2 - 8 - LTI-SYSTEMER II

Egenvektorer er sentrale i veldig mange anvendelser, hele kvantemekanikken er for eksempel et eneste stort studium av egenvektorer. Vi skal derfor nå spinne videre på dette temaet, og ta for oss noe som kalles **diagonalisering**.

Alle barn i barnehagen vet at matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ Sett egenvektorene opp som kolonner i en matrise V og beregn AV. Dette produktet har en alternativ faktorisering der V står på venstre istedet for høyre side. Hva er den?

Dersom

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er

$$AV = V\Lambda.$$

Her er en mer grafisk versjon:

$$\left(\quad A \quad \right) \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

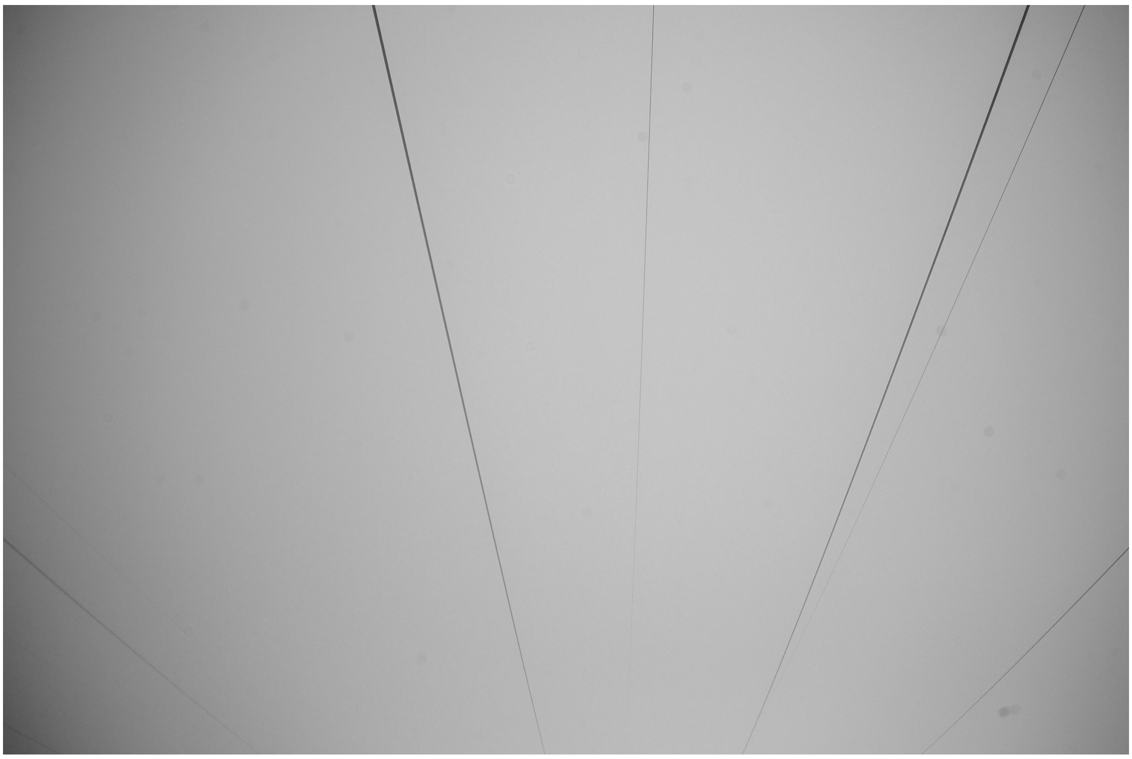
Dersom A har n lineært uavhengige egenvektorer, eksisterer V^{-1}, og vi kan skrive

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

og siden Λ er diagonal, sier vi at A er **diagonalisert**. Den motsatte implikasjonen holder også; dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ må kolonnene i V være lineært uavhengige egenvektorer til A, og derfor sier vi en matrise er **diagonaliserbar** hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

$\boxed{2}$ Men akkurat i dette tilfellet kan faktisk klare enda bedre. Finn P slik at

$$A = P\Lambda P^T.$$



Husk at en reell matrise P kalles ortogonal dersom den har ortonormale kolonner, og da er

$$P^{-1} = P^T.$$

Dersom en matrise $n \times n$-matrise A har n ortogonale egenvektorer sier vi at A er **ortogonalt diagonaliserbar**, og skriver

$$A = P\Lambda P^T.$$

Vi sier at en reell matrise A er **symmetrisk** dersom $A = A^T$. I anvendelser er det veldig vanlig at det dukker opp symmetriske matriser.

$\boxed{3}$ Finn P som ortogonalt diagonaliserer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Hint: Du må antagelig bruke Gram-Schmidt.)

En reell matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk. Dette kalles **spektralteoremet**, og er ikke trivielt å vise, men det er heldigvis trivielt å huske. Som du kanskje ser av oppgaven over, kan en symmetrisk matrise fint ha en ikke-ortogonal egenvektorbasis, men poenget er at du alltid kan finne en som er ortogonal.

$\boxed{4}$ Kan du diagonaliere

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;?$$

Vi har allerede løst initialverdiproblemer på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ved å lete opp alle egenverdier og egenvektorer til A, men med diagonalisering kan vi gjøre det enda penere. Dersom A er diagonaliserbar, danner egenvektorene til A en basis for $\mathbb{R}^n$, og for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan vi skrive

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}.$$

Vektoren $\mathbf{y}$ er et alternativt sett med koordinater for punktet $\mathbf{x}$, og vi sier at kolonnene i P utgjør en **egenvektorbasis**. Noen problemer forenkles kraftig om man bytter til denne basisen. Løs systemene ved å bytte til A sin egenvektorbasis for $\mathbb{R}^3$ dersom den finnes:

$\boxed{5\text{-}1}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

$\boxed{5\text{-}2}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

$\boxed{5\text{-}3}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 \end{aligned}$$

Systemene over betyr ingenting, men matrisene er gunstige for å huske noen enkle ting om matriser. La oss oppsummere:

- En matrise med n lineært uavhengige egenvektorer kan diagonaliseres.
- En symmetrisk matrise kan ortogonalt diagonaliseres.
- Egenvektorene til distinkte egenverdier til en symmetrisk matrise er automatisk ortogonale.
- Egenvektorene til multiple egenverdier til en symmetrisk matrise er ikke nødvendigvis ortogonale, men man kan gramschmidte dem ortogonale.
- Egenvektorbasisen er gunstig når man løser differensiallikningssystemer, for den dekobler likningene.

Spørsmålet er nå, hva gjør vi med oppgave 8? Systemmatrisen har kun én egenretning. Det som nå er litt antiintuitivt, er at dette differensiallikningssystemet allikevel har tre lineært uavhengige løsninger. For å finne de to andre løsningene, må vi kjenne til noe som kalles **jordanform**. Dette skal vi se på om litt. Nå tar vi et mer praktisk og ortogonalt diagonaliserbart eksempel.

$\boxed{6}$ Laurinda Lie tror på homeopati, og hun har lest at mot migrene er det lurt å drikke vann som har vært varmet opp av en klump med *spesiell homeopatisk masse*, og så nedkjølt. Laurentius Lie tror på mye rart, men ikke på homeopati. Han er imidlertid en grei fyr, og går med på å regne ut når det homeopatiske vannet har en passelig drikketemperatur.

Den varme homeopatiske klumpen senkes i et vannbad ute på verandaen, der det er null grader. Vi antar at Newtons avkjølingslov gjelder og at det alltid er perfekt blanding; i den homeopatiske tradisjon ristes jo alltid vannet på en nøye spesifisert måte. Vis at vi får differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2) \end{aligned}$$

der x_1 er temperaturen i klumpen, x_2 er temperaturen i vannet, α_1 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og den homeopatiske klumpen og α_2 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen.

Den homeopatiske klumpen skal varmes opp til 88 grader celsius, [1] og så senkes i vann fra springen, som holder 4 grader. Du kan i denne oppgaven anta $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Når får vannet en passelig drikketemperatur på 13 grader?

[1] Homeopatiens grunnlegger Samuel Hahnemann ble nemlig 88 år gammel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Samuel_Hahnemann`

Eksemplet over illustrerer noe viktig - selv banale og urealistiske modeller blir fullstendig håpløse å regne på uten en datamaskin.[2] For et LTI-system som i prinsippet kan løses analytisk, finnes det mange strategier. Her er de to mest innlysende:

- løse analytisk, men la numeriske metoder beregne egenvektorer
- numerisk likningsløser

$\boxed{7}$ Løs oppgave 6 med den første strategien, og test for forskjellige verdier av α_1 og α_2.

For LTI-systemer er det slik at noen numeriske metoder som egentlig er implisitte, blir eksplisitte allikevel.

$\boxed{8}$ Vis at Euler eksplisitt på systemet over blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I + hA)\,\mathbf{x}_k,$$

at euler implisitt blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1}\,\mathbf{x}_k$$

og at trapesmetoden blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k.$$

der

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

Kjør alle, og sammenlikne med oppgave 7.

Hvis du skal opphøye en matrise A i en stor potens, er det veldig greit å ha diagonaliseringen, siden

$$A^n = \left(V\Lambda V^{-1}\right)^n = V\Lambda^n V^{-1}.$$

Det er nemlig veldig lett å opphøye en diagonalmatrise i n.

$\boxed{9}$ Prøv på kjøre euler eksplisitt med stor h. Kan du forklare?
Hint: Diagonaliser $I - hA$ i python og se på egenverdiene.

[2] Det sies at Euler feilet på spektakulært vis da han skulle regne ut høyde for en passelig sprut i en fontene i Potsdam, men dette er visst diskutabelt: `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s004070200054.pdf`

Den vanligste måten å jobbe med LTI-systemer på, er via matriseeksponensialfunksjonen:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Her er A en kvadratisk matrise, og du kan selv skjønne hvorfor denne dukker opp ved å derivere

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

ledd for ledd og "sjekke" at

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

$\boxed{10}$ Jeg sier "sjekke", for det er ganske mye jobb å vise på en stringent måte at dette er riktig. Hvis du er oppriktig interessert, kan du lese kap. 2 i Schaeffer og Cain, hvis ikke, kan du bare derivere ledd for ledd og se hva som skjer.

I korte trekk løses

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad \text{av} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0,$$

så jobben er å forstå hvordan vi beregner matriseeksponensialfunksjonen på en effektiv måte. Det er et åpent spørsmål hvordan man beregner denne optimalt,[3] men vi trenger den først og fremst fordi det blir så lett å skjønne hvordan man ter seg om A er defekt.

$\boxed{11}$ Steg én for å forstå dette er å skrive ut hva matriseeksponensialfunksjonen på komponentform dersom A er en diagonalmatrise.

Dette er greit å vite, siden

$$A = V\Lambda V^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = V e^{\Lambda} V^{-1}$$

$\boxed{12}$ "Sjekk" dette også.

[3] `https://www.cs.jhu.edu/~misha/ReadingSeminar/Papers/Moler03.pdf`

Nå kan vi går videre til det som er interessant. Vi vet at matrisemultiplikasjon ikke er kommutativt. Men dersom A og B kommuterer, er

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

13 Denne er litt hårete, tipper de fleste må slå det opp. Det står i Schaeffer og Cain, men Perko[4] har en enda penere løsning.

Vi kan nå skrive

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + N$$

14 Sjekk at I og N kommuterer.

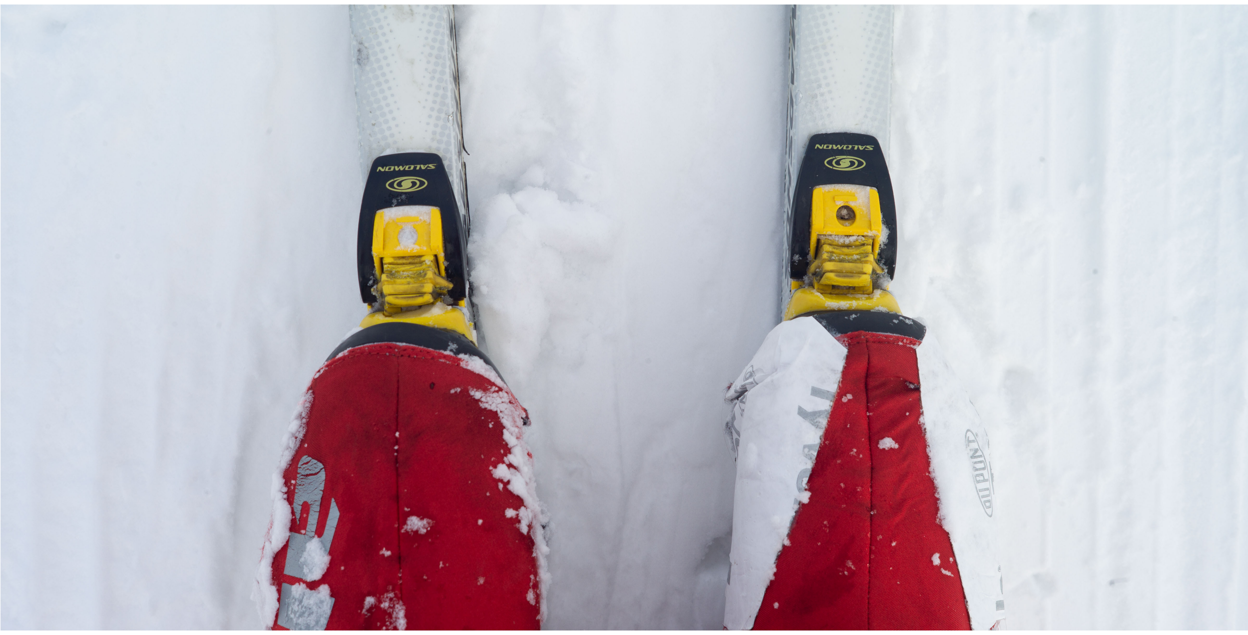
Det er viktig på grunn av følgende oppgave.

15 Sjekk at

$$e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda I t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O YES!

16 Oppgave 8 har tre lineært uavhengige løsninger. Nå har du alle.



[4] https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0003-8

Matrisen $\lambda I + N$ er den grunnleggende byggesteinen i **jordandekomposisjonen** til A:

$$A = VJV^{-1}$$

Dette er en dekomposisjon med en **blokkdiagonal**[5] matrise

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

der J_k er kvadratiske matriser på formen

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alle matriser kan jordandekomponeres, og jordandekomposisjonen degenerer til vanlig diagonalisering dersom A er diagonaliserbar, men beviset er altfor hardt for TMA4106. Har man jordandekomponeringen til A, kan man i prinsippet løse absolutt alle systemer på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, siden

$$e^{At} = Ve^{Jt}V^{-1}$$

og

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ Vis.

Det som gjenstår er å vite hvordan man finner V.[6] Kolonnene i V består av **generaliserte egenvektorer**[7] til A. En generalisert egenvektor $\mathbf{v}$ er en vektor som tilfredsstiller likningen

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

og det går an å vise at dersom multiplisiteten til λ er n, kan man alltid finne n lineært uavhengige generaliserte egenvektorer. Det er ikke alltid nødvendig å finne dem; du kan hacke oppgave 15.

$\boxed{18\text{-}1}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{aligned}$$

$\boxed{18\text{-}2}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 \\ \dot{x}_3 &= \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{aligned}$$

$\boxed{18\text{-}3}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \phantom{{} + x_2} + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \end{aligned}$$

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix

[6] Oppgave 8 var valgt med omhu: siden $V = I$, slapp du å regne denne ut.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_eigenvector

UKENS NØTTER

Vi sier at lengden

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$$

er **indusert** av indreproduktet $(\cdot,\cdot)$. Men det finnes også lengder som ikke er indusert av et indreprodukt. Derfor har vi egne aksiomer for lengde:

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

På fagspråket sier man **norm** istedet for lengde. Det finnes mange normer som ikke er indusert av indreprodukt

$\boxed{1}$ Vis at $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ er en lengde.

$\boxed{2}$ Vis at $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$ og $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_k |x_k|$ er lengder når $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Forklar subskriptene.

Så har vi **matrisenormen**:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

$\boxed{3}$ Vis at dette er en lengde.

$\boxed{4}$ Vis at e^A er absolutt konvergent for alle A.