

3 - 13 - HVA KOMMER PÅ EKSAMEN?

3 - OPTIMERING

1 Utled uttrykket for det lineære regresjonspolynomet ved minste kvadrats metode.

Løsning:

La oss anta at du har en forklaringsvariabel x og responsvariabel y , og et datasett med masse par (x_k, y_k) . Å finne en kurve som "passer til" datasettet kan gjøres på mange måter, men det alle lærer først er å finne det lineære regresjonspolynomet ved minste kvadrats metode. Dette gjøres ved å ta summen av de kvadrerte avstandene mellom en rett linje $y = ax + b$ og datasettets responsvariabel:

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$$

og så finne a og b som minimerer denne. Siden f åpenbart er en positiv annengradsfunksjon, har vi god tro på at et eventuelt kritisk punkt må være et minimum dersom det er entydig.¹

Vi partiellderiverer med hensyn på a og b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k) x_k & \frac{\partial f}{\partial b} &= 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k) \\ &= 2(a|\mathbf{x}|^2 + bn\bar{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) & &= 2(an\bar{x} + bn - n\bar{y}) \end{aligned}$$

Setter vi disse lik null, får vi det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} a|\mathbf{x}|^2 + bn\bar{x} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ a\bar{x} + b &= \bar{y} \end{aligned}$$

som har løsning (gauss i vei)

$$a = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - n\bar{x}\bar{y}}{|\mathbf{x}|^2 - n(\bar{x})^2}$$

og

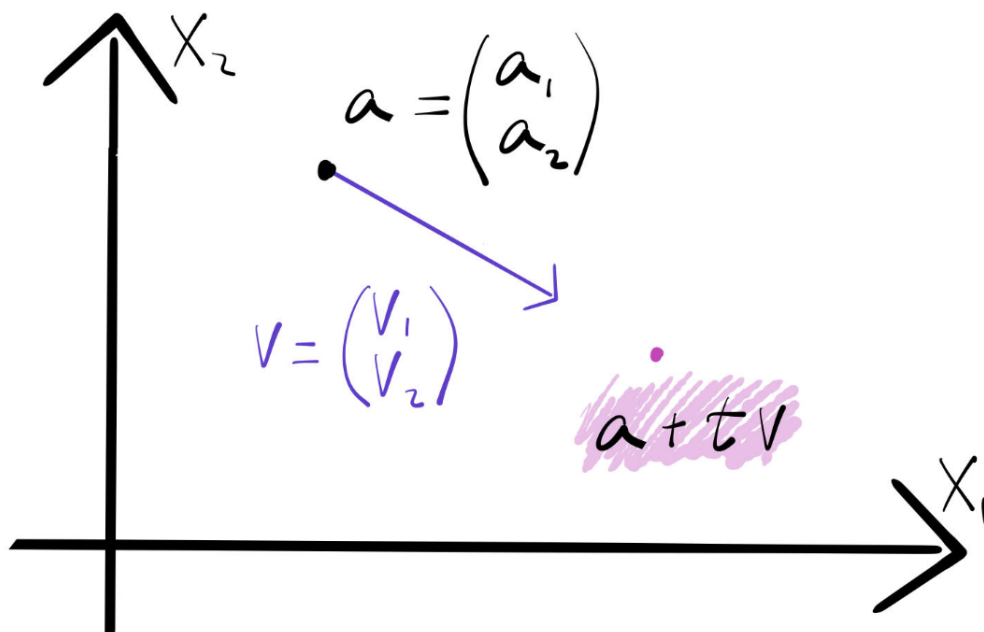
$$b = \bar{y} - \bar{x} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - n\bar{x}\bar{y}}{|\mathbf{x}|^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{\bar{y}|\mathbf{x}|^2 - \bar{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|^2 - n(\bar{x})^2}.$$

¹Et bunnpunkt trenger ikke være entydig, bare se for eksempel på $f(x, y) = x^2$.

- 2] Forklar hvordan egenverdiene til hessematrisen kan fortelle deg om et kritisk punkt er et maksimums-, minimums- eller sadelpunkt.

Løsning:

La \mathbf{a} være et av f sine kritiske punkt, og betrakt følgende figur:



Vi tar nå en motorsag og snitter flaten til $f(\mathbf{x})$ langs den parametriserte linjen $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$, og så taylor-utvikler vi motorsagsnittfunksjonen $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ om $t = 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \dots \\ &= f(\mathbf{a}) + (f'(\mathbf{a})\mathbf{v})t + (\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a})\mathbf{v})\frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Her er f' gradienten

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]$$

og f'' hessematrisen

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

til f .

Merk hvordan gradienten f' er en radvektor og \mathbf{v} er en søylevektor, slik at $g'(0) = f'(\mathbf{a})\mathbf{v}$ blir et skalarprodukt. Likeledes med den kvadratiske formen $g''(0) = \mathbf{v}^T f''(\mathbf{a})\mathbf{v}$, se diagonaliseringsøkten i TMA4106. Å utlede uttrykkene for $g'(0)$ og $g''(0)$ ganske trivielt DERSOM man kan kjerneregelen, og antagelig umulig å forstå dersom man ikke kan kjerneregelen. Kjerneregelen i flere dimensjoner er ikke så vanskelig hvis man kan matriseregning, og den kommer hvert øyeblikk, så hold ut inntil videre.

Siden $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ dersom \mathbf{a} er et kritisk punkt, blir Taylorutviklingen

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v}) \frac{t^2}{2} + \dots$$

Dersom t er bitteliten og f oppfører seg bra nok til at $(\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v}) \frac{t^2}{2}$ fullstendig dominerer alle leddene som kommer etter, kan vi nå konkludere med følgende tabell. La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $f''(\mathbf{a})$.

- Dersom λ_1 og λ_2 er positive, er \mathbf{a} et bunnpunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 er negative, er \mathbf{a} et toppunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 har forskjellig fortegn, er \mathbf{a} et sadelpunkt.
- Dersom en av dem er null, gir testen ingen konklusjon.

Hvordan kan vi være så freidige? Siden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

for alle funksjoner du kommer til å plages med² er $f''(\mathbf{a})$ symmetrisk, og følgelig ortogonalt diagonaliserbar. La \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 være ortogonale egenvektorer til $f''(\mathbf{a})$. Disse utgjør en basis for \mathbb{R}^2 , så vi kan alltid skrive

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$$

og regne ut den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)^T f''(\mathbf{a}) (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2) \\ &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)^T (\lambda_1 c_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 c_2 \mathbf{u}_2) \\ &= \lambda_1 c_1^2 |\mathbf{u}_1|^2 + \lambda_2 c_2^2 |\mathbf{u}_2|^2 \end{aligned}$$

Dette uttrykket er helt klart positivt for alle \mathbf{v} i det første tilfellet, og konklusjonen følger siden vi følgelig alltid legger noe til $f(\mathbf{a})$ i nærheten av \mathbf{a} når vi beveger oss bittelitt vekk fra \mathbf{a} . Samme resonnement dersom egenverdiene er negative. Dersom egenverdiene har forskjellig fortegn, kan vi bruke samme resonnement på $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ og $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ og konkludere med at det finnes en retning der vi går nedover og en retning der vi går oppover, slik at \mathbf{a} er en sadel. Hvis en av egenverdiene er null, finnes det en retning der $\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} = 0$, og i så fall trenger vi flere ledd i Taylorrekken for å konkludere. Hvis begge egenverdier er null, er f et lineært polynom, og da gir det ikke mening å lete etter maks- eller minimumspunkter.

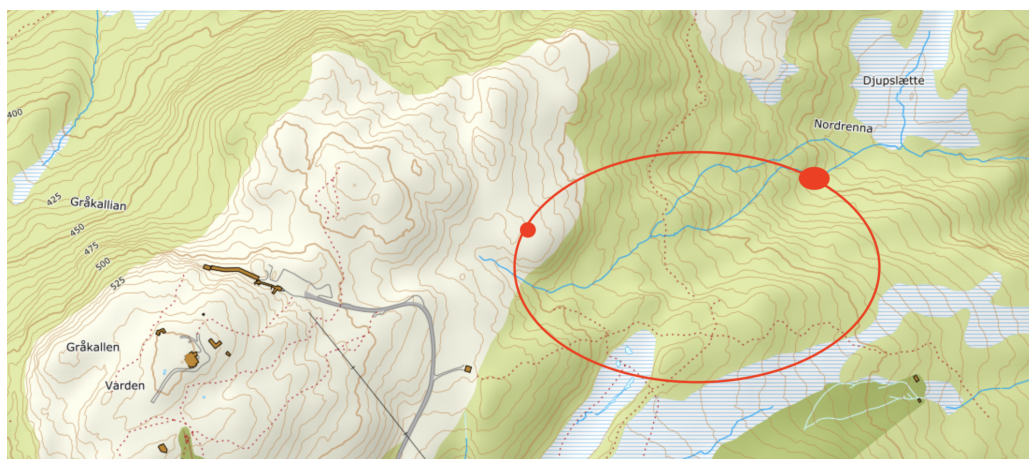
Dersom alle egenverdier er positive, sier vi ellers at matrisen er positivt definit. Tilsvarende for negative egenverdier.

²Det finnes patologiske unntak, slik som for eksempel $\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, der de blandede andreordens partiellderiverte ikke er like, men disse er konstruert av matematikere for å krangle med folk som er uforsiktige nok til å påstå at de blandede andreordens partiellderiverte alltid er like.

- 3 Forklar ideen bak Lagranges multiplikator metode og finn den største og minste verdien til $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ på kvadratet gitt ved ulikhetene $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$. (Husk å sjekke både det indre av kvadratet og randen.)

Løsning:

Lagranges multiplikator metode er basert på en ide som er veldig enkel å forstå om man har det klart for seg hvordan gradienten til en funksjon skal tolkes geometrisk. Den er også til god hjelp dersom man ønsker en enkel huskeregel nettopp for å huske gradientens geometriske tolkning. Hvis jeg sier at man går en tur på den elliptiske kurven i figuren under, klarer de aller fleste uten å tenke seg om merke av turens høyeste og laveste punkt:



Nå gjelder å tenke på f (altså den funksjonen du skal maksimere eller minimere) som en funksjon som beskriver fjellet du går på. Nivåkurvene til f er det som er printa som ekvidistanselinjene på et vanlig turkart. Den snedige ideen til lagrange var å se på turtrajektorien som nivåkurven til en eller annen annen funksjon g , og så innse at i f sine topp-, bunn- eller sadelpunkter **må gradienten til f være parallell med gradienten til g , siden gradienter og nivåkurver står normalt på hverandre.**



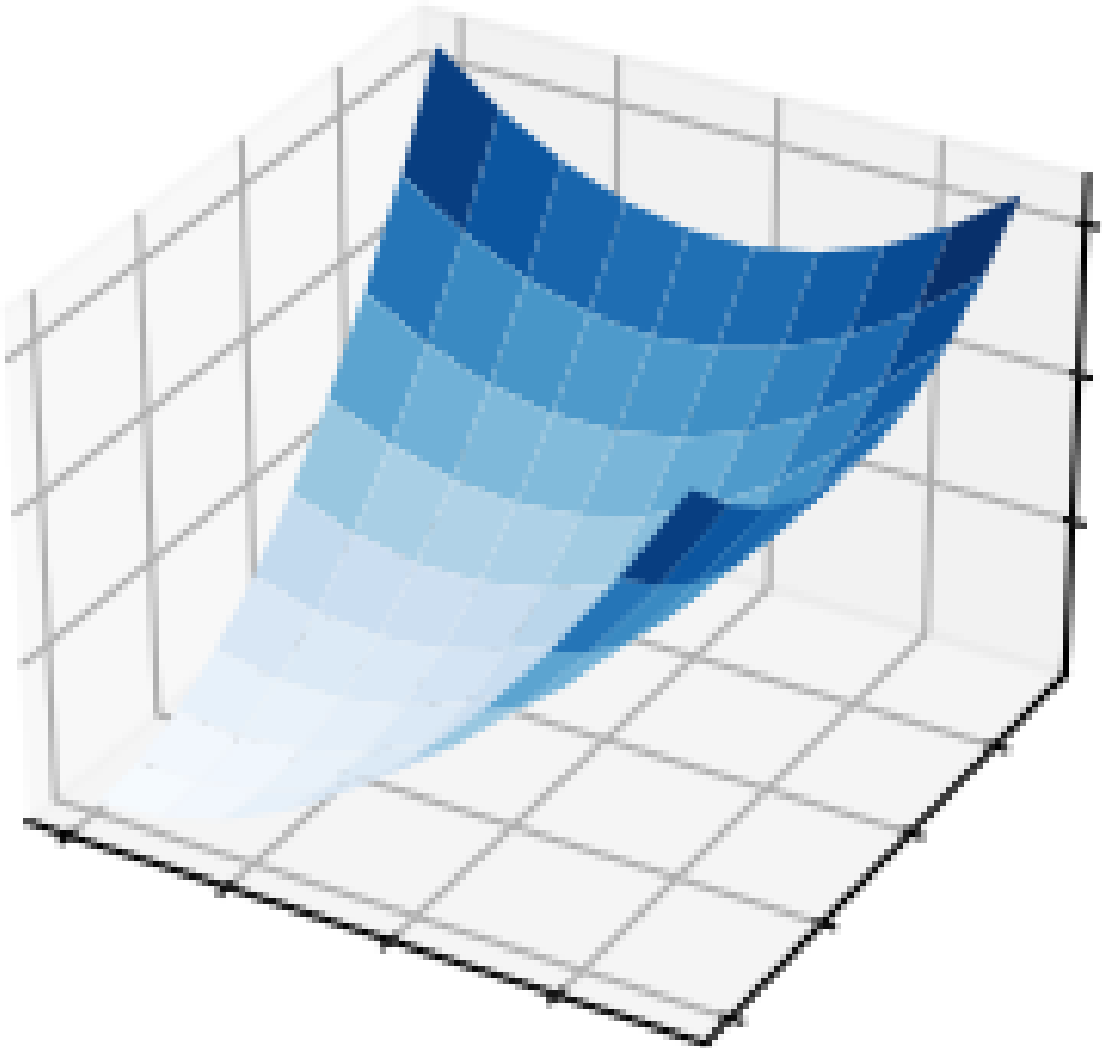
Denne ideen gir tre likninger

$$\begin{aligned}\lambda \nabla f &= \nabla g \\ g(x, y) &= c\end{aligned}$$

som kan løses for x , y og λ . Det er litt forskjellige betingelser ute og går; f og g må være deriver-

bare, og gradientene kan ikke være null, og du må ikke være i endepunktet for trajektorien og litt forskjellig.

La oss begynne med et plott av funksjonen, bare for å illustrere hvor lett det er å finne maksimum og minimum om man har tilgang på dette. Det er helt innlysende at minimum er i origo og maksimum i et av de andre hjørnene.



Men nå skal vi altså regne på det; la oss late som om vi sitter på eksamen og ikke har plotteverktøy. Først må vi lete etter eventuelle kritiske punkt. Gradienten til funksjonen er

$$f'(x_1, x_2) = (2x - y, -x + 2y)$$

og setter vi denne lik null, får vi likningssystemet

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0\end{aligned}$$

som helt klart har entydig løsning $x = y = 0$. Vi legger oss på minne at det kritiske punktet tilfeldigvis ligger på randen av området.

La oss sjekke randen. Den består av fire rette linjestykker. Det linjestykker som ligger på x -aksen kan vi tenke på som nivåkurven $g(x, y) = y = 0$, slik at lagrange gir likningssettet

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= \lambda \\ y &= 0\end{aligned}$$

Likning nummer en og tre impliserer at $x = y = 0$, og dette er endepunktet på kurven samt det kritiske punktet til f . Neste kurve på listen er $g(x, y) = x = 0$, som gir nøyaktig samme konklusjon. Så tar vi $g(x, y) = y = 1$, som gir likningssystemet

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= \lambda \\ y &= 1\end{aligned}$$

som gir oss punktet $x = 1/2, y = 1$ (verdien til λ er ikke viktig). Samme analyse av $g(x, y) = x = 1$ gir punktet $x = 1, y = 1/2$.

Det er også viktig å sjekke knekkpunktene til randkurven til området (se figuren over), som i dette tilfellet sitter i origo, $(0, 1)$, $(1, 0)$, og $(1, 1)$. Alt i alt har vi seks punkter å sjekke:

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 0 \\ f(1, 0) &= 1 \\ f(0, 1) &= 1 \\ f(1, 1) &= 1 \\ f(1/2, 1) &= 3/4 \\ f(1, 1/2) &= 3/4\end{aligned}$$

Den minste verdien er altså 0, mens den største er 1.

5 - LINJEINTEGRALER

1 Forklar at integralet

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

er buelengden til kurven Γ , og at

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

er arealet til en vegg der Γ er veggen slik den er tegnet i arealtegningen og f er takhøyden. Forklar hvorfor

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt$$

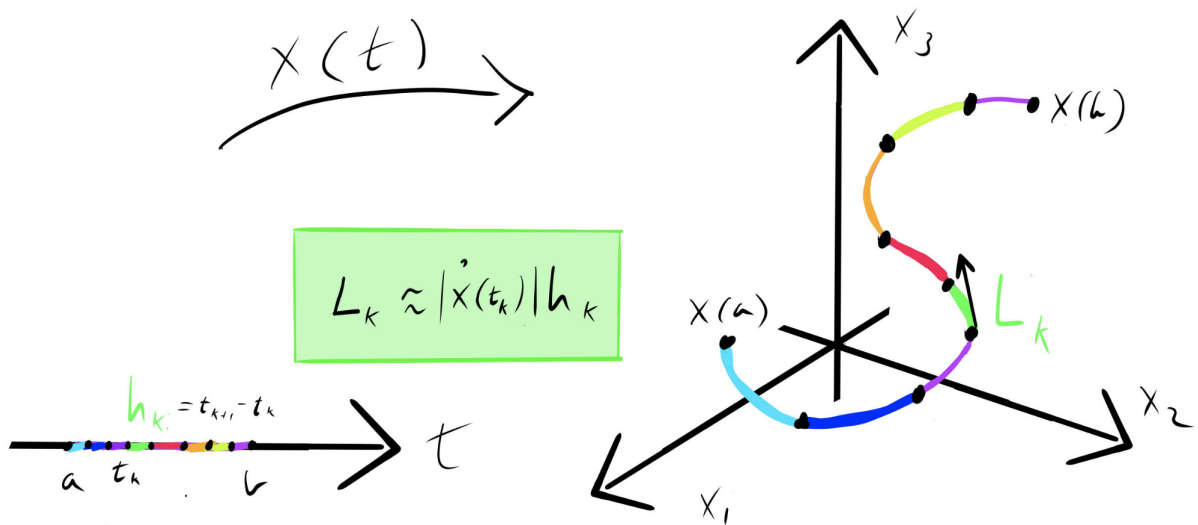
er arbeidet kraftfeltet \mathbf{F} gjør på en partikkel som reiser langs Γ .

Løsning:

Formelen

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt$$

er en definisjon, og den kan motiveres på flere måter. Steg én er å ta en titt på denne figuren:



Her er intervallet $[a, b]$ på t -aksen partisjonert i n korte linjestykker med lengde h_k . De korrespondende krumme lengdene i x -koordinatsystemet heter L_k , se fargekodene. Buelengden er

$$\sum_{k=0}^n L_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\dot{\mathbf{x}}(t_k)| h_k,$$

og vi har god tro på at uttrykket på høyre side blir en bedre approksimasjon etter hvert som partisjonen gjøres finere. Men uttrykket til høyre er en venstre riemannsum for funksjonen $|\dot{\mathbf{x}}(t)|$, så når partisjonen blir finere, går denne summen mot

$$\int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

Den store bøygen er å forstå dette. For å forstå linjeintegral over skalarfelt fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R} , bør man tenke at at f er takhøyden og at Γ er veggen slik den er tegnet i arealtegningen til huset. Hvis man approksimerer arealet av veggen som en sum av plane flater med areal $f(\mathbf{x}(t)) |\dot{\mathbf{x}}(t_k)| h_k$, får vi

$$\text{areal} \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{x}(t)) |\dot{\mathbf{x}}(t_k)| h_k$$

som er en venstre riemannsum til integralet

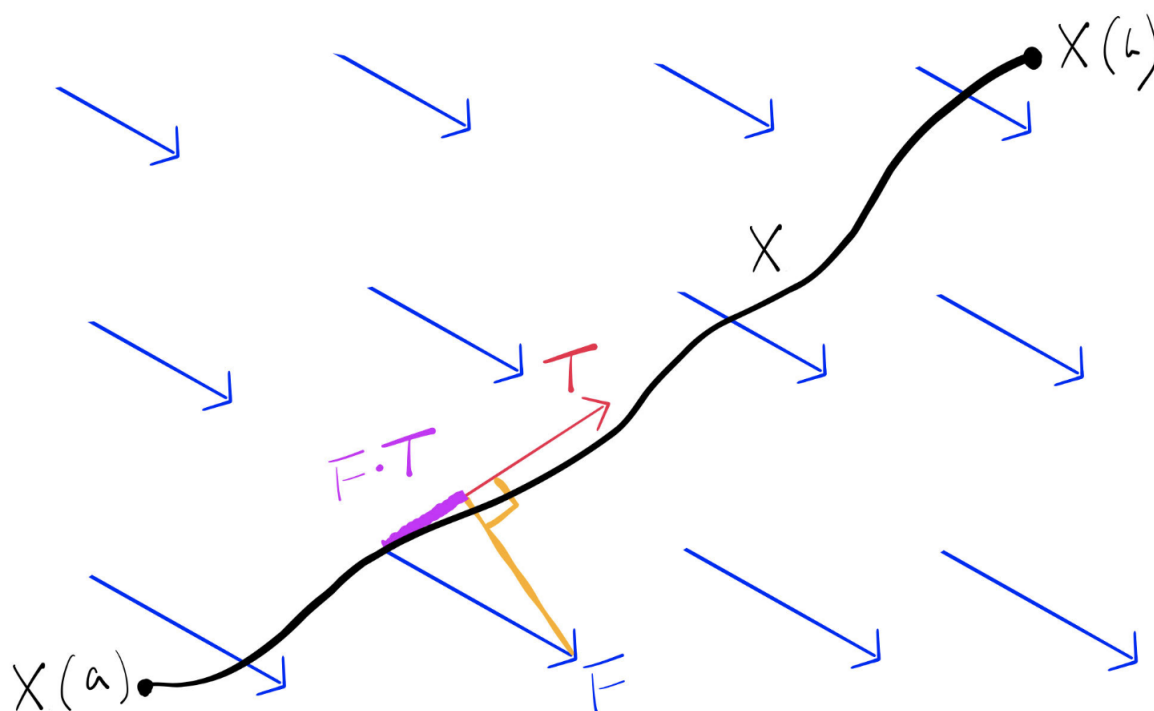
$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

Dersom du har et kraftfelt \mathbf{F} som gjør et arbeid på en partikkel som reiser langs trajektorien parametrisert ved $\mathbf{x}(t)$, er det kun den tangentielle komponenten

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}$$

til kraftfeltet som faktisk gjør arbeid. Derfor finner vi totalarbeidet på partikkelen ved å stappe tangentialkomponenten inn i formelen for linjeintegral:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt$$



2] Regn ut

$$\int_{\Gamma} z^n dz$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, der Γ er enhetssirkelen i det komplekse planet.

Løsning:

Det første vi må gjøre, er å ha en parametrisering for enhetssirkelen i det komplekse planet:

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \quad z'(\theta) = ie^{i\theta}.$$

Så er det bare å integrere:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

3] La u og v være henholdsvis real- og imaginærdelen til en kompleks analytisk funksjon. Utled Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

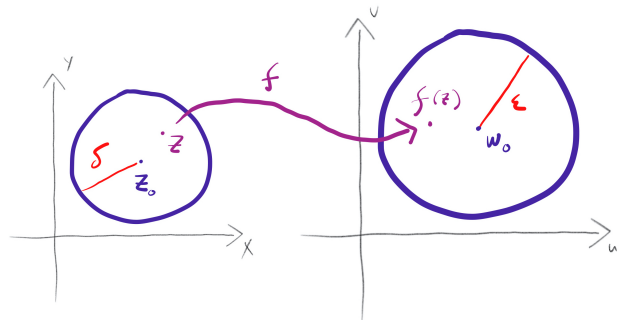
Løsning:

Vi sier at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon.$$



Vi sier at f er **deriverbar** i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På noen måter fungerer denne definisjonen akkurat som den du er vant til fra envariabel kalkulus; for eksempel er $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$ og $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$ og så videre. Men det er noen ting som er helt annerledes, siden det komplekse tallet h må få kunne reise inn mot z på vilkårlig vis.

La h reise mot $z = x + yi$ langs $h(t) = t$ (der $t \in \mathbb{R}$), altså en rett linje parallell med realaksen. Vi beregner

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

vi gjenta så eksperimentet med den rette linjen $h(t) = it$, slik at vi reiser inn i z parallelt med imaginæraksen.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) + iv(x, y+t) - u(x, y) - iv(x, y)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{iv(x, y+t) - iv(x, y)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

De to uttrykkene for f' må være identiske hvis $f'(z)$ skal eksistere, og da må real- og imaginærdelene være like. Dette kalles Cauchy-Riemann-likningene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dersom vi deriverer den første likningen med hensyn på x og den andre likningen med hensyn på y og antar at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

(dette er sant, men litt for hardt for oss å bevise), får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Likeledes får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

ved å derivere C-R-likningene henholdsvis med hensyn y og x og anta likhet mellom de blandede dobbelderiverte til u (som nok en gang er sant, men for vanskelig for oss å bevise).

6 - DOBBELTINTEGRAL

1 Regn ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Løsning: En klassiker! Siden

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi, \end{aligned}$$

må

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

7 - FLATE- OG FLUKSINTEGRALER

1 En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

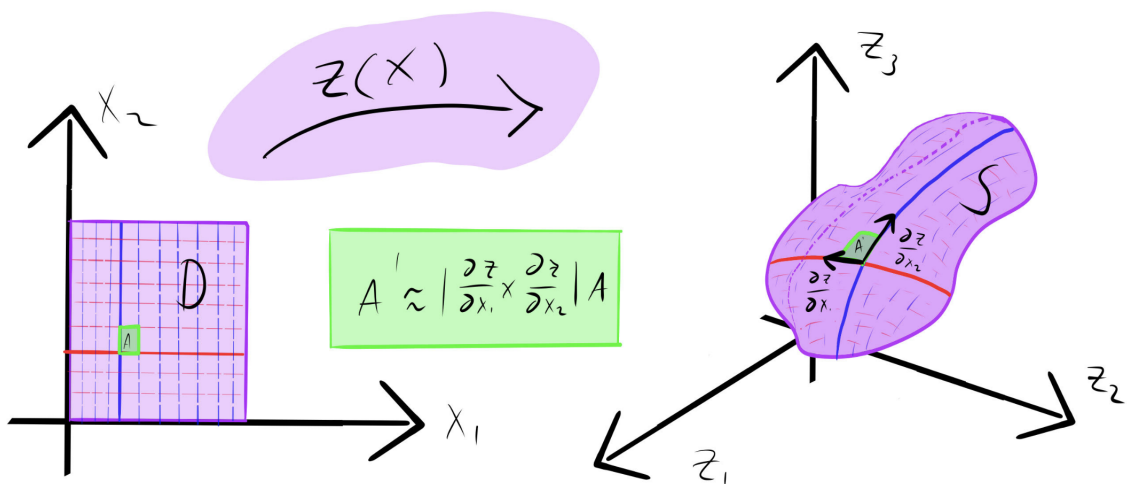
$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

der $D \subset \mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Vis at overflatearealet til en kule med radius R er $A = 4\pi R^2$.

Løsning: La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i D . Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene i D blir kurver som ligger på flaten \mathcal{S} i figuren til høyre, og at tangentsvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$.

Det neste man må forstå er at hvert av de små rektanglene i D blir en liten bit av \mathcal{S} gjennom transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Disse små bitene av \mathcal{S} er ikke parallellogrammer, men om inndelingen av D i rektangler er fin nok, vil

$$A' \approx A \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|$$

være en god approksimasjon av arealet A' til flatebiten på \mathcal{S} gitt arealet A til den korresponderende rektangelbiten i D . Dersom vi ønsker å finne arealet til flaten \mathcal{S} , må vi altså summere opp alle disse små arealene:

$$\text{arealet til } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} ds = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Dersom vi ønsker å finne den totale massen til en flate hvis massetetthet (i masse per areal) er $f(\mathbf{z})$, må vi summere opp massen til hver av de små flatebitene:

$$\iint_{\mathcal{S}} f ds = \iint_D f(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Merk at koordinattransformasjonsformelen

$$\iint_S f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \iint_D f(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}$$

for dobbeltintegraler er et spesialtilfelle av formelen. (Bare sett $z_3 = 0$, så ser du det.)

Parametriseringen til et kuleskall med radius R er

$$\mathbf{z}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \phi \end{pmatrix}$$

slik at flatelementet blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \right| = \left| R^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right| = R^2 \sin \phi.$$

(Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra.) Nå er det bare å integrere:

$$\iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \phi \, d\theta d\phi = 4\pi R^2.$$

2] La flaten \mathcal{S} være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at en enhetsnormalvektor til flaten er gitt ved

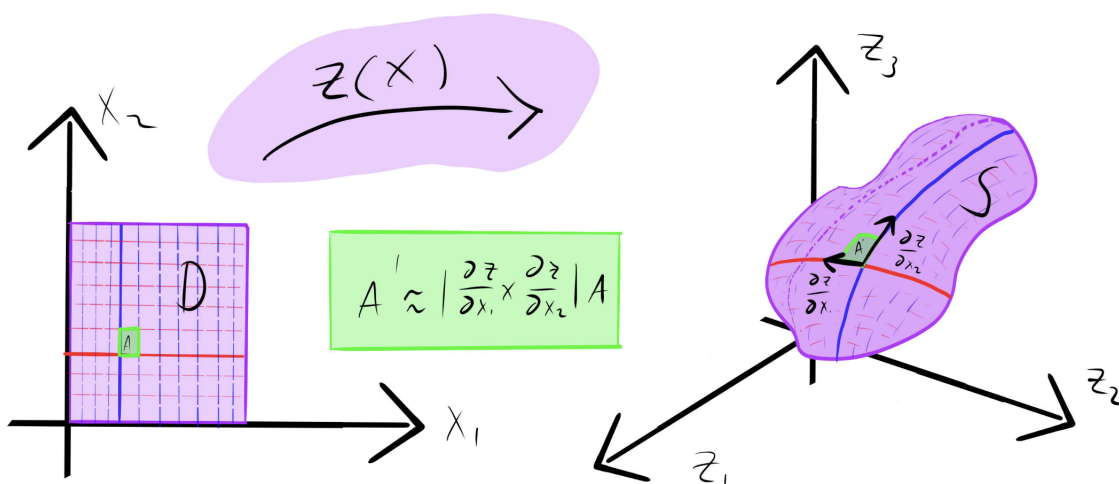
$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

og at den totale fluksen til $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gjennom flaten \mathcal{S} er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}.$$

Regn ut den totale elektriske fluksen til en punktladning q plassert i origo gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R .

Løsning: La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i D . Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene i D blir kurver som ligger på flaten \mathcal{S} i figuren til høyre, og at tangentvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Det følger da at vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}$$

står normalt på flaten, og følgelig at

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

er en enhetsnormalvektor til flaten. Vi må selvfølgelig anta at ingen av de partiellderiverte er null. Rekkefølgen (altså fortegnet) på kryssproduktet avgjør om normalvektoren peker den ene eller den andre veien ut av flaten.

Dersom vi har et vektorfelt $\mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x}))$, er det dette vektorfeltets komponent normalt på flaten som forteller oss noe om hvor mye av vektorfeltet som strømmer gjennom flaten i hvert punkt. For å finne

den totale strømmen gjennom flaten, må vi flateintegreere denne normalkomponenten:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D F(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x} \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

og parametriseringen til et kuleskall med radius R er

$$\mathbf{z}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \phi \end{pmatrix}$$

slik at utnormalvektoren blir (merk rekkefølgen på faktoren slik at vi får ut- og ikke inn-normalvektor)

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} = R^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Så beregner vi

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}(\theta, \phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Til slutt er det bare å integrere:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \left(R^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right) d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \phi + \sin^2 \theta \sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$

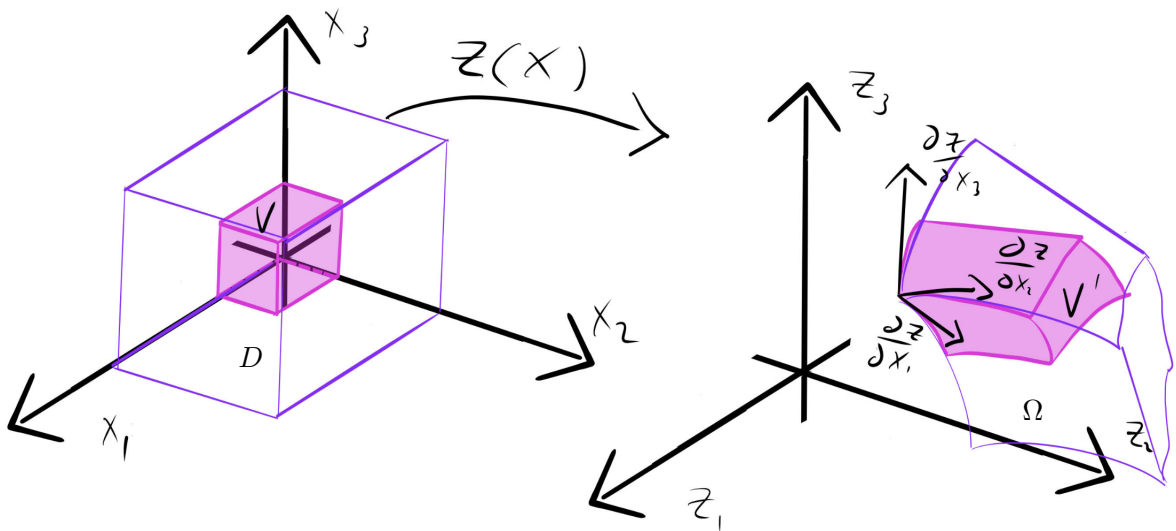
8 - TRIPPELINTEGRALER

- 1] La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \rightarrow \mathbf{R}^3$, der $D \subset \mathbf{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom \mathbf{z} . Forklar at volumet til Ω er

$$\iiint_{\Omega} dz = \iiint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| dx.$$

Vis at volumet til en kule med radius R er $\frac{4\pi}{3}R^3$ og finn massesenteret til en halvkule med konstant massetetthet.

Løsning: La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i området D i figuren til venstre. Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene til venstre blir kurver som sitter i volumet Ω i figuren til høyre, og at tangentvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$.

Det neste man må forstå er at små rektangulære kuber D blir små biter av Ω til høyre gjennom transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Disse små bitene i Ω er ikke parallellogrammer, men om inndelingen i rektangler i D er fin nok, vil

$$V' \approx V \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right|$$

være en god approksimasjon av volumet V' til biten av Ω gitt volumet V til den korresponderende rektangulære biten i D . Dersom vi ønsker å finne volumet til Ω , må vi altså summere opp alle disse små volumene:

$$\text{volumet til } \Omega = \iiint_{\Omega} dz = \iiint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| dx$$

Kulekoordinater er gitt ved

$$\mathbf{z}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

slik at flatelementet blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \left(r^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right) \right| = r^2 \sin \phi.$$

(Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra.) Nå er det bare å integrere:

$$\iiint_{\Omega} d\mathbf{z} = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi \, d\theta d\phi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Hvis du tenker på integranden som massetetthet (kilo/kubikkmeter) og Ω som en klump med masse, er trippelintegralet f over Ω den totale massen til klumpen. Massesenteret $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ er gitt ved

$$m_1 = \frac{\iiint_{\Omega} z_1 f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}, \quad m_2 = \frac{\iiint_{\Omega} z_2 f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}, \quad m_3 = \frac{\iiint_{\Omega} z_3 f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}{\iiint_{\Omega} f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}.$$

Hvis vi legger halvkulen slik at den flate siden hviler på $x_1 x_2$ -planet, ser vi av symmetri at massesenteret må ligge et sted på x_3 -aksen. Halvkulen i kulekoordinater vil følgelig beskrives av ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq \phi \leq \pi/2 \end{aligned}$$

Vi vet også at massetettheten f er konstant, så denne kansellerer i uttrykkene for massesenter. Vi beregner derfor

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z_3 \, d\mathbf{z} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \phi \sin \phi \, d\phi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\phi \, d\phi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \, d\theta dr \\ &= \pi \int_0^R r^3 \, dr = \pi \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

Volumet til en halvkule er $2\pi R^3/3$, så vi kan nå beregne

$$m_3 = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3R}{8}$$

slik at massesenteret sitter i $(0, 0, 3R/8)$

9 - VEKTORKALKULUS

1] Forklar hva divergensen til et vektorfelt er og hva divergensteoremet sier.

Løsning: Her er det enkleste å begynne med å skrive opp divergensteoremet. La Ω være et område i \mathbb{R}^3 , med glatt rand, og la \mathbf{F} være et glatt vektorfelt. Da er

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

der fluksen på høyre side går ut av $\partial\Omega$. Dette er en generalisering av analysens fundamentalteorem. Beviset er litt omstendelig og tar mer tid enn det som er vettugt å sette av i dette kurset.

Formelen gir oss en fysisk tolkning av $\nabla \cdot \mathbf{F}$. Vi vet at integralet på høyre side er fluksen til \mathbf{F} ut av $\partial\Omega$, og hvis vi lar Ω skrumpe inn til et punkt, ser vi at $\nabla \cdot \mathbf{F}$ representere kan tolkes som ekspansjonen til \mathbf{F} i hvert punkt.

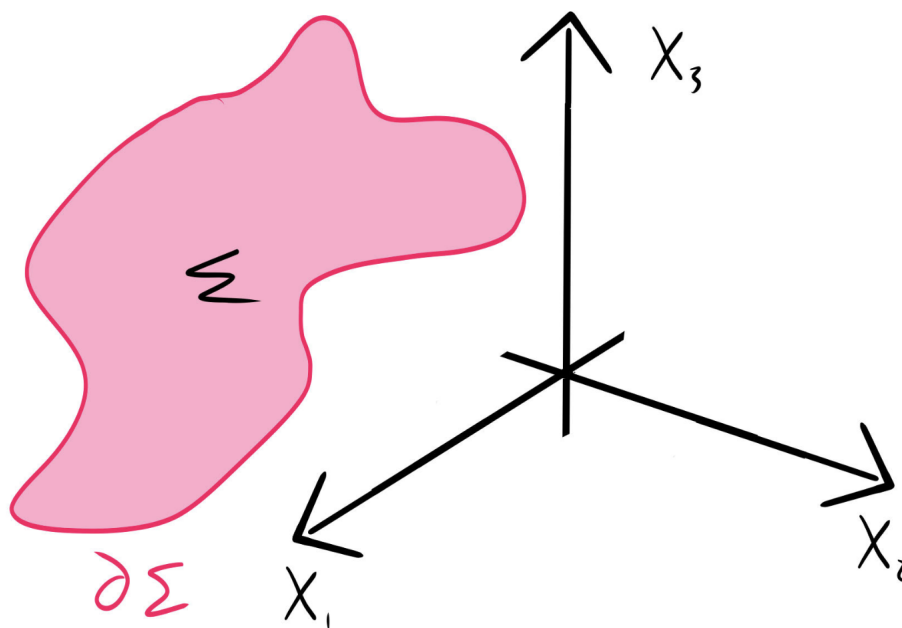
2] Forklar hva rotasjonen til et vektorfelt er og hva Stokes' teorem sier.

Løsning: Her er det enkleste å begynne med å skrive opp Stokes' teorem. La Σ være en flate i \mathbb{R}^3 med glatt rand, og la \mathbf{F} være et glatt vektorfelt. Da er

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

der linjeintegralet på høyre side går mot klokken sett fra den retningen normalvektoren i fluksintegralet på høyre side peker. Dette er også en generalisering av analysens fundamentalteorem, med et bevis som er for omstendelig for dette kurset.

Formelen gir oss en fysisk tolkning av rotasjonen $\nabla \times \mathbf{F}$. Vi vet at integralet på høyre side er arbeidet vektorfeltet \mathbf{F} på en partikkel som reiser en runde langs $\partial\Sigma$, og hvis vi lar Σ skrumpe inn til et punkt, ser vi at $\nabla \times \mathbf{F}$ kan tolkes som hvor mye \mathbf{F} roterer i hvert punkt. Et annet navn på rotasjon er "sirkulasjonstetthet". Under er et patetisk forsøk på å tegne Σ og $\partial\Sigma$.



- 3 Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled de korresponderende likningene på integralform.

Maxwells likninger på differensialform er:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

De to første kan vi trippelintegre over området $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x}$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = 0$$

og massere med divergensteoremet på venstre side:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x}$$

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

De to siste kan vi fluksintegre over flaten $\Sigma \in \mathbb{R}^3$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

og massere med Stokes' teorem på venstre side:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

4 Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

Transport av varmeenergi er for mange materialer proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kalles Fouriers lov, og skrives

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

der κ er den termiske konduktiviteten, og \mathbf{q} er varmeflukstettheten, målt i watt per kvadratmeter. Endringen i varmeenergi i Ω skyldes enten varme som produseres inne i Ω (tenk at det står et stearinlys og brenner inne i Ω), eller varme som slipper inn og ut gjennom randen $\partial\Omega$.

La oss tenke at temperaturen er gitt ved funksjonen $T(\mathbf{x}, t)$, der \mathbf{x} er de romlige koordinatene og t er tidspunktet. La Ω være et område i \mathbb{R}^3 . Tidsendringen i varmeenergien i Ω er

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c \iiint_{\Omega} T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) = \rho c \iiint_{\Omega} T_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

der massetettheten ρ og den spesifikke varmekapasiteten c er antatt konstante. Det er også antatt at T er glatt nok til at vi bare kan slenge tidsderivasjonen inn under integraltegnet. Dersom vi antar at κ er konstant og at det ikke produseres varme i Ω , må

$$\begin{aligned} -\rho c \iiint_{\Omega} T_t d\mathbf{x} &= \iint_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\mathbf{x} \\ &= -\kappa \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla T d\mathbf{x} = -\kappa \iiint_{\Omega} \Delta T d\mathbf{x} \end{aligned}$$

eller

$$\rho c \iiint_{\Omega} T_t d\mathbf{x} = \kappa \iiint_{\Omega} \Delta T d\mathbf{x}.$$

Dersom dette gjelder for et tilfeldig valgt område Ω , bør integrandene være like:

$$\rho c u_t = \kappa \Delta u$$

og det er vanlig å samle den spesifikke varmekapasiteten, massetettheten og den termiske konduktiviteten i en konstant

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$$

som kalles den termiske diffusiviteten. Likningen

$$T_t = \alpha \Delta T$$

kalles varmelikningen eller diffusjonslikningen.