41 - VEKTORKALKULUS

Denne uken skal vi ta for oss to teoremer som er viktige for elektromagnetismen - Stokes' teorem og divergensteoremet. De forteller noe om hvordan glatte vektorfelt oppfører seg.

$\boxed{0}$ Les 16 i Adams.

DIVERGENS

Divergensen til et vektorfelt er summen av diagonalelementene i vektrofeltets jacobimatrise:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \text{trace}\,(DF)$$

$\boxed{1}$ Finn divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

Nå skal vi se litt på hva divergensen betyr.

$\boxed{2}$ La $\S_\epsilon$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius ϵ, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\mathbf{N}$ være enhetsnormalen til $\S_\epsilon$ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

$\boxed{3}$ Finn divergensen til det elektriske feltet til en punktladning.

Divergensteoremet

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathbb{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

Regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\mathbf{N}$ peker ut fra T.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 7}$, $z = 0$ og $z = 2$. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x + y, z + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?

ROTASJON

Rotasjonen til et vektorfelt er litt mer grisete enn divergensen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$\boxed{1}$ Finn rotasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2 + y^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \, .$$

$\boxed{3}$ Finn rotasjonen til coulombkraften til en ladning q.

Stokes teorem

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{5}$ La R være den delen av ellipsoiden $x^2 + y^2 + 8(z-1)^2 = 9$ hvor $z \geq 0$, og la vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz - 5y^3 \cos z, 5x^3 e^z, 6xye^{x^2+y^2+z^2} \right)$$

Regn ut

$$\iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

der $\mathbf{N}$ er enhetsnormalen på R som peker vekk fra origo.

Se her for flere regneregler for divergens og rotasjon:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities#Second_derivative_identities`