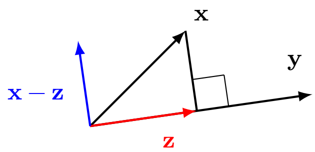
50 - POSTAPOTEOSE

Vi nærmer oss veis ende enda mer, og det var det evinnelige problemet med å finne noe som passer for både kyb og elsys. Jeg tror det blir litt om rotasjonsinvarians for laplaceoperatoren. Rotasjoner er viktig for kyb, mens laplaceoperatoren er viktig for elsys, så da får alle noe som er litt morosamt.

$\boxed{1}$ Utled Rodrigues formel

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\cos\theta + \mathbf{y}\times\mathbf{x}\sin\theta + \mathbf{y}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})(1-\cos\theta)$$



der $\mathbf{z}$ er $\mathbf{x}$ rotert vinkelen θ om enhetsvektoren $\mathbf{y}$.
(Hint: Projiser x på y, lag en gunstig ortonormal basis og bruk todimensjonal rotasjon.)

Harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante. Dette betyr at om du roterer koordinatsystemet ditt, vil de rene andrederiverte fortsatt summere til null. Dette kan vi vise ved en totrinnsprosess.

$\boxed{2}$ La A og B være kvadratiske matriser, og x en vektor. Vis at skalarproduktet mellom Ax og Bx kan skrives

$$(Ax, Bx) = (Ax)^T(Bx) = x^TA^TBx = \sum_i\left(\sum_k a_{ki}x_i\left(\sum_j b_{kj}x_j\right)\right)$$

(Hint: Husk på formelen for kvadratisk form

$$x^TCx = \sum_j\sum_k c_{jk}x_jx_k$$

samt formelen for komponentene i matriseprodukt $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$.)

$\boxed{3}$ La A være en kvadratisk matrise, og la $x = Ay$. Vis at

$$\Delta_y = \sum_i\left(\sum_k a_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \nabla_x^TA^TA\nabla_x$$

Hva skjer dersom A er en rotasjonsmatrise?

Når vi først er inne på det, kan vi jo sette opp laplaceoperatoren i polarkoordinater.

$\boxed{4}$ Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

Oppgaven over er praktisk om man ønsker å analysere en sirkulær tromme. Bølgelikningen i polarkoordinater blir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$\boxed{5}$ Separer variable $u = x(t)y(r)z(\theta)$ og utled likningene

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \lambda x &= 0\\ z'' + \gamma z &= 0\\ y'' + \frac{1}{r}y' + \left(\lambda - \frac{\gamma}{r^2}\right)y &= 0\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Det sier seg selv at vinkeldelen z må være 2π-periodisk. Bruk dette til å utlede at $\gamma = n^2$ der $n \in \mathbb{N}$, og at

$$z(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

Den siste likningen kan etter variabelskiftet $\rho = \sqrt{\lambda}r$ skrives

$$y'' + \frac{1}{\rho}y' + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0.$$

Å løse denne er for å sitere min svigerfar "en helvetes prosedyre", så det gidder vi ikke, men noen andre har gjort det for oss, og løsnigene kalles **besselfunksjonene**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function`
Når man skal overføre elektrisk energi med høy frekvens er det upraktisk å bruke ledninger, for man søler den elektriske energien ut i rommet og så lager du returstrømmer og fandens oldemor. I ubåt må for eksempel alle elektriske ledninger tvinnes. Derfor er det vanlig å overføre elektrisk energi på høy frekvens gjennom **bølgeledere**:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html`
Dette er bare en hul kanal med stående elektriske bølger, og dersom kanalen er sirkulær, dukker besselfunksjonene i analysen. Du kan faktisk lage en kondensator av en hul sylinder, og da dukker også besselfunksjonene opp:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html`

$\boxed{7}$ Vi kan jo konkludere med å utlede **telegraflikningene**:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L\frac{\partial I}{\partial t}\\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C\frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

for et langt ledningspar, der L er induktans per meter og C er kapasitans per meter.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Telegrapher%27s_equations`

UKENS NØTT

Ekte mannfolk bruker kvaternioner når de skal holde styr på rotasjoner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation`
og dette er standardmåten å gjøre det på i moderne robotstyringsalgoritmer. Dersom du ønsker å rotere $x \in \mathbb{R}^3$ om y der $\|y\| = 1$, kan du lage

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

og

$$y = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y_1 i + y_2 j + y_3 k)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

og beregne yxy^{-1}; imaginærdelene til denne gir deg den roterte vektoren.

$\boxed{1}$ Vis dette.