34 - ORTOGONALE MATRISER

Vi vet at det skal være mulig å finne et ortogonalt sett med egnevektorer dersom A er symmetrisk.

$\boxed{1}$ Men hva med

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I denne økten skal vi forske litt mer på dette med ortogonalitet og slikt. La oss begynne med å repetere litt viktige ting. Skalarproduktet i $\mathbb{R}^2$:

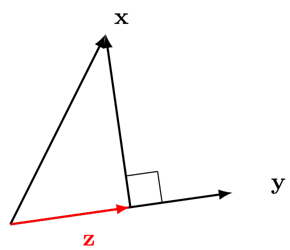
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$\boxed{2}$ Vis at

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.
(Hint: Tegn opp, og bruk cosinussetningen for det den er verdt.)

$\boxed{3}$ Vis at $\quad \mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y} \quad$ i denne figuren:



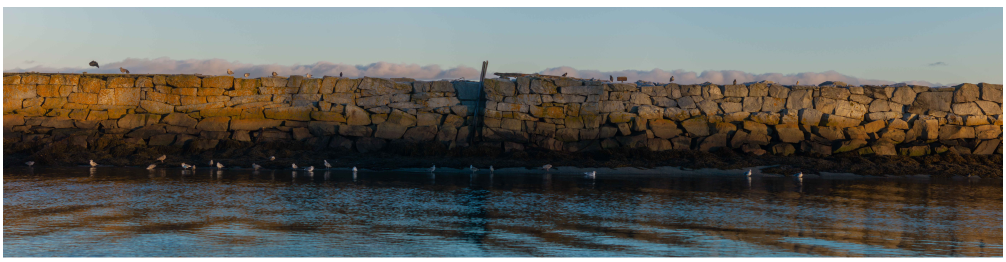
Skalarproduktet $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ forteller oss noe om $\mathbf{x}$ sin komponent i retningen til $\mathbf{y}$. Vektoren

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$$

kalles $\mathbf{x}$ sin **ortogonale projeksjon** på $\mathbf{y}$.

$\boxed{4}$ Inspirert av alt over, klarer du nå å finne en ortogonal egenvektormengde til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$



$\boxed{5}$ Vis at $A^T = A^{-1}$ dersom kolonnene i en kvadratisk matrise er ortonormale.

$\boxed{6}$ Vis at dersom $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k$$

er

$$c_k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k}.$$

Dersom vi har en matrise med ikke ortogonale kolonner, kan vi bruke projeksjonen

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$$

til å lage en matrise med ortogonale kolonner som spenner ut det samme vektorrommet. Dette kalles Gram-Schmidts metode, og du finner den her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process`

$\boxed{7}$ Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{8}$ Skriv en rutine i python eller matlab som Gram-Schmidter en matrise.

$\boxed{9}$ Gram-Schmidt polyhomene $\{1, x, x^2, \cdots\}$. Dersom du gjør det riktig, skal du få ut legendrepolynomene.

Ortogonale matriser brukes til å holde styr på rotasjoner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix`
Mengden av alle ortogonale $n \times n$-matriser kalles den spesielle ortogonale gruppen, $SO(n)$. Dette er et eksempel på noe som kalles en Lie-gruppe, etter den store norske matematikeren Sophus Lie: [1]
`https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie`

$\boxed{10}$ Finn en 3×3-matrise som roterer vektorer $\pi/4$ radianer om linjen $(1, 1, 1)$.

[1] Sophus Lie leverte seriøse bidrag til forståelsen av differensiallikninger, men det er kompliserte greier. Jeg skjønner ingenting av det.

Ukens nøtter

Det går an å skrive projeksjonen

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$$

som

$$P\mathbf{x}$$

der P er noe som kalles en projeksjonsmatrise.

1. Finn et uttrykk for P.
   (Hint: `https://en.wikipedia.org/wiki/Outer_product`)

2. En generell projeksjonsmatrise P er definert ved likningen

$$P = P^2$$

Denne likningen sier at det ikke skjer noe nytt om man benytter projeksjonen for andre gang. Vis at egenverdiene P kun kan være 0 eller 1.