38 - FLATEINTEGRALER

I denne uken skal vi se på flater i rommet. Når man skal skjønne noe av funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er det fornuftig å ha den riktige visualiseringen. Denne avhenger av m og n. Likningen

$$z = f(x, y)$$

er en likning med tre variable som er løst for den ene variabelen z, der f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Dette tenker på på som en flate i rommet. Dersom flaten er taket i et hus, angir (x, y) en koordinat i husets gulv, og så gir f takhøyden i dette punktet. Men vi kan også beskrive flater ved likninger som ikke er løst for den ene variabelen.

$\boxed{1}$ Finn likningen for en kule med radius R og sentrum i (x_0, y_0, z_0).

En mer generell måte å beskrive flater i rommet på, er ved hjelp av funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$. Dersom vi har en slik funksjon til å beskrive flaten, sier vi at flaten er parametrisert. Dette er analogt til kurver i planet. Både $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

tenker vi på som kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. Du kan for eksempel ikke beskrive en kurve som krysser seg selv med en likning på formen $y = f(x)$.

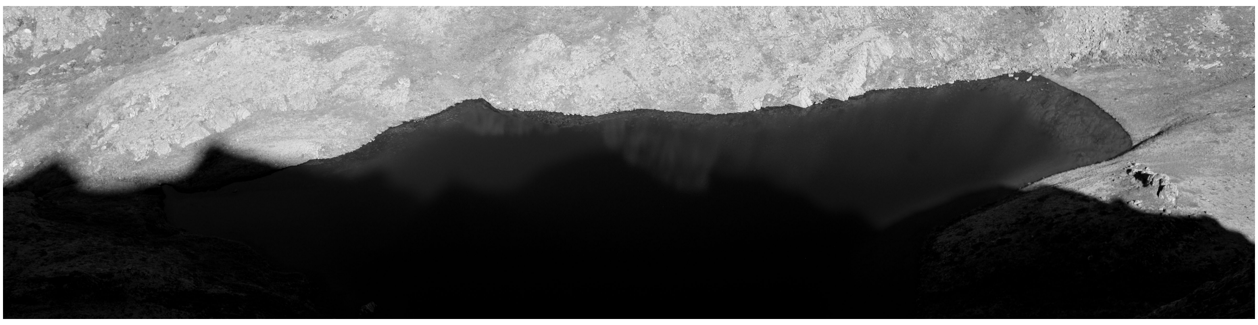
$\boxed{2}$ En funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\begin{aligned} x(\theta, h) &= \cos\theta \\ y(\theta, h) &= \sin\theta \\ z(\theta, h) &= h \end{aligned}$$

Finn ut hva slags type flate det er dersom definisjonsmengden er $[0, 2\pi) \times [0, 1]$.

$\boxed{3}$ Hva med denne? Definisjonsmengden er $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= \cos\theta\sin\phi \\ y(\theta, \phi) &= \sin\theta\sin\phi \\ z(\theta, \phi) &= \cos\phi \end{aligned}$$



Nå skal vi se på hvordan vi regner ut overflatearealet til en parametrisert flate.

$\boxed{4}$ En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

der $D \in \mathbb{R}^2$. Les kap. 15.5 i Adams og forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| \, d\mathbf{x}$$

Se også her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface`

$\boxed{5}$ Vis at overflatearealet til den krumme delen av en sylinder med radius r og høyde h er $A = 2\pi r h$.

$\boxed{6}$ Vis at overflatearealet til en kule med radis r er $A = 4\pi r^2$.

$\boxed{7}$ Kondensatorplater er ofte rullet opp for å spare plass:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor`
Skisser flaten $z : [0, 2\pi] \times [0, 1]$ gitt ved

$$\mathbf{z}(\theta, h) = \begin{bmatrix} (\theta + 1)\cos\theta \\ (\theta + 1)\sin\theta \\ h \end{bmatrix}$$

og finn arealet.

Analogt til linjeintegral, definerer vi flateintegral over skalarfelt som

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS = \iint_D \rho\left(\mathbf{z}(\mathbf{x})\right) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| \, d\mathbf{x}$$

der $\mathcal{S}$ er flaten parametrisert av $\mathbf{z}$ og D definisjonsmengden til $\mathbf{z}$. Du bør tenke på ρ som ladningstetthet per areal, og på flateintegralet som den totale ladningen på flaten $\mathcal{S}$. I praksis er det nok sjelden man regner ut integralet over for hånd, for hvis man har en kondensatorplate med ladningstetthet som ikke er konstant, har man ikke tilgang på et lukket uttrykk for ladningstettheten.

$\boxed{8}$ Bruk heller tid på å forklare hvorfor integralet over blir den totale ladningen.

$\boxed{9}$ La oss si at sylinderen i oppgave 3 er ladet med konstant ladningstetthet. Det elektriske feltet fra sylinderen kan i prinsippet regnes ut ved å integrere Coulombs lov komponentvis, men integralet blir ganske hårete for de aller fleste punkter i rommet. Unntaket er z-aksen, der det blir mange kanselleringer på grunn av sylinderens rotasjonssymmetri, og fysikere elsker å regne ut det elektriske feltet på slike steder. Prøv.

$\boxed{10}$ Hva med det elektriske feltet fra enhetskuleskallet?

$\boxed{11}$ Den sammenrullede kondensatorplaten tror jeg bare er å glemme. Men du kan jo bruke numerisk integrasjon.

UKENS NØTTER

En ting som er greit med flateintegraler, er at om man har skjønt dette, blir det enkelt å skjønne koordinatskift i dobbeltintegraler. Du kan tenke på de originale koordinatene som definisjonsmengden til parametriseringen for flaten, og på de nye koordinatene som en flate med $z_3 = 0$.

$\boxed{1}$ Bruk dette til å forklare hvorfor arealelementet er $r dr d\theta$ i polarkoordinater.

Massesenteret (m_x, m_y, m_z) til en todimensjonal ting med masstetthet ρ er gitt ved

$$m_x = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x\rho \, dS}{\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS} \qquad m_y = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y\rho \, dS}{\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS} \qquad m_z = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z\rho \, dS}{\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS}$$

$\boxed{2}$ Finn massesenteret til et kakestykke med radius R, uniform tetthet og vinkelutslag 2α.

Ukens nøtter

$\boxed{7}$ La $\mathcal{S}$ være kuleflaten som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$. Finn arealet av den delen av $\mathcal{S}$ som ligger over planet $z = 2$.