3 - 2 - KURVER

Denne skal vi snu opp ned på det og og studere funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$. Dette kalles vektorvaluerte funksjoner av én variabel. Du kan tenke på en slik funksjon som trajektorien til en flue som spaserer frem og tilbake over rullegardinen.

Denne uken leser vi kapittel 11 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

11.1: 1-20

11.3: 7-11

11.4: 1-4

11.5: 1-9

Her er noe gammelt skrot for dem som er interessert i slikt. Hilsen S. K. Rotnisse.

VISUALISERINGSTEKNIKKER

Vi skriver slike funksjoner som kolonnevektorer:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Finn en parametrisering for den rette linjen som ligger på både $x+2y+3z=6$ og $x+y+z=1$. (Hint: dette har du gjort i lineæralgebraen i forrige semester.)

Her kommer en annen viktig parametrisert kurve. Hvis du husker enhetssirkelen og tenker litt kreativt, går det nok bra. En ellipseliknings kanoniske form er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Det betyr at alle ellipser kan tilfredsstille en slik likning dersom man flytter sentrum til origo og legger halvaksene langs med koordinataksene.

$\boxed{3}$ Finn en parametrisering for en ellipse som tilfredsstiller likningen over.

$\boxed{5}$ En ellipsoide er gitt ved likningen

$$2x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Finn en parametrisering for skjæringskurven mellom ellipsoiden og xy-planet.

$\boxed{7}$ Finn parametrisering for skjæringskurven mellom flatene, og fortell studiekameraten din hva slags flater det er.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{11}$ Finn parametrisering for skjæringskurven mellom flatene. Hva slags flater er dette da?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

DERIVASJON

Fartsvektoren

Tangenten til vektorfunksjonen $\mathbf{x}(t)$ er

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at $\mathbf{x}$ er deriverbar. Definisjonen impliserer at dersom

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

er

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Her er noen regneregler:

Dersom $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og λ er deriverbare med hensyn på t, er

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{y}}(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\mathbf{x}(t)\right) &= \dot{\lambda}(t)\mathbf{x}(t) + \lambda(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t) \\
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{y}}(t) \\
\frac{d}{dt}\mathbf{x}(\lambda(t)) &= \dot{\lambda}(t)\dot{\mathbf{x}}\left(\lambda(t)\right)
\end{aligned}$$

Hvis man tenker at fluen har speedometer, er

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}$$

farten som vises på speedometeret ved tiden t. Dersom en parametrisering for kurven er gitt ved $\mathbf{x}$, er den deriverte $\dot{\mathbf{x}}$ en tangentvektor til kurven i punktet $\mathbf{x}(t)$. Enhetstangentvektoren er gitt ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|}$$

$\boxed{13}$ Dersom du ikke synes at det er innlysende at enhetstangentvektoren har lengde en, kan du dobbeltsjekke det.

$\boxed{17}$ Vis at $\dot{\mathbf{T}}$ står normalt på $\mathbf{T}$.
(Hint: deriver likningen $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.)

I lys av oppgaven over, definerer vi enhetsnormalvektoren

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}$$

Parametriseringen for en ellipse med halvakser a og b og sentrert i origo er

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}$$

der $0 \leq t < 2\pi$. Finn et uttrykk for

$\boxed{31}$ enhetstangentvektoren.

$\boxed{37}$ normalvektoren.

$\boxed{71}$ krumningen.
(Hvis du orker. Det blir litt regning.)

I matematikk er ordet regularitet brukt om veldig mange forskjellige ting. Den betydningen vi skal konsentrere oss om er den relatert til spørsmål om glattheten til en funksjon.

Dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved $y = f(x)$, sier vi at f er kontinuerlig i x dersom

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

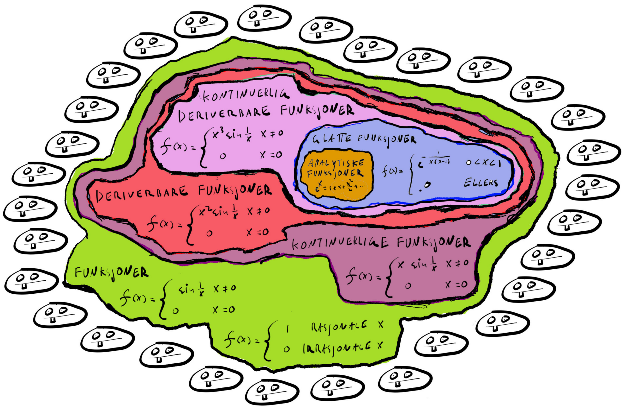
deriverbar i x om

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer, og kontinuerlig deriverbar om f' er en kontinuerlig funksjon. Dersom den n-te deriverte er en kontinuerlig funksjon, sier vi at f er n ganger kontinuerlig deriverbar, og dersom alle fs deriverte er kontinuerlige, sier vi at f er glatt. Dersom f er glatt og i tillegg

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(s)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

sier vi at f er analytisk.



For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ blir ordet glatt brukt i en litt annen betydning.

$\boxed{73}$ Tegn funksjonen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

i python eller noe annet.

Eksemplet over er jo litt rart. Komponentfunksjonene t^2 og t^3 er glatte, men kurven har allikevel en spiss i origo.

$\boxed{79}$ Hva skjer?

Det som skjer er at tangentvektoren forsvinner for $t = 0$, og da kan alt skje.

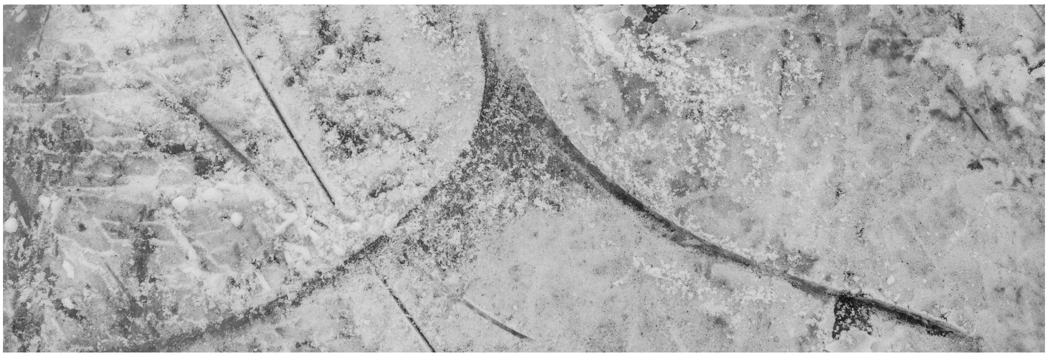
$\boxed{97}$ La $\mathbf{x}$ være som over, og vis at

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbf{T}(t) \neq \lim_{t\to 0^-} \mathbf{T}(t)$$

Derfor:
Vi sier at en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ er glatt i t dersom enhetstangentvektoren eksisterer og dreier på et kontinuerlig vis etterhvert som vi beveger oss langs med kurven. En tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for dette er at komponentfunksjonene er deriverbare og $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$.

$\boxed{113}$ Hva med denne?

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^6 \end{bmatrix}$$



Vi kan også parametrizere kurver i det komplekse planet.

$\boxed{131}$ Finn en parametrisering for enhetssirkelen i det komplekse planet.

$\boxed{197}$ Finn en parametrisering for en sirkel med radius 2 og sentrum i $1 + i$.

Ukens nøtter

$\boxed{971}$ Du går på elliptisk skitur på fjellet $h(x,y) = 1 - x^2 - xy - y^2$, langs trajektorien gitt ved ellipsen med likning

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Finn turens høyeste punkt.

$\boxed{991}$ En ellipse med halvakser rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene tilfredsstiller likningen

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1.$$

Vis at kurven parametrisert ved

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \cos(t+\phi))$$

ligger på en slik ellipse.

$\boxed{1193}$ Har kurven gitt ved

$$x(t) = 4t^3, \qquad y(t) = 3t - \sin(3t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

en veldefinert tangent i origo?

$\boxed{\text{RIP NIDAROS}}$ Det finnes alltid mange parametriseringer for en og samme kurve. Hva slags kurve blir dette:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R} \quad ?$$

Dersom du på et eller annet tidspunkt ønsker å forstå hvorfor initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

har en og bare løsning (dette er litt komplisert), kan det være lurt å gjøre følgende oppgave.

$\boxed{3119}$ La oss anta at vi har to funksjoner

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

der $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er egenverdiene til en matrise, med korresponderende egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

a) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

b) Vis at $\mathbf{x}_1(t)$ og $\mathbf{x}_2(t)$ er lineært uavhengige for alle t.

c) Er $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ lineært uavhengige?

$\boxed{3779}$ Vis at krumningsradien til en vektorfunksjon $\mathbf{x}$ kan skrives

$$R(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$