31 - MER DOBBELTINTEGRAL

La oss begynne med å trene litt mer på dobbeltintegraler. I forrige semester lærte vi hvordan man beregner volumet under grafen til

$$z = f(x, y)$$

ved dobbeltintegral.

$\boxed{1}$ Brygg deg en kopp kaffe eller noe annet og les kap. 14.1-14.4 i Adams.

La oss nå repetere eksamensoppgaven.

$\boxed{2}$ La

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

der D er trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,1)$. Forklar at

$$\int_0^3 \int_0^{x_1/3} f(x_1, x_2)\, dx_2 x_1 = \int_0^1 \int_{3x_2}^3 f(x_1, x_2)\, dx_1 x_2$$

Her kommer noen klassikere fra TMA4105.

$\boxed{3}$ Skisser integrasjonsområdet og regn ut

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + 2y)\, dx\, dy.$$

(Hint: du må kanskje bytte integrasjonsrekkefølge.)

$\boxed{4}$ Samme her:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \cos \frac{\pi}{4}(3x - x^3)\, dx\, dy.$$

$\boxed{5}$ Skisser og bytt integrasjonsrekkefølge:

$$V = \int_0^3 \int_0^{y/3} f(x, y)\, dx\, dy + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx\, dy$$

I uttrykket for standardnormalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

er det en multiplikasjonsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som skyldes at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Vi vet at $e^{-x^2/2}$ ikke kan antideriveres på noen enkel måte, men nå skal vi endelig få has på integralet over allikevel. Vi må tilsynelatende begynne på et helt annet kontinent, så hold ut.

$\boxed{6}$ La

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

der D enhetssirkelskiven.

Å sette opp integralet i oppgaven over, er ikke så vanskelig dersom man husker likningen for enhetssirkelen:

$$\iint_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2 + xy + 1 \; dydx$$

Dette går beregne, men det blir hårete å regne ut. Hadde det ikke vært utrolig mye enklere om vi bare kunne skrive

$$\iint_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + \cos\theta \sin\theta)\; rd\theta dr\ ?$$

Det kan vi nemlig. Målet med denne økten er å skjønne hvorfor. Integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

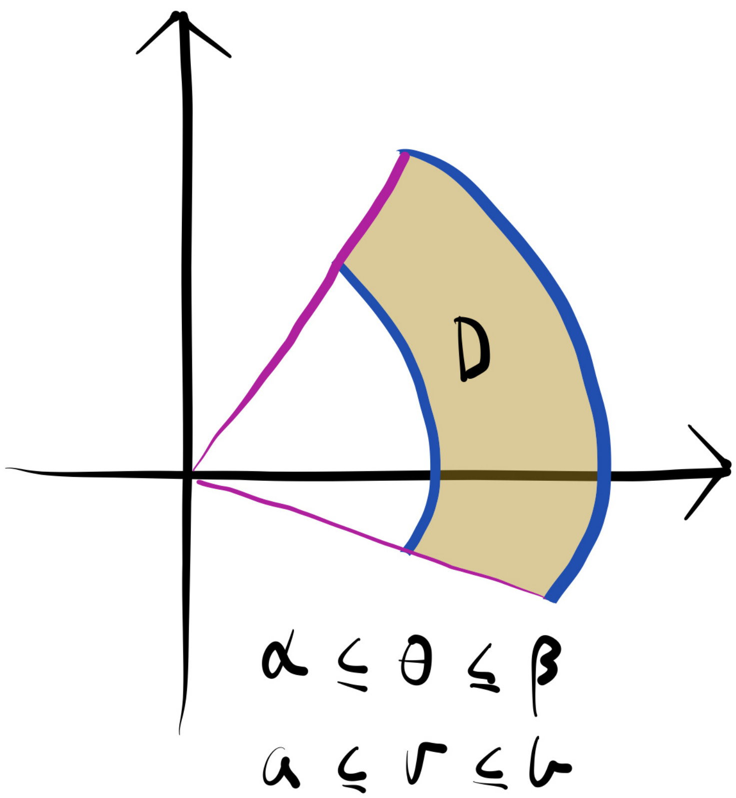
får vi en passant.

La oss begynne med å introdusere en viktig funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) \\ x_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

I en typisk kalkulusbok kalles dette en koordinattransformasjon, og du har allerede vært borti den i forbindelse med komplekse tall. Koordinatparet (r,θ) kalles polarkoordinater.

$\boxed{7}$ Et område D begrenset av $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ og $1 \le r \le 2$. Skisser dette området i x_1x_2-planet, og finn arealet på en eller annen måte.
(Hint: Figuren under kan kanskje være til hjelp.)



$\boxed{8}$ La

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) \\ x_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

og regn ut **jacobideterminanten**

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

og forklar hvorfor arealet er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \, dr d\theta$$

(Sikkert lurt å lete etter svaret i Adams.)

Kanskje neste oppgave er til hjelp?

$\boxed{9}$ En ting formet som området D over har massetetthet gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Forklar at massen er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\mathbf{x}(r,\theta)) \left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right) \, dr d\theta$$

$\boxed{10}$ En hytte har tak gitt ved $f(x,y) = 1 + x + y$ og grunnflate lik den delen av enhetsirkelen som ligger i første kvadrant. Forklar at volumet blir

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 + x + y \, dy dx$$

og regn ut både i kartesiske og polarkoordinater.

Hvis du nå har skjønt polarkoordinater, kan du muligens klare neste oppgave. Eller, den er litt vanskelig, så kanskje du ikke klarer det selv, men du er ihvertfall i stand til å forstå løsningen.

$\boxed{11}$ Regn ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

(Hint: du må antagelig slå den opp, men den står i Adams.)

Hvis du skjønte alt over, er du kanskje klar for noen nye flere koordinattransformasjoner. Trikset er alltid det samme, du må finne en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at integrasjonsområdet ditt blir verdimengden dersom definisjonsmengden er rektangulær.

$\boxed{12}$ Finn en koordinattransformasjon som funker dersom integrasjonsområdet er ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

og beregn jacobideterminanten.

$\boxed{13}$ Hva med området mellom parablene $y = ax^2$, $y = bx^2$, $x = cy^2$ og $x = dy^2$?
(Hint: Adams eksempel 14.4.8)