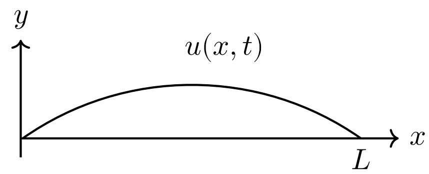
Bølgelikningen

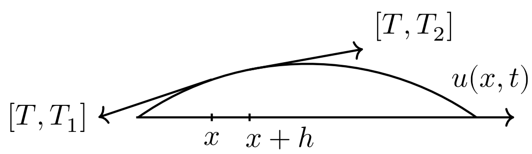
Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe. Vi skal ta for oss selve likningen, hvor den kommer fra, og to forskjellige løsningsteknikker - en for et intervall på x-aksen, og en for hele x-aksen.

Utledning

Vi tenker at vi har en vibrerende streng som er spent opp i $x = 0$ og $x = L$. La $u(x,t)$ være en funksjon som for hvert tidspunkt t og hvert punkt x beskriver utslaget fra likevektslinjen, som ligger langs x-aksen. Strengen har konstant massetetthet $\rho\,[kg/m]$.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekket, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekket er konstant lik T.



Vi setter opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er $h\rho$, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $u_{tt}(x,t)$. Netto kraft på biten er gitt ved $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho u_{tt}(x,t) = T_2 + T_1,$$

eller

$$\frac{\rho}{T}u_{tt}(x,t) = \frac{T_2/T + T_1/T}{h} = \frac{u_x(x+h,t) - u_x(x,t)}{h},$$

siden stigningstallet til tangenten til strengen er gitt ved u_x. Lar vi $h \to 0$, får vi bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

der $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Bølgelikningen følger også av Maxwells likninger:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Dette er litt jobb å vise, men vi skal se på det.

Oppstilling av problem

Det er ikke nok med en differensialligning som beskriver strengens bevegelse. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Et fullstendig oppstilt problem er:

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \tag{1}$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{2}$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x). \tag{3}$$

Randkravene (**??**) forteller oss at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = L$, slik at løsningen står helt i ro der. Initialkravene (**??**) forteller oss noen om hvordan bevegelsen settes i gang; f angir strengens posisjon ved $t = 0$, mens g angir strengens fart ved $t = 0$. Når man spiller en tone på en gitar ved å dra i strengen og slippe den, slik man vanligvis gjør, er $g = 0$. Randkravene

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{4}$$

kalles dirichletrandkrav.

Analytiske løsningsteknikker

Løsning på intervall - separasjon av variable

Nå skal vi ta for oss løsningen. Vi leter etter en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon

$$u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

som er løsning av bølgelikningen med rand- og initialkavene over.

$\boxed{1}$ Funksjonen $u : [0,1] \times [0,\infty)$ gitt ved

$$u(x,t) = \sin t \sin \pi x$$

er en løsning av bølgelikningen. Vis dette, og forklar hvilke rand- og initialkrav som er tilfredsstilt. Du kan tenke på faktoren $\sin t$ som en tidsvariabel amplitude, mens faktoren $\sin \pi x$ beskriver selve bølgeformen. Du finner en animasjon av en liknende funksjon her: `https://www.youtube.com/watch?v=sWlcWIr9J4E`.

Løsningen over tilfredsstiller et spesifikt sett med rand- og initialkrav. Vi ønsker å finne løsningen for generelle rand- og initialkrav. La oss brette opp ermene og finne dette.

$\boxed{2}$ Et stort geni har engang tenkt at løsningen til bølgeligningen antagelig kan skrives

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Han hadde rett. Sett denne inn i (**??**) og vis at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kc^2G(t) = 0$$

der k er en ubestemt konstant.

$\boxed{2}$ Dersom du nå prøver å løse $F''(x) + kF(x) = 0$ og så bruker randkravene, kan du dedusere noe om fortegnet på k. Har vi $k < 0$ eller $k > 0$ eller kanskje $k = 0$?

Fikk du til forrige oppgave, så du kanskje at

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

slik at

$$k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

og at

$$F(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

der n er et tilfeldig valgt naturlig tall.

$\boxed{3}$ Vi har funnet k, så nå kan du løse likningene

$$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0.$$

Fikk du til forrige oppgave, vil du se at det nå finnes et uendelig antall løsninger

$$u_n(x,t) = F(x)G_n(t) = \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Nå er det på tide med et intermezzo og et gjensyn med våre elskede fourierrekker. Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-t) = -f(t)$$

og jevn dersom

$$f(-t) = f(t).$$

for alle t i definisjonsmengden til f. Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y-aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^{L} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{L} f(t)\ dt$$

for jevne funksjoner.

Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La f være odde og g være jevn. Siden $f(-t) = -f(t)$, og $g(-t) = g(t)$, får vi

$$f(-t)g(-t) = -f(t)g(t),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte.

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(t) & \text{for } t = (0, L) \\ -f(-t) & \text{for } t = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(t) & \text{for } t = (0, L) \\ f(-t) & \text{for } t = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekkene deres konvergere til $f(t)$ på $(0, L)$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$. Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekkene til f på $(0, L)$.

Vi ser på fourierutviklingen til f_o. For den har vi at $a_n = 0$ for alle n, og at

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\ dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\ dt.$$

For fourierutviklingen til f_j, har vi tilsvarende at

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_j(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\ dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\ dt$$

samt

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_j(t)\ dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\ dt.$$

$\boxed{4}$ Noen ide om hva du gjør med initialkravene?
(Hint: Fourierrekkene til de odde utvidelsene av f og g.)

Klarer du å skjønne hva det går i her, skjønner du kanskje hvorfor bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \Big) \sin \frac{n\pi}{L}x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx.$$

$\boxed{5}$ Finn løsningen til bølgelikningen med $c = 1$, $L = 1$, $f(x) = x(1-x)$ og $g(x) = 0$.

$\boxed{6}$ Finn løsningen til bølgelikningen med $c = 1$, $L = 2$, $g(x) = 0$ og

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$\boxed{7}$ Vi var vel enige om at vi lette etter to ganger kontinuerlig deriverbare løsninger. Kommentar?

Fløyte

En stående trykkbølge inne i fløyte beskrives av bølgelikningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres. (Dersom du spiller på fløyten inni en gassballong full av helium, blir c høyere enn i luft.) Randkravene kalles von-Neumann-randkrav, og L er fløytens lengde.

$\boxed{1}$ Kopier løsningsmetoden fra forrige ert-økt, og vis at

bølgeligningen
$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$
med randkrav
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$
og initialkrav
$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$
løses av
$$u(x,t) = \\ A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \right) \cos \frac{n\pi}{L}x,$$
der A er en vilkårlig konstant,
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$
og
$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Løsning på hele x-aksen - D'alembert

Hvis man ikke ønsker å bruke bøglelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må man studere bølgelikningen må vi lete etter en funksjon $u : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ som tilfredsstiller
$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$
med initialkrav
$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$
og ingen randkrav.

I noen tilfeller kan dette gjøre alt vanskeligere, men akkurat i tilfellet bølgelikningen, blir alt fryktelig enkelt.

2 Sjekk at
$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$
passer i likningen
$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$
uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare.

3 Bruk
$$u(x,0) = f(x)$$
og
$$u_t(x,0) = g(x),$$
til å sette opp et 2×2-likningssystem for ϕ og ψ.

$\boxed{4}$ Bruk gausseliminasjon og integrasjon til å vise at

bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

på hele x-aksen, med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt.$$

Numeriske løsningsteknikker

Avanserte problemer

Trommeskinn og sprettball

I n dimensjoner er bølgelikningen gitt ved ($c = 1$ for enkelhets skyld)

$$u_{tt} = \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots u_{x_nx_n}$$

$\boxed{5}$ Vis at bølgelikningen for et trommeskinn

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$$

blir

$$u_{tt} = \frac{1}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

i polarkoordinater.

Å løse denne er i bunn og grunn likt som for en gitarstreng, men mer grisete:

$\boxed{6}$ `https://www2.math.upenn.edu/~deturck/m241/wavedisk.pdf`

For sprettball blir det enda verre:

$\boxed{7}$ Vis at bølgelikningen for sprettball

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$$

blir

$$u_{tt} = \frac{2}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\tan\theta}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}$$

i kulekoordinater.

$\boxed{8}$ `https://www2.ph.ed.ac.uk/~paboyle/Teaching/PhysicalMaths/Notes_2010/notes_2010_part3.pdf`

Legg merke til alle de kjente navnene. Bessel var den første som greide å bestemme avstanden til en annen stjerne i solsystemet vårt. Helmholtz var egentlig kirurg, men har gjort seriøse bidrag i både matematikk og fysikk, samt innen forståelsen av hørselssansen og synsansen vår. Hans klassiker "Sensations of tone" er verdt å lese om du er interessert i musikk. Legendre skal vi møte på senere. Den ortogonale polynomenfamilien som dukker opp i løsningen for sprettball, brukes også til å lage avanserte metoder for numerisk integrasjon.