbf{x}(r,\theta)$ under pilen.

I tre dimensjoner finnes det en tilsvarende viktig en som kalles kulekoordinater:

$$\mathbf{x}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta,\phi) \\ x_2(r,\theta,\phi) \\ x_3(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Her er r avstanden til origo, θ vinkelen med x_1-aksen (altså den samme som i polarkoordinater), og ϕ vinkelen med x_3-aksen (altså en ny vinkel du antagelig ikke har sett før).

$\boxed{22}$ Dette er litt vanskeligere å tegne opp. Antagelig er det lurt å lete på nett etter en god figur, for da vil du antagelig oppdage at fysikere har motsatt konvensjon på hva som er θ og ϕ. Dette må man nemlig være obs på.
(Kulekoordinater heter "spherical coordinates" på engelsk.)

Nå kommer vi til et subtilt og underkommunisert men veldig viktig poeng. Jeg har skrevet opp det elektriske feltet som

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

altså en funksjon av $\mathbf{x}$, og det er selvfølgelig naturlig å kalle denne funksjonen $\mathbf{E}$. Men $\mathbf{E}$ er også en fysisk størrelse, og hvis vi er interessert i å finne hvordan $\mathbf{E}$ varierer med r, θ eller ϕ er det fristende å skrive

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi}.$$

Men dette er egentlig ikke så lurt, for om vi setter kulekoordinater inn i formelen for det elektriske feltet

$$\mathbf{E}(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

har vi nå den samme fysiske størrelsen, men **helt annen funksjon**, og denne funksjonen bør egentlig ikke hete $\mathbf{E}$, for denne bokstaven er allerede brukt til $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Men det er naturlig å tenke $\mathbf{E}$ for elektrisk felt også når vi bruker kulekoordinater, så her har vi et problem. Det helt klart ryddigste er nå å skrive

$$\mathbf{E} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

og

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}\left(r,\theta,\phi\right) = \mathbf{G}\left(\mathbf{x}\left(r,\theta,\phi\right)\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

altså én bokstav for den fysiske størrelsen $\mathbf{E}$ én bokstav forholdet mellom $\mathbf{E}$ og $\mathbf{x}$ og én bokstav for foholdet mellom $\mathbf{E}$ og (r,θ,ϕ). Dette gjøres nesten aldri i praksis, og en fysiker vil typisk skrive

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_3}$$

i én linje og så

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi}$$

i neste. Min arbeidshypotese er at dette er en av hovedgrunnene til at elmag og termo og annen fysikk med flere uavhengige variable er vanskelig å lære. I termo skriver de for eksempel

$$U = U\left(S,V\right)$$

og så skriver de plutselig

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p$$

som betyr at nå ser de plutselig på U som en funksjon av p og V istedet for S og V. Dette hadde vært lettere å sortere i knolten om man hadde vært nøyere på å ikke blande sammen fysiske størrelser, som er en ting, og funksjonsavhengigheter mellom fysiske størrelser, som er noe helt annet. Men skulle man alltid vært nøye på å skille disse hadde det også blitt forferdelig mange bokstaver å holde styr på, så derfor har man endt opp med å bruke samme bokstav til både en fysisk størrelse og funksjoner mellom den og andre fysiske størrelser. Da er det umulig å unngå at en og samme bokstav må brukes til to helt forskjellige funksjoner, men det er nå en gang slik det er, og dette er viktig å vite om i starten, slik at man kan holde tungen beint i munnen. La oss ta en treningsoppgave.

$\boxed{23}$ Du har tidligere funnet

$$\mathbf{E}'\left(\mathbf{x}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_3}\right).$$

Finn

$$\mathbf{E}'\left(r,\theta,\phi\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \phi}\right).$$

Nå har jeg bevisst misbrukt notasjon. **Bruk kjerneregelen veldig nøye** og tenk at

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}\left(r,\theta,\phi\right) = \mathbf{G}\left(\mathbf{x}\left(r,\theta,\phi\right)\right).$$

Jeg har brukt de samme bokstavene som i uttrykket for kjerneregelen over, med unntak av $\mathbf{F}$, som nå er kulekoordinatfunksjonen

$$\mathbf{x}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta,\phi) \\ x_2(r,\theta,\phi) \\ x_3(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Til slutt skal vi ta noe som er helt forskjellig, men likner litt allikevel, nemlig kompleks funksjonsteori. Ved første øyekast kan det se ut som om funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ likner på funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ siden man putter inn noe med to dimensjoner og får ut noe med to dimensjoner. Men likheten er temmelig overfladisk. En funksjon av en kompleks variabel oppfører seg virkelig fundamentalt annerledes enn en funksjon av en reell variabel. Vi skriver

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

der $z = x + yi$ er en uavhengig kompleks variabel, og $w = u + iv$ er en avhengig variabel. Merk at u og v er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Vi sier at en kompleks deriverbar funksjon er **analytisk** eller **holomorf** dersom den er deriverbar, altså at

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

eksisterer. Dette har å gjøre med at en kompleks funksjon ikke kan være for eksempel tre ganger deriverbar men ikke fire, slik som reelle funksjoner. En kompleks funksjon er enten uendelig mange ganger deriverbar eller ikke deriverbar i det hele tatt.

$\boxed{24}$ I definisjonen av den deriverte har h lov til å reise inn mot z på alle tenkelige måter. Bruk dette til å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(Hint: la $h \to 0$ parallelt med både den reelle aksen og den imaginære aksen).

Real- og imaginærdelen til f introduserer et konsept som er fryktelig viktig i fysikk, nemlig **harmonisk funksjon**:
https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function

$\boxed{25}$ Vis at u og v er harmoniske funksjoner.
(Hint: Deriver cauchyriemannlikningene med hensyn på x og y og se nøye på det du får.)

Vi kan parametrisere kurver i det komplekse planet. For eksempel er

$$z(t) = e^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

er en parametrisering av enhetssirkelen.

$\boxed{26}$ Finn en parametrisering for en sirkel med radius 2 og sentrum i $1 + i$.

Vi integrer komplekse funksjoner omtrent slik vi integrerer vektorfelt. Dersom Γ er en kurve parametrisert av $z(t)$, er linjeintegralet til f over Γ gitt ved

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt$$

Analytiske eller holomorfe funksjoner oppfører seg på noen måter som konservative vektorfelt. Nå tar vi noen oppgaver der du kan forske litt på dette.

$\boxed{27}$ Regn ut

$$\int_\Gamma z^2\, dz$$

på Γ er en kvart enhetssirkel fra realaksen til imaginæraksen i det komplekse planet.

$\boxed{28}$ Regn ut

$$\int_\Gamma z^2\, dz$$

på Γ er en en rett linje mellom de samme punktene som i forrige oppgave.

$\boxed{29}$ Finn

$$\int_\Gamma z^n\, dz$$

der n er et heltall og Γ er enhetssirkelen i det komplekse planet.

$\boxed{30}$ Google “Cauchy’s theorem”. Likner dette på noe du nettopp har lært?

Hvis du nå leser kapittel 13 og 14 i Kreyszig og forstår omtrent hvordan en funksjon av en kompleks variabel funker, vil du nok se at disse oppfører seg helt helt annerledes enn funksjoner av reelle variable. Men det er to likhetstrekk mellom komplekse funksjoner og funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$.

- Funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ visualiseres omtrent på samme måte som vi visualiserer koordinatskift.
- Komplekse holomorfe funksjoner oppfører seg som konservative vektorfelt, siden det komplekse linjeintegralet er uavhengig av selve integrasjonskurven, bare av endepunktene.

La oss rett og slett klinke til med noen oppgaver fra Kreyszig.

- 14.1: 1-30
- 14.2: 9-30
- 14.3: 11-20

LITT KLASSISK MEKANIKK

Klassisk mekanikk er hårete greier, og det er lurt å være litt systematisk. Kan man masse matematikk er mye gjort om man husker at

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}).$$

Hvis du ikke driver med rakettforskning er massen ofte konstant, slik at vi like gjerne kan skrive likningen på den kjente og kjære formen

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{x}}.$$

Dette er en differensiallikning, Mange fysiske prosesser lar seg modellere av slikt. Husk at vi skriver funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Vi deriverer dem slik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \frac{x_1(t+h)-x_1(t)}{h} \\ \frac{x_2(t+h)-x_2(t)}{h} \\ \vdots \\ \frac{x_n(t+h)-x_n(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

Enhetstangentvektoren er

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}$$

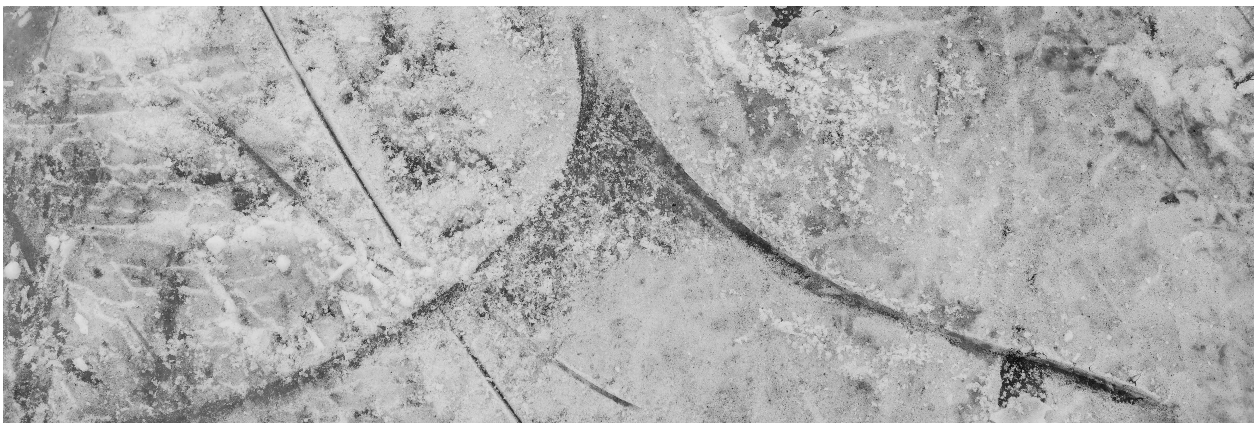
og enhetsnormalvektoren er

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}$$

Størrelsen

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}$$

kalles kurvens krumning. I $\mathbb{R}^3$ er det i tillegg en vektor vi kaller binormalvektoren. Dette er kryssproduktet av $\mathbf{B}$ og $\mathbf{N}$. Denne står som du ser normalt på både tangentvektoren og normalvektoren, og tilsammen danner disse tre noe som kalles frenetrammen. Glatthet for funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ er som kjent noe subtilt. Dette kan du fundere på neste gang du går på skøyter.



$\boxed{3}$ Skrått kast uten luftmotstand. Vi kaster en stein. Finn en funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som beskriver steinens korrekte trajektorie gitt at tyngdekraften er eneste kraft etter steinen har forlatt hånden og at startposisjonen er gitt ved

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og at startfarten er gitt ved

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

(Hint: Dette lærte du tidlig på gymnaset. Bruk bevegelseslikningene i hver koordinatretning.)

$\boxed{4}$ Skrått kast med luftmotstand. La oss si at du kaster en ball fra origo med startfarten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og at ballen kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Vis at dersom luftmotstanden antas å avhenge lineært med farten (dette er greit dersom farten er lav), blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -a\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -a\dot{x}_2 - mg \end{aligned}$$

der m er massen til ballen, a er proporsjonalitetskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen. Løs på en eller annen måte, og plot ballens trajektorie. (Laplacetransform er sikkert fint.)

I fysikk skriver man gjerne

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z}$$

Oversatt til matrisenotasjonen vi bruker blir dette

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}}$$

men vi må nesten skrive det på matriseform med nummererte koordinater, for ellers klarer vi ikke bruker vår fortreffelige kunnskap om matriseregning til å sette opp enkle og systematiske regler for derivasjon og integrasjon av funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{5}$ La oss si at du spiller golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er fremdeles kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Vis at systemet blir

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t) - mg \end{aligned}$$

og løs. Her tror jeg nesten du må bruke laplacetransform.

Hvordan skal vi tenke på diracpulsen i mekanikkproblemer? La oss for enkelhets skyld fikle litt med dette i én romlig dimensjon. Newtons andre lov sier at

$$\frac{d}{dt}mv = F$$

altså at den momentane endringen i moment skal være lik den påtrykte kraften. Dersom vi integrerer denne likningen, får vi

$$m(t)v(t) - m(0)v(0) = \int_0^t F$$

altså at endring i moment over et tidsrom skal være lik kraften summert over tidsrommet kraften har virket. [8] En kraftimpuls er en enorm kraft som virker over et meget kort tidsintervall, så hvis du glaner litt på likningen over, vil du kanskje gå med på at du kan tenke på impuls som noe som fra det ene øyeblikk til det andre gir en bestemt endring i moment. Regneeksemplene over er laget for å illustrere dette. I det ene hadde ballen en gitt startfart, mens i det andre ble ballen utsatt for en impuls. Løsningen ble den samme.

Men nå er vi kommet til et viktig punkt i den matematiske fysikken, nemlig det at kraft kan integreres på to forskjellige måter - med hensyn på tid og med hensyn på strekning. Kraft integrert over et tidsintervall gir en impuls, altså endring i bevegelsesmengde. Men kraft integrert over strekning gir arbeid, altså endring i energi. Fysikerne skriver linjeintegralet som gir arbeid slik:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

La oss ta en ny brugdeoppgave.

$\boxed{9}$ En brugde svømmer langs kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft på brugden gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn det totale arbeidet som gjøres på brugden.

Greg Skomal / NOAA Fisheries Service

[8] På videregående skole antok du at kraften var konstant, og ganget med tiden kraften hadde stått på.

For å løse noen mer realistiske fysiske problemer, må vi nesten til med numeriske metoder og litt mer klassisk mekanikk. For å bestemme bevegelsen til en punktpartikkel i n dimensjoner er det alltid $2n$ størrelser som er nødvendige å ta med - de tre koordinatene for posisjon og de tre for fart. Det er vanlig å kalle posisjonen for $\mathbf{q}$ og farten for $\mathbf{p}$. [9]
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_system`
Størrelsene $\mathbf{q}$ og $\mathbf{p}$ kalles gjerne henholdsvis generalisert koordinat og generalisert moment, siden det ikke alltid er for eksempel posisjon som er den mest hensiktsmessige avhengige variabelen. Posisjonen til en pendel er (gitt at koordinatsystemet har positiv y-akse nedover)

$$\mathbf{x}(\theta) = \begin{pmatrix} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{pmatrix}$$

men bevegelsen er i bunn og grunn endimensjonal, og det er θ som er den mest praktiske uavhengige variabelen, og differensiallikningen kan skrives

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.$$

Innføring av generaliserte koordinater og påfølgende omskriving til system gir

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l}\sin q \end{aligned}$$

Dersom vi har luftmotstand som avhenger kvadratisk av farten, får vi systemet

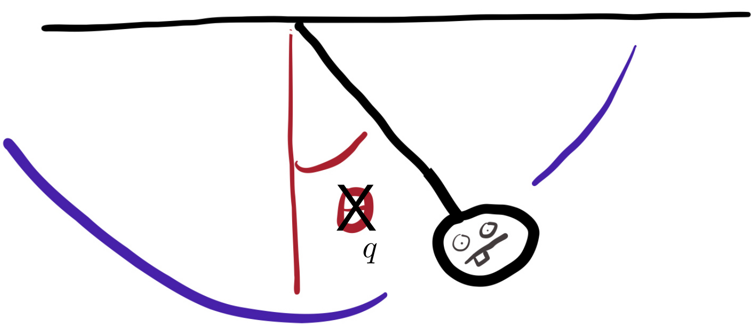
$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l}\sin q - ap|p| \end{aligned}$$

der a er en konstant som avhenger av l og formen på pendelen.

$\boxed{10}$ Løs numerisk med og uten luftmotstand, plott i samme figur, og uttal deg om energitapet. Sammenlikne eksplisitt og symplektisk euler.

$\boxed{11}$ Når farten blir lav nok, blir visst luftmotstanden lineær. Leder dette til raskere eller treigere energitap (enn kvadratisk) ved lave hastigheter?

$\boxed{12}$ I væske med turbulens går den visst som farten kubert. Kan du bruke alt dette til å gjette på hvorfor en bordtennisball går i kurvet bane når den skrur? (Hint: begynn med å google hva som skaper løftet over en flyvinge.)



[9] Dette skyldes antagelig at p vanligvis betyr moment, og at q er bokstaven før p i alfabetet.

UKENS MORO

En reell spole har både motstand og kapasitans, i tillegg til induktans. Motstanden er blant annet avhengig spolens fysiske dimensjoner, for eksempel lengden på lederen er som spolen er laget av.

$\boxed{7793}$ Lederen i en spole er parametrisert av

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 20\pi$$

Finn spolens totale lengde.

$\boxed{7937}$ Finn den totale motstanden i lederen som spolen er laget av, dersom det er en 12 AWG kobbertråd og lengden i forrige oppgave er i meter.[10]

Fresnelintegralene er definert ved

$$C(t) = \int_0^t \cos^2\left(s^2\right)\, ds$$

og

$$S(t) = \int_0^t \sin^2\left(s^2\right)\, ds$$

Disse dukker opp i forbindelse med elektromagnetisme eller optikk eller noe i den dur (jeg er ikke helt sikker, gi meg gjerne en lyd om du vet noe). Nå brukes de visst mest til å lage klotoider i rundkjøring og berg- og dalbaner og sånt, for den parametriserte kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

har voldsomt pen krumning. Kurven kalles Eulerkurven.

$\boxed{11939}$ Plot Eulerkurven i python. (Hvis du lurer på hvordan du skal evaluere integralene, kan du bruke en teknikk vi lærte i TMA4101. Sett inn taylorrekker for de trigonometriske rekkene og integrer ledd for ledd. Disse rekkene konvergerer bra fort, og python regner lett ut et par hundre ledd på en to tre.)

$\boxed{19391}$ Regn ut buelengden til Eulerkurven.

$\boxed{19937}$ Finn krumningen.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Et klassisk ikke-konservativt vektorfelt er

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$$

Det går an å vise at

$$\nabla\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

der θ er vinkelen $\mathbf{x}$ gjør med x_1-aksen. Vis dette.
(Hint: deriver polarkoordinatlikningene $x_1 = r\cos\theta$ og $x_2 = r\sin\theta$ med hensyn på både x_1 og x_2 og gauss i vei.

$\boxed{2}$ I en gravitasjonsoppgave over er det antatt at stjernen står i ro og at planeten beveger seg. I virkeligheten vil begge bevege seg. Dersom posisjonen til stjernen og planeten er henholdsvis $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$, får vi

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}$$
$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}$$

Løs numerisk. (Hvis du setter $m_1 >> m_2$ kan du få et realistisk scenario. Solen er omtrent 333000 ganger så tung som jorden.)

Fikk du til oppgaven over, har du sett at jorden, til tross for sin bitte lille masse, får solen til å vagge litt frem og tilbake under sin gang gjennom rommet. Det var visst slik de fant Neptun; det var noe feil med vaggingen til Uranus:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Neptune`

$\boxed{3}$ Superposisjonsprinsippet gjelder her, så dersom det er flere planeter, er det bare å legge sammen kreftene. Klarer du det?

Jeg skrev kraft som

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

over, men det er egentlig riktigere å skrive

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

altså en funksjon fra $\mathbb{R}^6$ til $\mathbb{R}^3$, for det er ikke uvanlig at kraft avhenger av farten til partikkelen. For eksempel har luftmotstand en tendens til å gå som kvadratet av farten.

$\boxed{4}$ En bil kjører starter med enhetsfart og kjører en runde rundt enhetssirkelen, i fri rulling slik at den eneste kraften i fartsretningen er luftmotstanden, som du kan anta er

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}) = -a\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 .$$

der $a > 0$ er en proporsjonalitetskonstant. Finn det totale arbeidet luftmotstanden gjør på hele runden.
(Her må du først løse en difflikning for farten, og så må du nok til med numerisk integrasjon.)

$\boxed{5}$ Vis at krumningsradien til en vektorfunksjon $\mathbf{x}$ kan skrives

$$R(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$

(Vanskelig.)

$\boxed{6}$ La oss spille litt mer golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er fremdeles kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden, men nå er luftmotstanden kvadratisk med banefarten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)`
Friksjonskraften bllir

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}) = -a\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\mathbf{T} = \dot{\mathbf{x}}\|\dot{\mathbf{x}}\|$$

slik at

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og estimer arbeidet luftmotstanden gjør på ballen under reisen.
(Hint: hvis du klarte begge golfoppgavene over, klarer du nok å oversette diracpulsen til initialverdier.)

$\boxed{7}$ Det kan være vind også. La oss gå videre til tre dimensjoner, og sette på den konstante vindretningen $\mathbf{y}$. Forklar at dersom $y_3 = 0$ (vind går som regel nogenlunde parallelt med bakken) blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_1(t) - y_1)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_2(t) - y_2)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| \\ m\ddot{x}_3(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_3(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}\| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og se hvor ballen lander for forskjellige vindretninger.