TMA4101/4106/4111/4121

27 - KVADRATUR

Hvis du sitter på en øde øy og trenger å finne arealet under en kurve til høy presisjon med penn og papir, kan du bruke riemannsummer, men det finnes bedre teknikker. Dette kalles **kvadratur**: https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration

La oss si at vi ønsker å finne en approksimasjon til

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lagranges interpolasjonspolynom

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$

gir en enkel strategi for numerisk integrasjon. Vi deler $[a, b]$ i et eller annet gitter med $a = x_0$ og $b = x_n$, og skriver

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\,dx$$

Integralene

$$w_k = \int_a^b l_k(x)\,dx$$

kalles **vektene** og er trivielle å beregne siden l_k er polynomer. Formelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kalles en **kvadraturregel**.

$\boxed{1}$ Hvis du tar $n = 1$ i formelen over, får du en metode du allerede kan. Hvilken?

For $n = 1$ får man trapesregelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule
Det finnes mange mange kvadraturregler, og vi har i bunn og grunn bare en ting å variere på, nemlig gitteret. For høyere presisjon kan vi skru opp n og variere på hvordan gitterpunktene er fordelt på $[a, b]$. Når gitteret er ekvidistant:

$$x_k = a + kb/n \qquad\qquad 0 \leq k \leq n$$

kalles det **Newton-Cotes-kvadratur**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Cotes_formulas

Dersom gitteret er nullpunktene til chebyshevpolynomene, får du **clenshawcurtiskvadratur**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Clenshaw-Curtis_quadrature

og dersom det er nullpunktene til legendrepolynomene, får du **gausskvadratur**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature

Newton-Cotes for $n = 2$ er for eksempel en klassiker og kalles Simpsons metode:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s_rule

$\boxed{2}$ Finn en integrasjonsrutine og beregn

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$$

til høyest mulig presisjon. Alt er lov. Fordelen med å gjøre det i et ordentlig språk som C++, FORTRAN eller RUST, er at for-løkker går kjapt. RUST har til og med innebygget funksjonalitet for parallellisering. (Premie til den som klarer maskinpresisjon på kortest mulig kjøretid.)

$\boxed{3}$ Lag en animasjon av løsningen til varmelikningsproblemet med initialkrav $u(x, 0) = e^{-\frac{1}{x(\pi - x)}}$.