29 - FOURIERTRANSFORM

I forrige semester var intervallet alltid $[-\pi, \pi]$. Dette var fordi vi på Institutt for Matematiske Fag er en grei gjeng. I dette semesteret må det hardere lut til. La $x : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ være et signal. Vi definerer x sin fourierrekke som

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

der

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi int/T}\, dt,$$

og håper at det går greit å skrive

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}.$$

$\boxed{0}$ Finn fourierrekken til $y : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

for alle $T > 2$, og lag et plot av både y og fourierrekken på intervallet $[-T, T]$ for noen forskjellige verdier av T. Hva konvergerer fourierrekken til i $t = 1$?

Dette eksemplet illustrerer hvorfor vi skriver

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

og ikke

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

Fourierrekken til y konvergerer til som oftest $y(t)$ for stort sett alle t, men det er en og annen verdi som er litt problematisk.

Men eksemplet illustrerer også en annen ting. La oss si at du ønsker å finne fourierrekken til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Er dette i det hele tatt mulig? Kanskje det går an å finne fourierrekken til y i oppgaven over, og så la $T \to \infty$? Hvordan ville det sett ut? Vi vet at

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}$$

der

$$c_n\,(T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-2\pi int/T} dt$$

La oss sette denne inn i fourierrekken:

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-2\pi ins/T} ds \; e^{2\pi int/T}$$

og gange og dele med 2π:

$$y(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-2\pi ins/T} ds \; e^{2\pi int/T} \frac{2\pi}{T}$$

Det er sikkert ikke så lett å se, men den ytterste summen kan nå tolkes som en riemannsum der gitteravstanden er $\frac{2\pi}{T}$, og gitterpunktene er $\frac{2n\pi}{T}$. Når $T \to \infty$ går gitteravstanden mot null, og dersom det er rettferdighet i verden, går $y \to x$ og summen mot et integral fra uendelig til uendelig:

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{-i\omega s} ds \; e^{i\omega t} d\omega$$

Her ble "variabelen" $\frac{2n\pi}{T}$ om til variabelen ω. Det innerste integralet kalles fourieromvendingen til x, og skrives

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

Dette kan du tenke på som fourierkoeffisientene til signalet x, men siden signalet ikke er periodisk, trenger du mange flere frekvenser, og derfor blir rekonstruksjonen

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et integral istedet for en uendelig sum, slik vi er vant til fra fourierrekker.

$\boxed{1}$ Finn fourieromvendingen til

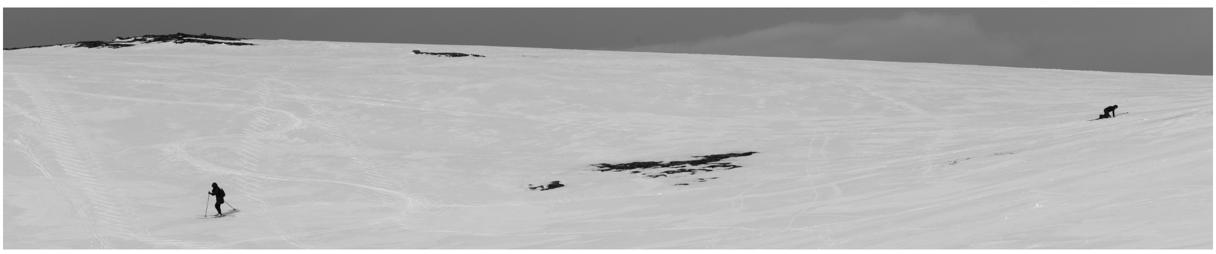
$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \le \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

og sammenlikne med en av eksamensoppgavene i TMA4106.
(Hint: det er nok letteste om du skriver $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.)

$\boxed{2}$ Finn fourieromvendingen til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

og sammenlikne med oppgave 0.



Vi skriver også

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt = \mathcal{F}\left(x\right)$$

for å understreke at fourieromvendingen er en operator som tar inn et signal og gir ut et annet. Det går an å vise at dersom x er et tilstrekkelig pent signal, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

men det er litt for hardt for oss å gjøre ordentlig. [1] Fourieromvending er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen, men dersom du er komfortabel med fourierrekker og lineære systemer, er du nok godt rustet til å skjønne hva det går i. Fourieromvending er helt ekstremt viktig i både matematikk og i et spektakulært utvalg forskjellige anvendelser:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`

La oss nå regne ut et par omvendinger.

$\boxed{3}$ Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$$

Hva skjer med fourieromvendingen når $a \to \infty$?

$\boxed{4}$ Finn fourieromvendingen til diracpulsen.

$\boxed{5}$ Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

I de to neste oppgavene må du nesten anta at inversformelen gjelder, og bruke de foregående oppgavene.

$\boxed{6}$ Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

$\boxed{7}$ Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

[1] Les som sagt Stein om du lurer på hvordan det "egentlig" henger sammen.

Fourieromvendingen er en lineæroperator siden riemannintegralet er det:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{ax+by\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t)+by(t))\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}\, dt = aX(\omega)+bY(\omega)\end{aligned}$$

Det er lett å se, men allikevel viktig. En mindre innlysende, men veldig viktig regneregel er:

$$\mathcal{F}(\dot{x}) = iw\mathcal{F}(x)$$

$\boxed{8}$ Vis dette (hint: delvis integrasjon). Hva må du anta om x for at formelen skal gjelde?

Et signal fra den virkelige verden må både starte og stoppe, og derfor er det naturlig å tenke at

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$

for alle signaler du kommer til å støte på. I forrige oppgave trengte du også at

$$\lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Dersom vi skal være matematisk helt trygge på at vi har

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

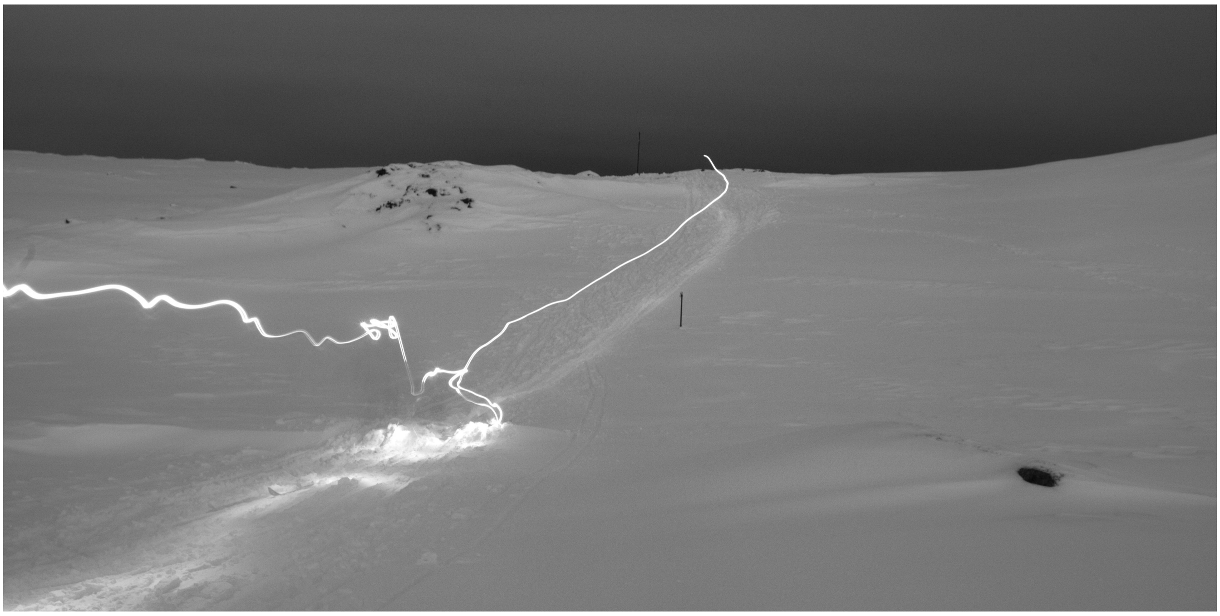
bør x være glatt og

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^k \left|\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right| < \infty$$

for alle k og n. Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på en mer komplisert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tyvende århundre. Vi har allerede fourieromvendt funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet, så vi får bare lukke øynene og håpe at det går bra.

Nok om det. Her er flere regneregler. La $\mathcal{F}(x) = X$. Vis at:

$\boxed{9}$ $\mathcal{F}\{x(t-\theta)\}) = e^{-i\omega\theta}X(\omega)$ $\boxed{10}$ $\mathcal{F}\{e^{i\theta t}x(t)\}) = X(\omega-\theta)$ $\boxed{11}$ $\mathcal{F}\{x(at)\}) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$



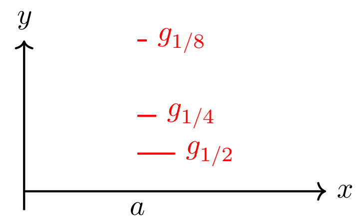
Dersom du har diracpulsens mysterier i ryggraden, kan du hoppe over denne siden. Dersom du synes diracpulsen er mystisk, bør du kanskje lese videre.

Diracpulsen er ikke en funksjon:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function`.
Men i starten kan man tenke på den som

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \neq 0 \\ \infty & \text{for } t = 0. \end{cases}$$

Her er en mer presis definisjon. La

$$g_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & \text{for } a < t < a+k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



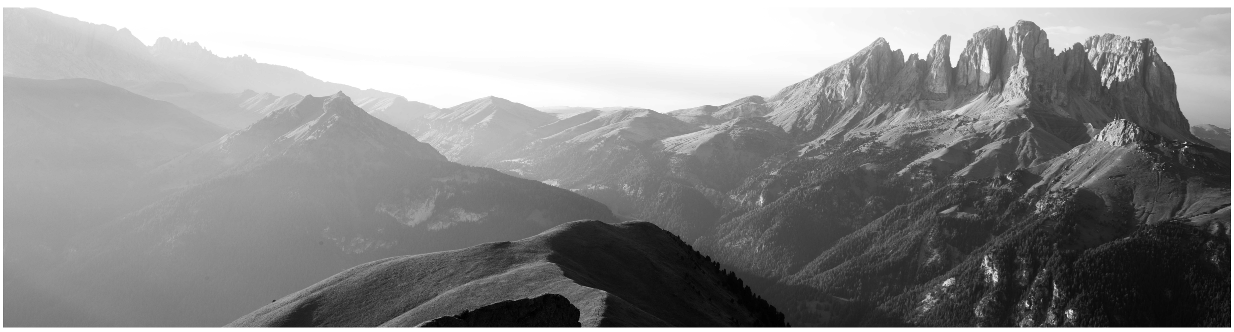
Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \to 0} g_k(t) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Deltafunksjonen brukes til å modellere impuls, altså energitilførsler der den påtrykte kraften er ekstremt høy og ekstremt kortvarig, for eksempel hammerslag eller høye smell. Man kan også tenke på den som noe som plukker ut funksjonsverdier fra integraler:

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_a^{a+k} f(t)\,dt = f(a).$$

Deltafunksjonen er strengt tatt ikke noe funksjon, og heavisidefunksjonen er ikke deriverbar. Det kan allikevel være fruktbart å tenke på deltafunksjonen som et forsøk på å sette opp den deriverte til heavisidefunksjonen. Deltafunksjonen er et viktig verktøy i signalbehandling, for den er et signal som inneholder like mye av alle frekvenskomponenter. Det sies at Asbjørn Krogstad (legendarisk professor i akustikk på NTH) tok med seg startpistol og fyrte av et skudd inne i Nidarosdomen i forbindelse med et oppdrag der han skulle analysere akustikken i rommet. Deltafunksjonalens oppfinner Paul Dirac fikk nobelprisen i 1933 med Erwin Schrödinger for sitt arbeid med kvantemekanikk: [2]
`https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac`.



[2] Etter Dirac har vi en måleenhet for ordstrøm - en dirac = et ord i timen. Dette var hans gjennomsnittlige frekvens.

Nå skal vi ta en titt på noe veldig klassisk. La L være en lineær og tidsuavhengig differensiallikningsoperator. Dette betyr at L representerer venstresiden i en lineær og tidsuavhengig differensiallikning, LTI på kortform. For eksempel er

$$L(y) = \ddot{y} + \dot{y} + y$$

dersom vi studerer differensiallikningen

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = x.$$

Fordelen med dette er at vi nå kan skrive ting likninger litt mer kompakt som

$$L(y) = x.$$

Hvis du har løst et par differensiallikninger i ditt liv, vet du at x er en gitt funksjon, og y er den ukjente. I kretsteorien betyr dette noe sånt som at man for eksempel har en spenningskilde x og så er y spenningen som kommer ut på den andre siden av kretsen. [3] Vi foretrekker å skrive venstresiden uten parenteser:

$$Ly = x$$

som et slags triks for å huske at L er en lineæroperator. [4] Vi definerer impulsresponsen h til en differensiallikning som løsningen til

$$Lh = \delta.$$

I begynnelsen fremstår nok dette som veldig rart. Nøkkelen til å skjønne hvorfor man er interessert i impulsresponsen, er fourieromvending.

$\boxed{12}$ I en oppgave over fant du fourieromvendingen til deltapulsen. Hvorfor er fourieromvendingen til impulsresponsen det samme som frekvensresponsen til systemet?

La oss si at du har designet et filter og funnet frekvensresponsen $H(\omega)$, og du ønsker å regne ut hvordan signalet y ser ut på andre siden av filteret.

$\boxed{13}$ Forklar til kantinedama hva slags informasjon man får tilgang på når man ganger fourieromvendingen til innsignalet y med H.

[3]I kretsteori går man motsatt vei og skriver $H\{y\} = x$. Det er ofte mulig å regne ut H eksplisitt ved Kirchhoffs lover, analogt til den inverse matrisen i lineæralgebra.

[4]Husk matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ fra første semester.

Men vi kan faktisk dra det enda lengre, og bruke fourieromvendingen til impulsresponsen til å skrive opp et uttrykk for utsignalet x, altså det som kommer ut på andre siden av filteret i tidsdomenet. Det finnes et merkelig produkt mellom funksjoner som kalles konvolusjon. Det er definert ved

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)\, ds$$

For å få en følelse av hva dette er, er det faktisk lurt å begynne med litt sannsynlighetsregning. La oss kaste to terninger.

$\boxed{14}$ Finn sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen som summerer antall øyne på to terninger når du kaster dem.

En av tingene som kan hjelpe i begynnelsen når man skal skjønne konvolusjon, er at sannsynlighetstettheten til en sum av to stokastiske variable. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y, med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$.

$\boxed{15}$ Hva er sannsynlighetstettheten til $X + Y$?

Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z-v$, tar $X+Y$ verdien z. Med andre ord kan $X+Y$ ta verdien z på mange forskjellige måter, og for å finne sannsynlighetstettheten til $X+Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle alle måtene det kan skje på, altså alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z-v)$. Men dette er jo innmaten i konvolusjonsoperatoren! Sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X+Y$ blir

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z-v)\,dv.$$

Vel vel, tilbake til impulsresponsen. La oss si at du har forstått at du ganger fourieromvendingen til innsignalet, $X(\omega)$, med frekvensresponsen $H(\omega)$, og du har forstått at

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

så gjenstår bare en ting for å få tak i $y(t)$, nemlig inversfourieromvending av produktet på høyresiden. Da trenger du følgende teorem, som kalles konvolusjonsteoremet. Hvis x og y er glatte, og alle deriverte synker raskt nok når $|x| \to \infty$, er

$$\mathcal{F}(x * y) = 2\pi\, \mathcal{F}(x)\, \mathcal{F}(y).$$

Dette er ikke så vanskelig å regne ut at dette mest sannsynlig stemmer, men man må kanskje ha sett det før for å få det til. Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(x(t) * y(t)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\,dv\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\,e^{-i\omega t}\,dv\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u)\,e^{-i\omega(u+v)}\,dv\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,e^{-i\omega v}\,dv\,y(u)e^{-i\omega u}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,e^{-i\omega v}\,dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\,du = \mathcal{F}\,(x)\,\mathcal{F}\,(y) = X(\omega)Y(\omega)
\end{aligned}$$

$\boxed{16}$ Forklar hvorfor utsignalet er gitt av

$$y * h$$

der h er impulsresponsen.

LITT MER ELEKTROTEKNIKK

$\boxed{16}$ Bruk laplacetransform til å finne frekvensresponsen til

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t}.$$

$\boxed{17}$ Utled regnereglene

$$V = \frac{I}{sC}$$

og

$$V = LsI$$

for spole og kondensator ved å laplacetransformere de korresponderende regnereglene i tidsdomenet.

Her er en viktig og vanskelig en:

$\boxed{18}$ Finn fourieromvendingen til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $x(t) = e^{-t^2}$.

LITTERATUR

Det er ikke så mange grunnleggende matematikkbøker som behandler fouriertransform. Dette har kanskje sammenheng med at fouriertransform vanligvis ikke undervises så tidlig i studiet som vi gjør, men for mange ingeniører er fouriertransform altfor viktig til å utsettes til senere.

Tveito og Winther: "Introduction to Partial Differential Equations" behandler fourieromvending i kap. 12, mens Boggess og Narcowich: "A First Course in Wavelets with Fourier Analysis" behandler det i kap. 2. Dette er kanskje de beste referansene for vårt nivå.

Artikkelen om fourieromvending på Wikipedia er ganske bra:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`

Dersom du har lett for matematikk og er ordentlig interessert, kan du prøve å lese Stein og Shakarchis "Fourier Analysis: An Introduction". Denne er allerede blitt en klassiker, til tross for at den er utgitt første gang i 2003, men holder et noe for høyt nivå for oss.