32 - KJERNEREGELEN

Arbeidshesten dette semesteret er funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^m$. Vi har så vidt smakt på dette i forrige semester, men nå kommer det altså for fullt, for uten god forståelse av disse blir det umulig å forstå matematisk fysikk.

La oss begynne med å skrive ned noen helt grunnleggende ting. Det er lurt å tenke på $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som en søylevektor:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

og på den deriverte som en $m \times n$-matrise:

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Denne kalles jacobimatrisen til $\mathbf{F}$. Nå ser vi hvorfor det i forrige semester var lurt å venne seg til å skrive gradienten til en funksjon fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}$ som en rekkevektor:

$$\nabla g = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right]$$

og farten til en parametrisert kurve på høykant:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

for disse derivasjonene passer inn i $m \times n$-systemet over. [1] La oss nå ta noen meningsløse regneoppgaver for å trene litt på dette.

$\boxed{1}$ Et meningsløst vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og et annet ved

$$\mathbf{G}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

Finn jacobimatrisene til $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$.

[1] Det er fullt mulig å bytte konvensjon og skrive gradienten som søylevektor og parametriserte kurver på lavkant, så lenge man er konsistent.

Nå kommer en av de store fordelene med å ha lært matriseregning.

Kjerneregelen i flere variable

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, og la $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ være gitt ved $\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{G})$. Da er $D\mathbf{H}$ gitt ved matriseproduktet mellom $D\mathbf{F}$ og $D\mathbf{G}$:

$$D\mathbf{H} = D\mathbf{F}D\mathbf{G}$$

Dette er altfor teknisk å bevise for oss. Dersom du går med en liten matematikkstudent i dypet av deg selv et sted, kan du slå opp i Lindstrøm og se hvor mye jobb det er.

$\boxed{2}$ Finn jacobimatrisen til $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{z}))$.
($\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ som i oppgaven over.)

$\boxed{3}$ Du går en skitur langs trajektorien gitt av $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ på et fjell gitt av $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fjellfunksjonen f måles i meter (både inn og utvariable), mens $\mathbf{x}$ tar inn tid og gir ut meter i hver koordinat. Bruk kjerneregelen til å forklare at

- antall høydemeter per tidsenhet er gitt ved $\nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}$
- antall momentane høydemetre per lengdemeter er gitt ved $\nabla f \cdot \mathbf{T}$
- du må peke skiene i retningen gitt av ∇f dersom du bestemmer deg for å kjøre rett utfor, så bratt som overhodet mulig
- du må peke skiene normalt på ∇f dersom du vil følge ekvidistanselinjen [2]

$\boxed{4}$ Du går en skitur på fjellet $h(x, y) = 1 - x^2 - xy - y^2$, og står i punktet $(1/2, \sqrt{3})$, og har farten $\dot{\mathbf{x}}(t) = (1/2, 1/3)^T$. Finn

- antall høydemeter per tidsenhet
- antall momentane høydemetre per lengdemeter
- retningen du må peke skiene dersom du vil kjøre rett utfor, så bratt som overhodet mulig
- retningen du må peke skiene dersom du bestemmer deg for å følge ekvidistanselinjen

[2] En ekvidistanselinje eller høydekote eller nivåkurve til en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er alle punkter som passer i likningen

$$f(\mathbf{x}) = c$$

der c er en eller annen konstant. Forskjellige konstanter gir forskjellige ekvidistanselinjer.

Siden dere går elektroteknikk, er det lurt å studere coloumbkraften for å få et praktisk eksempel på funksjoner fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. Men det er et problem med dette. Dersom en elektrisk ladning begynner å bevege seg i coloumbfeltet, skaper det et magnetfelt, og da må man plutselig løse Maxwells likninger for å regne ut bevegelsen. Det er litt for komplisert for oss nå, men målet er å begynne å fikle med det etterhvert.

Det er derfor lurt å først studere en annen lov som er matematisk sett helt identisk med Coulombs lov, nemlig Newtons gravitasjonslov. Den sier at gravitasjonskraften mellom legemer er en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved [3]

$$F(\mathbf{x}) = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},$$

der m_1 og m_2 er massene, og $G = 6.674\dot{1}0^{-11}$ kubikkmeter per kg per sekund per sekund. Den ene massen sitter i origo, den andre i $\mathbf{x}$, og koordinatsystemet er festet i massen m_1.

$\boxed{5}$ Gravitasjonspotensialet til en masse m er gitt ved

$$V(\mathbf{x}) = -Gm\frac{1}{\|\mathbf{x}\|},$$

Denne er helt analog til spenningen til et elektrisk felt, og gradienten til potensialet blir gravitasjonsfeltet. Finn denne gradienten og forklar forholdet til gravitasjonskraften.

$\boxed{6}$ En ellipse med halvakser $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene, tilfredsstiller likningen

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3.$$

og har parametrisering

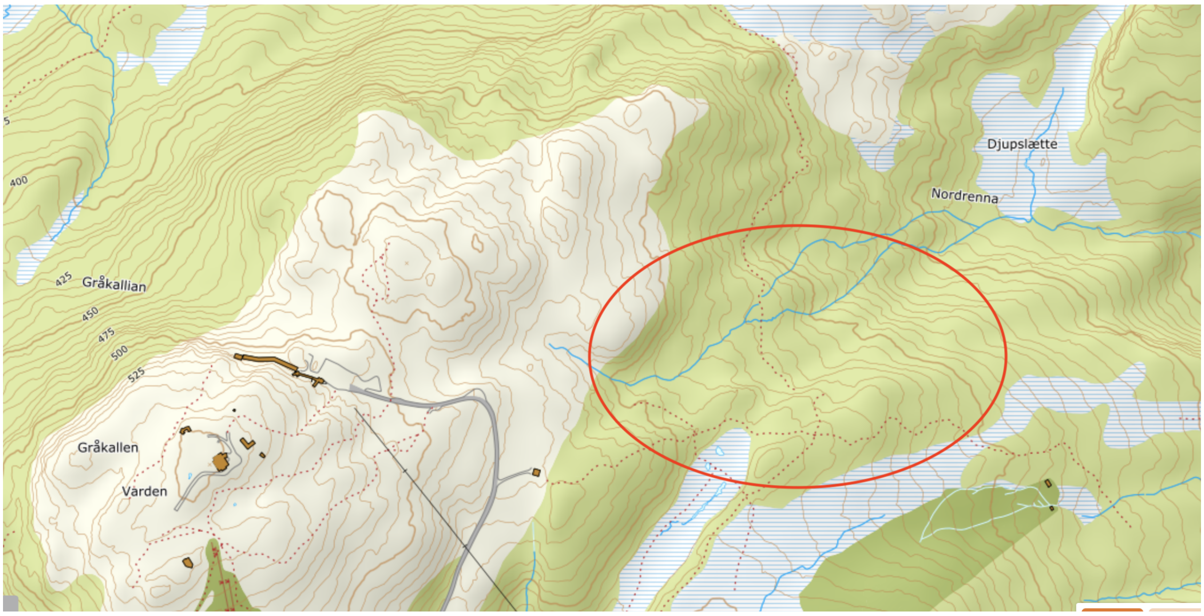
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos(t + \pi/3) \end{pmatrix}$$

Et romskip beveger seg langs denne trajektorien i (x_1, x_2)-planet. Finn det punktet der gravitasjonspotensialet er størst.

[3] Denne loven er presis nok til at Newton kunne regne på solens gang rundt jorden for hånd på slutten av 1600-tallet. Det er visst noen ting med Merkurs presesjon som ikke stemmer helt med loven, og å regne på store galakser er bare å glemme.

Oppgaven over kan løses på mange forskjellige måter. Du kan få den til bare med å tenke litt logisk, og så bruke det du vet om cosinusfunksjonen. Men den kan også gjøres med noe som kalles Lagranges multiplikatormetode. La oss ta en titt på dette.

La oss si at du går på fjellet gitt av $z = f(x, y)$ og at gps-tracken din er gitt av en kurve med likning $g(x, y) = 0$. I figuren under er en person ute og går på Gråkallen. Ekvidistanselinjene på kartet er nivåkurvene til f, og vedkommende går en elliptisk tur gitt av den oransje kurven.



$\boxed{7}$ Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle, altså at

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

for en konstant λ.
(Hint: se nøye på ekvidistanselinjene, og husk på kjerneregelen.)

$\boxed{8}$ Du går på fjellet

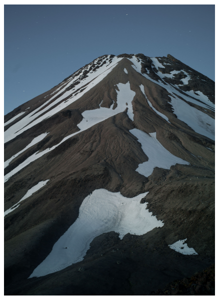
$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

langs med trajektorien gitt ved $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Finn det høyeste punktet på turen din.

$\boxed{9}$ Finn et uttrykk for fjellet

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

sin skjæringskurve med (x, y)-planet. Hva slags kurve er det? Finn en parametrisering!

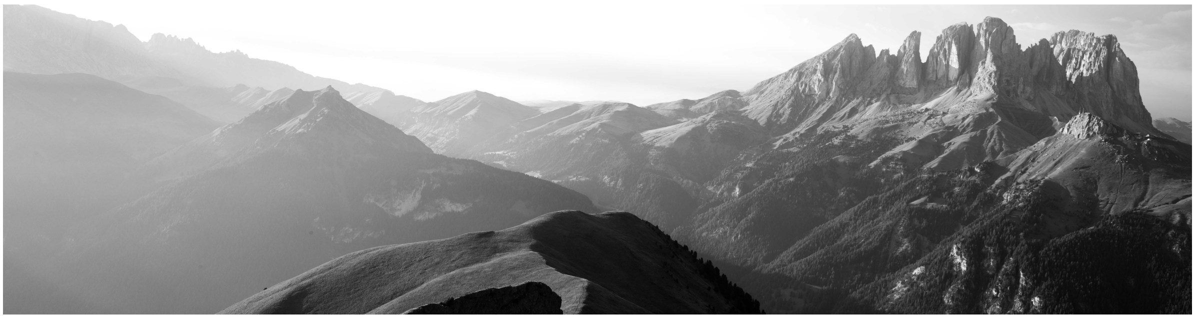


La oss si at du står på toppen av et fjell gitt av $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$\boxed{10}$ Hva er ∇f på toppen?

$\boxed{11}$ Hva er ∇f i bunnen av krateret i en vulkan?

$\boxed{12}$ Hva er ∇f i et sadelpunkt mellom to fjelltopper?



$\boxed{13}$ Utled Taylors andreordens formel for en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

der

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(Hint: Send en rett linje gjennom $\mathbf{x}$ i retning $\mathbf{h}$ og bruk kjerneregelen.)

$\boxed{14}$ Det neste leddet er av orden $\|\mathbf{h}\|^3$, men det griseriet skal du spares for å utlede. Sett ord på dine følelser om hvordan hessematrisen $\mathbf{H}$ kan brukes til å finne ut om et kritisk punkt er et maksimums-, minimums- eller sadelpunkt.

LITTERATUR

Dette er stoff man finner overalt. Adams kap. 12, Kreyszig kap. 9 og Lindstrøm kap. 2.

EKSAMENSOPPGAVER