2 - 8 - LTI-SYSTEMER II - LF

$\boxed{2}$ Her er det viktig å forstå at dersom P er en matrise med ortonormale kolonner, er

$$P^{-1} = P^T$$

og dette gjelder ikke for

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

for

$$VV^T = V^TV = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

men om vi normaliserer kolonnene og definerer

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix},$$

er

$$PP^T = P^TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Du kan nå sjekke selv at

$$A = P\Lambda P^T.$$

$\boxed{3}$ Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda)) \\
&= (2-\lambda)\left(3 - 4\lambda + \lambda^2\right) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\
&= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)
\end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Litt gramschmidt gjør susen. Vi bytter ut $\mathbf{v}_3$ med

$$\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3^T\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

som er ortogonal på både $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Dersom vi normaliserer alle egenvektorer og setter dem opp som kolonner i en matrise

$$V = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

vil $A = VDV^T$, der

$$D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Merk at egenvektorene som korresponderte til forskjellige egenverdier automatisk kom ut ortogonale. Dette var ikke tilfeldig, for vi kan beregne at

$$\lambda_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = (\lambda_1\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^TA^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T(A\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2$$

slik at

$$\lambda_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2$$

eller

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0.$$

Dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ må altså $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0$.

4 Nei. Det karakteristike polynomet er

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og prøver vi å regne ut egenvektorene, får vi

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

som gir $x_2 = x_3 = 0$ og

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som eneste egenvektor.

$\boxed{\text{5-1}}$ I TMA4101 lærte vi at løsningen på dette er

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{9t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Med ortogonal diagonalisering kan man angripe det litt annerledes. La oss si at du har Λ og P slik at $A = P\Lambda P^T$. Vi skriver systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = P\Lambda P^T\mathbf{x}.$$

La oss først gange fra venstre med P^T, og få

$$P^T\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \Lambda P^T\mathbf{x}.$$

Nå er et bare å sjekke at

$$\frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = P\dot{\mathbf{y}}$$

så lenge P er en konstant matrise, og så bytte til koordinatene $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, og skrive

$$\dot{\mathbf{y}} = \Lambda\mathbf{y}.$$

Men Λ er diagonal, så dette blir bare likninggsystemet

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 9y_1 \\ \dot{y}_2 &= 4y_2 \\ \dot{y}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi sier nå at likningssystemet er **dekoblet**, og likningene var de første du lærte å løse i TMA4101:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^{9t} \\ y_2(t) &= c_2e^{4t} \\ y_3(t) &= c_3 \end{aligned}$$

Dersom vi nå bytter tilbake til de originale koordinatene, får vi

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{9t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Var ikke det litt stilig?

$\boxed{\text{5-3}}$ Her finner vi bare en løsning, nemlig

$$\mathbf{x}(t) = ce^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Men det finnes fler. Se lenger ned.

$\boxed{6}$ Klumpen har temperatur x_1 og lekker varme til vannet utenfor, som har temperatur x_2, slik at Newtons avkjølingslov gir

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 (x_2 - x_1).$$

Vannet selv avgir varme til klumpen med samme rate $\alpha_1 (x_2 - x_1)$ som klumpen får varme fra vannet, men fortegnet må snus. Så avgir vannet varme til omgivelsene med rate $\alpha_2 (0 - x_1)$ siden temperaturen er null på verandaen, og vi får likningen

$$\dot{x}_2 = \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)$$

Vi har initialbetingelsene

$$x_1(0) = 88 \qquad x_2(0) = 4$$

og antar vi at $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, får vi initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 & \qquad x_1(0) &= 88 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 & \qquad x_2(0) &= 4 \end{aligned}$$

Vi begynner med å beregne det karakteristiske polynomet til matrisen, som er

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) - 1 = 1 + 3\lambda + \lambda^2$$

slik at egenverdiene er

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Den ene egenvektoren gis av

$$\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5+\sqrt{5} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Den andre må være ortogonal på den første siden matrisen er symmetrisk, så vi kan bare skrive opp at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

uten mer dilldall. Løsningen blir

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 5+\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{5})t/2} & 0 \\ 0 & e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Dersom vi vil sette $\mathbf{c}$, må vi bruke at

$$\begin{pmatrix} 88 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 5+\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og løse for $\mathbf{c}$. Dette kan vi gjøre enklest ved å gange med P^T fra venstre:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5+\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 88 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(34 + 10\sqrt{5}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{c} = \frac{1}{(34+10\sqrt{5})}\begin{pmatrix} 2 & 5+\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 88 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Legg merke til strukturen på løsningen. Den er nå skrevet som

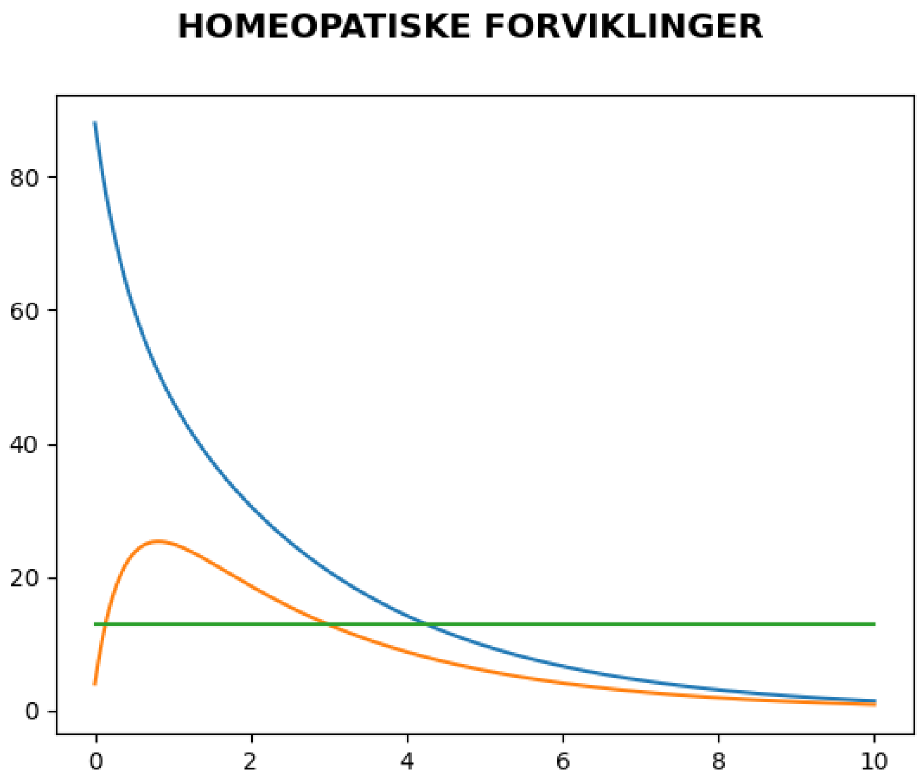
$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5+\sqrt{5} \\ 5+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}}_{V}\underbrace{\begin{pmatrix} e^{(-3-\sqrt{5})t/2} & 0 \\ 0 & e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \end{pmatrix}}_{e^{\Lambda t}}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{(34+10\sqrt{5})} & \frac{5+\sqrt{5}}{(34+10\sqrt{5})} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{(34+10\sqrt{5})} & \frac{-2}{(34+10\sqrt{5})} \end{pmatrix}}_{V^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 88 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_0}$$

Notasjonen $e^{\Lambda t}$ kommer vi tilbake til om litt.

Vannet skal ha en passelig drikketemperatur på 13 grader, så vi må løse likningen

$$13 = x_1(t),$$

men dette går ikke med penn og papir, siden x_1 er en lineærkombinasjon av to forskjellige eksponensialfunksjoner. Vel vel vel. Frem til hit tok meg over en arbeidstime å skrive ned, men denne koden
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/homeopati/main.py`
tok meg noen få minutter og produserer dette plottet:



som viser at $x_1(t) \approx 13$ når $t \approx 3$. Rustkode finnes her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/rust/homeopati`

$\boxed{8}$ Dersom f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ og $\mathbf{x}$ en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$ og vi skal løse systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

blir eksplisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k)$$

implisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_{k+1})$$

og trapesmetoden

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\left(f(\mathbf{x}_k) + f(\mathbf{x}_{k+1})\right)$$

I vårt tilfelle er

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

For eksplisitt Euler får vi

$$\mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k) = (I + hA)\mathbf{x}.$$

Implisitt Euler blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hA\mathbf{x}_{k+1}$$

men om vi skriver alt med $\mathbf{x}_{k+1}$ på venstre side, får vi

$$(I + hA)x_{k+1} = \mathbf{x}_k$$

og så er det bare å invertere $I + hA$, og få

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1}\,\mathbf{x}_k$$

For trapesmetoden bruker vi bare det samme trikset; vi skriver

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\left(A\mathbf{x}_k + A\mathbf{x}_{k+1}\right)$$

sorterer:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2}A\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}A\mathbf{x}_k$$

bruker identitetsmatrisen:

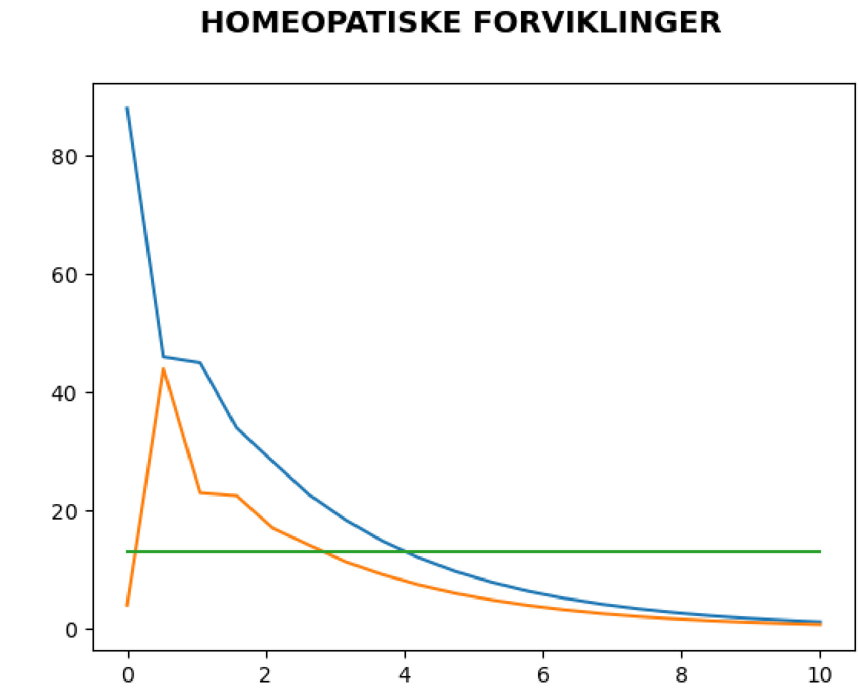
$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

og inverterer:

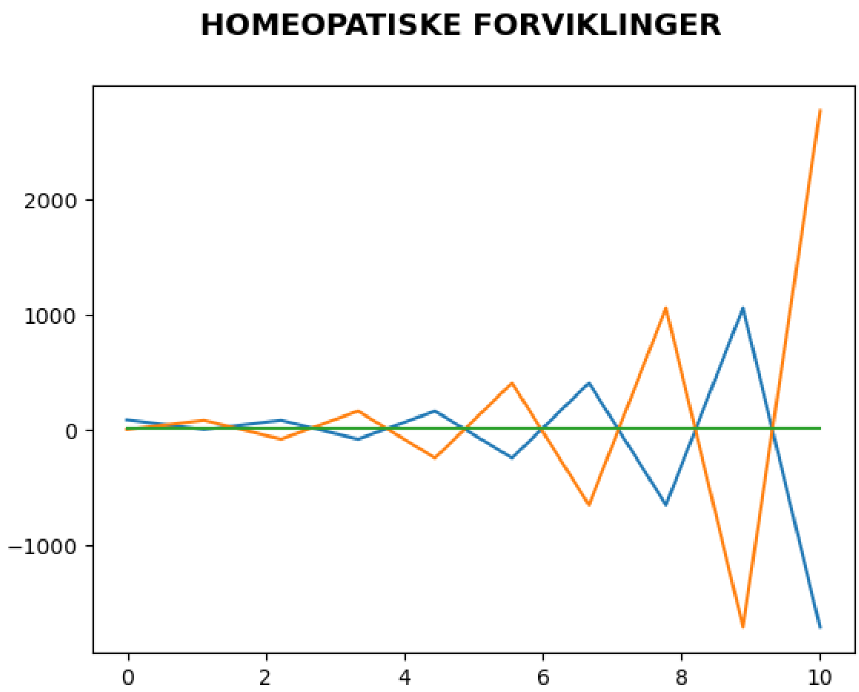
$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

I pythonkoden i forrige oppgave kan du kjøre alle metodene.

9 La oss begynne med å se på hva som skjer når vi kjører eksplisitt euler for store h. Dersom $h = 0.5$, begynner kurvene å se stygge ut:



og dersom $h = 1$ er det ingenting igjen som minner om korrekt fysikk:



For å avdekke hva som skjer, kan vi ta for oss et triks. For det første er det veldig kjapt å gange diagonalmatriser med seg selv:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & & \\ & \lambda_2^m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Hvis du skal opphøye en matrise A i en stor potens, gjør du slik:

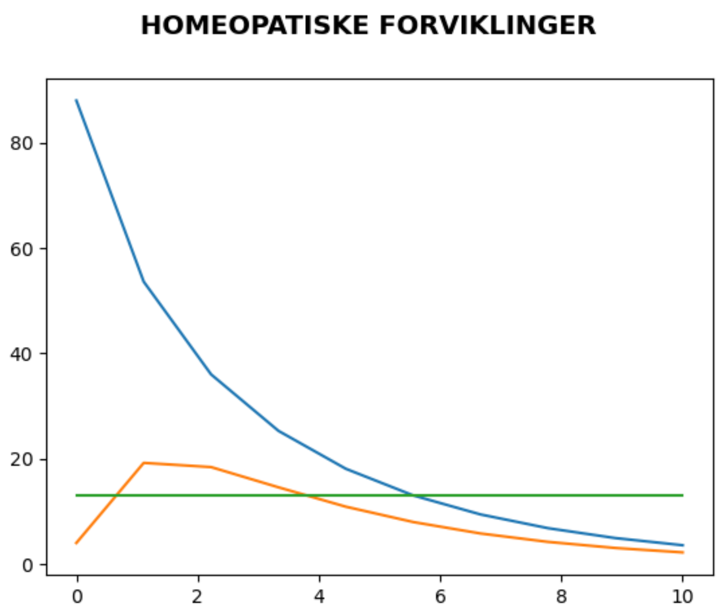
$$\begin{aligned} A^n &= \left(V\Lambda V^{-1}\right)^n \\ &= \left(V\Lambda V^{-1}\right)\left(V\Lambda V^{-1}\right)\cdots\left(V\Lambda V^{-1}\right) \\ &= V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1}\cdots V\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda\Lambda\cdots\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda^n V^{-1}. \end{aligned}$$

Hvis man legger inn kommandoen

```
print(np.linalg.eig(ekspl_mat))
```

i koden et eller annet sted, vil man se at i det h bikker sånn omtrent $5/7$, bikker den ene egenverdien over 1, og da begynner iterasjonene å stige ukontrollert.

Dersom man prøver samme eksperiment med implisitt, vil man oppdage at det går helt fint. Her er $h = 1$:



Unøyaktig som faen, men kvalitativt riktig. Forklaringen er den samme, print egenverdiene til $I - hA$, så ser du. Trapesmetoden oppfører seg likt, men legger seg tettere på den korrekte løsningen, siden den har høyere orden.[1]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule_(differential_equations)

$\boxed{10}$ Vi antar kjekt at

$$\frac{d}{dt}At = A$$

og deriverer eksponensialfunksjonen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right)\\ &= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2} + \frac{A^4t^3}{3!} + \cdots\\ &= A\left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right)\\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

Dersom vi aksepterer at

$$e^{A\cdot 0} = e^0 = I,$$

er det lett å gå med på at

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

både passer i differensiallikningssystemet og tilfredsstiller $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

$\boxed{11}$ Dersom Λ er diagonal, er

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{(\Lambda t)^2}{2} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \cdots$$

og trikset vi lærte i oppgave 9 impliserer at $e^{\Lambda t}$ er diagonal.

Dette er greit å vite, siden

$$A = V\Lambda V^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad e^A = Ve^{\Lambda}V^{-1}$$

$\boxed{12}$ Dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ kan nok en gang bruke trikset fra oppgave 9:

$$\begin{aligned}e^{At} &= e^{V\Lambda V^{-1}t}\\ &= I + V\Lambda V^{-1}t + \frac{(V\Lambda V^{-1}t)^2}{2} + \frac{(V\Lambda V^{-1}t)^3}{3!} + \cdots\\ &= I + V\Lambda V^{-1}t + \frac{V\Lambda^2V^{-1}t^2}{2} + \frac{V\Lambda^3V^{-1}t^3}{3!} + \cdots\\ &= VIV^{-1} + V(\Lambda t)V^{-1} + \frac{V(\Lambda t)^2V^{-1}}{2} + \frac{V()\Lambda t)^3V^{-1}}{3!} + \cdots\\ &= V\left(I + (\Lambda t) + \frac{(\Lambda t)^2}{2} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \cdots\right)V^{-1}\\ &= Ve^{\Lambda t}V^{-1}\end{aligned}$$

13 Den peneste måten å definere eksponensialfunksjonen på, er i bunn og grunn

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

som er absolutt konvergent for alle z. La oss nå gange sammen to slike og herje litt:

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n!m!}$$

Denne herjingen er tillatt så lenge rekkene er absolutt konvergente, men det er de jo. Vi ser nå tydelig at koeffisienten til $z^n w^m$ er $1/(n!m!)$, så det vi trenger å gjøre, er å sjekke at dette også er koeffisienten til $z^n w^m$ i e^{z+w}: Binomialteoremet[2] gir

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} z^k w^{k-l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} z^l w^{k-l}. \end{aligned}$$

Nå er det egentlig bare å observere at en bestemt potens $z^n w^m$ kun opptrer på ett sted i hver sum, og voila. (Litt subtil denne her. Ikke gå i kjelleren om du må tenke en stund.)

Hvis du nå bytter ut z og w med matrisene A og B, er beregningen i bunn og grunn den samme, men det er en del jobb å vise ordentlig at alle stegene i beregningen er tillatte. Man må også bruke kommutativiten til A og B når man bruker binomialteoremet; dette tenker vi jo ikke på når vi ganger sammen reelle eller komplekse tall.

14 Jeg håper du husker at identitetsmatrisen kommuterer multiplikativt med absolutt alle matriser.

15 Siden I og N kommuterer, kan vi først beregne

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{\lambda N t}$$

Nå er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og følgelig at

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{\lambda N t} = e^{\lambda I t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem

16 Da er det faktisk bare å skrive

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + N$$

og beregne

$$e^{At} = e^{(I+N)t} = e^{It}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Løsningen blir

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{It}e^{Nt}\mathbf{x}_0.$$

Det er slik at et system på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ alltid har n lineært uavhengige løsninger uansett om A er diagonaliserbar eller ikke. Dette er ikke helt trivielt å bevise, men du finner utledning for diagonaliserbare A her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf`

17 Matrisen N er såkalt **nilpotent**, og dukker opp ofte nok i anvendelser til at den har fått et eget navn, **shift matrix**.[3] Hver gang du ganger denne matrisen med seg selv, flyttes superdiagonalen med enere ett knepp oppover, og til slutt er det tomt. Du kan selv sjekke at at dersom N er $(n+1) \times (n+1)$, er N^{n+1} nullmatrisen, slik at eksponensialfunksjonen terminerer etter $n+1$ ledd:

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} + \cdots + \frac{(Nt)^n}{n} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

18 Alle disse matrisene kan skrives som identitetsmatrisen pluss en nilpotent matrise som er bittelitt annerledes enn N, men som oppfører seg likt. Så det er bare å kopiere oppgave 15.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Shift_matrix`