Daniel Bjerkehagen

Litt optimering

Denne uken handler hovedsaklig om optimering. Dette er et viktig tema for alle ingeniører, men ikke ofte dekket av oblig mattefag.

$\boxed{1}$ Det er desember, og jeg leser febrilsk til mine to siste eksamener; TMA4111 og TDT4160. Det tar meg 4 timer å løse et eksamensett i TMA4111 og 2 timer å løse et eksamensett i TDT4160. Det vil si at dersom jeg leser 1 time på TMA4111 har jeg løst $\frac{1}{4}$ eksamensett og hvis jeg leser 1 time på TDT4160 har jeg løst $\frac{1}{2}$ eksamensett. Vi antar for enkelthets skyld at jeg ikke blir noe raskere på å løse eksamensettene innen eksamensperioden er over.

Definér funksjonen $f(x, y)$ som gir hvor mange eksamensett du har løst totalt dersom du leser i x timer på TMA4111 og y timer på TDT4160.

Som en driftig student ønsker du naturligvis nok å *optimere* antall eskamensett du løser før eksamene dine, da du vet det pleier å komme gamle oppgaver på eksamen. Du har nå gjort første steg, hvilket er å beskrive et mål du ønsker å maksimere eller minimere. For oss er dette funksjonen f, vi ønsker å maksimere denne.

Du observerer at antall eksamenssett du løser kan øke til uendelig store mengder, bare du leser lenge nok[1]. Men som dere er kjent med så er eksamensperioden langt fra uendelig lang. Derfor må optimeringsproblemet vårt gjøres mer realistisk ved å innføre *begrensninger*.

En begrensning er et krav på hvilke verdier *optimeringsvariablene* våre kan inneha. I denne oppgaven er x og y optimeringsvariablene, fordi vi ønsker å finne det valget av x og y som optimerer antall mulig løste eksamenssett. En typisk begrensning vi kan ha er ressursmangel, f.eks. at vi ikke har uendelig med penger når vi skal gå på butikken og optimere antall epler eller bananer vi kjøper. En annen begrensning kan være ikke-negativitet, vi kan f.eks. ikke kjøpe et negativt antall bananer. Begrensninger er altså en måte for oss å forsikre oss om at oppsettet vårt gir mening, og at det vil lede til det riktige optimale svaret.

$\boxed{2}$ Du har regnet ut at du kun har 100 timer igjen å lese før begge eksamenene dine (her antar vi ganske brutalt at eksamen i TMA4111 og TDT4160 lander på samme dag, men dette er kun en forenkling).

Du synes også at TMA4111 er enklere enn TDT4160, så du bestemmer deg for å lese minst 20 timer mer på TMA4111 enn du gjør på TDT4160.

Samtidig er det naturligvis ikke mulig å lese i et negativt antall timer.

Lag ulikheter som beskriver begrensningene nevnt over, dersom x representerer antall timer du leser på TMA4111 og y er antall timer du leser på TDT4160.

Nå som vi har innført noen ulikheter som begrenser hva som er gyldige verdier for x og y har vi fått det vi kaller et lineært optimeringsproblem", linear programming"(LP) på engelsk. Standardformen

[1] Prøv det selv: Forsøk å finne toppverdien til funksjonen vår ved å finne punktet hvor de deriverte er lik null.

til et LP er som følger:

$$\max_{x,y} f(x,y), \text{ slik at} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ c_1(x,y) \geq 0 \\ c_2(x,y) \geq 0 \\ \vdots \\ c_i(x,y) \geq 0 \end{cases}$$

Her beskriver funksjonene c_i begrensningene.

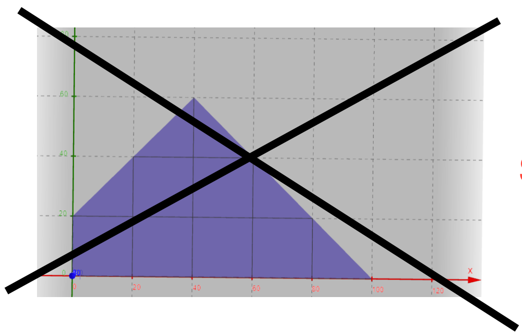
$\boxed{3}$ Sett optimeringsproblemet vårt om eksamenslesing på standardform. (Hint: i vårt tilfelle har vi to c-funksjoner).

Nå har vi tatt vårt virkelighetsnære og relevante eksempel om hvordan man best skal lese til eksamen og definert et presist matematisk problem som kan fortelle oss dette.

Det er uendelig mange mulige kombinasjoner av antall timer vi leser de to fagene før vi introduserer begrensninger. Begrensningene har nå gjort denne uendelige mengden ganske mye mindre, så liten at vi kan visualisere oss de gyldige verdiene. Derfra har vi et håp om å finne den optimale løsningen.

$\boxed{4}$ Bruk ulikhetsbegrensningene vi definerte tidligere for å skissere det området i (x,y)-planet som definerer gyldige kombinasjoner av antall timer lest på TMA4111 og TDT4160. Det er lurt å tegne én og én ulikhet om gangen. Det kan også være lurt å skissere på papir.

Denne figuren viser altså hvilke (x,y)-verdier som er tillate løsninger, og vår jobb er å finne den verdien (x^*,y^*) som gjør at funksjonen vår (antall eksamenssett løst) tar størst mulig verdi.



Se figur neste side

$\boxed{5}$ Finn det optimale punktet.

Jeg går nå på en veldig rar butikk som kun selger tre varer: Te, kaffepulver og kaffefilter. Butikken selger disse varene for følgende priser:

Vare	Pris [kr/kg]
Te	4
Kaffepulver	5
Kaffefilter	2

(se bort ifra det at man aldri ville kjøpt kilogramvis med kaffefilter).

$\boxed{6}$ Definér funksjonen $f(x,y,z)$ som beskriver hvor mye penger jeg bruker på butikken dersom jeg kjøper x kg te, y kg kaffepulver og z kg kaffefilter.

40
20
0
10
20
30
40
50
60
70
80

Det gir ikke mening å kjøpe bare kaffefilter uten å kjøpe kaffepulver, og motsatt. Derfor har vi en restriksjon ("constraint"), om at for hvert kilogram med kaffefilter så må vi også kjøpe 4 kilogram med kaffepulver. Samtidig gir det ikke mening å kjøpe negative mengder av hverken te, kaffepulver eller kaffefilter.

$\boxed{7}$ Definér restriksjonene som er nevnt over.

$\boxed{8}$ Finn den kombinasjonen av varer som maksimerer antall kilo jeg må bære hjem fra butikken, dersom jeg kun har 20 kr å handle for.