11 - TAYLORS TEOREM

Alle ting utsondrer elektromagnetisk stråling. Når du sitter og koser deg foran peisen eller er en tur hos Snåsamannen, kjenner du varmestrålingen. Dette er lavfrekvent elektromagnetisk stråling, altså elektromagnetiske bølger med bølgelengder som er for lange til å se med det blotte øye. [1] Du kan se flammen i peisen fordi flammen stråler ut elektromagnetiske bølger i det synlige spekteret, men selve peisen ser du fordi peisens overflate reflekterer elektromagnetisk stråling som kommer fra et annet sted, for eksempel fra en lampe i rommet eller dagslyset. Alt i alt er strålingen fra peisen en blanding av elektromagnetisk stråling den genererer selv og elektromagnetisk stråling som reflekteres fra overflaten.

Et svart legeme
`https://en.wikipedia.org/wiki/Black_body`
er en gjenstand som absorberer all elektromagnetisk stråling som treffer den, slik at legemets elektromagnetiske utstråling ikke er tilgriset av elektromagnetiske bølger som reflekteres av overflaten. Et svart legeme stråler ut litt av alle bølgelengder, og energien er fordelt på bølgelengdene ved noe som kalles planckfordelingen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_law`
Denne er temperaturavhengig og er gitt ved

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

der

- λ er bølgelengden
- T er temperaturen
- h er Plancks konstant
- c er lyshastigheten i vakuum
- k er Boltzmanns konstant

Integralet

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B(\lambda, T)\, d\lambda$$

forteller deg hvor mye av energien som stråles ut mellom bølgelengdene λ_1 og λ_2.

Lord Rayleigh hadde tidligere foreslått formelen

$$B(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

som stemmer ganske bra for lange bølgelengder, men bommer totalt for korte bølgelengder. Formelen er utledet med fundering i den klassiske fysikken, og skivebommen for korte bølgelengder kalles “den

[1] Synlig lys er omtrent 380-750nm.

ultrafiolette katastrofen". Planck kom frem til den korrekte fordelingen ved å anta at energi måtte være kvantifisert, og dette regnes som begynnelsen på kvantefysikken:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_mechanics`

1 Klarer du å se hvordan Plancks og Rayleighs likninger henger sammen rent matematisk?

I oppgaven over er du nødt til å kjenne til Taylors teorem. Her er noen flere spørsmål som kan besvares med samme teorem.

2 Løs likningen $x = \cos x$ med fikspunktiterasjonen og Newtons metode, og tell hvor mange iterasjoner som trengs for maskinpresisjon. Begynn på noe nært, for eksempel $x_0 = \pi/4$. Kan du forklare hvorfor Newtons metode konvergerer kjappest? Prøv en mye dårligere initialgjetning, for eksempel $x_0 = -10$. Kan du forklare hvorfor fikspunktiterasjonen lykkes, mens Newton bommer katastrofalt?

3 Løs Newtons avkjølingsproblem

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \qquad\qquad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers ekspisitte metode

$$T_{n+1} = T_n + h(2 - T_n)$$

og med trapesmetoden

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{2}(2 - T_n + 2 - T_{n+1})$$

og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen

$$T(t) = 2 - \frac{19}{10}e^{-t}.$$

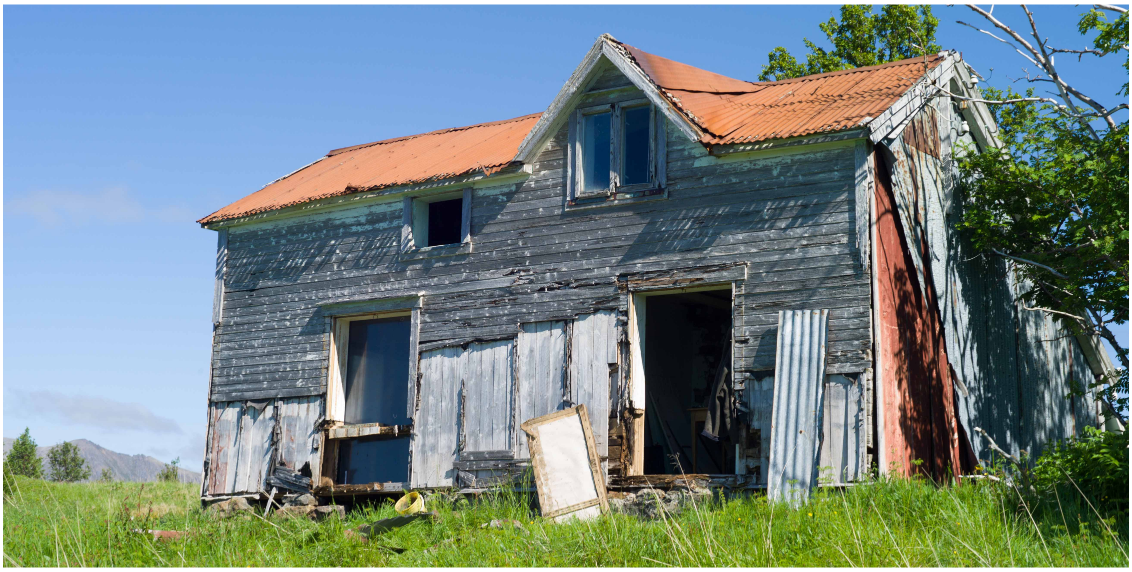
Bruk et litt grovt tidssteg, for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?
(Hint: Trapesmetoden trenger ikke numerisk likningsløser i hvert tidssteg; siden likningen er lineær kan du bare løse for T_{n+1} med penn og papir.)

4 Det er faktisk slik at dersom A er en kvadratisk matrise, er

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + A^2/2 + A^3/6 + \cdots$$

en naturlig definisjon på e^A. Hæ?

Her kommer enda en historie. Jeg har en gammel rønne på et nes helt nord i Nordland. Neset ligger på grensen mellom Øksnes og Bø ("Norges Monaco") og heter Revneset. [2] Det er hverken vei, vann, strøm eller kai der, så alt ruster, og det best å ikke skade seg eller gjøre noe dumt. Tre dyre kameraer har så langt endt sine dager i fjæra på Revneset.



I påsken 2022 satt jeg på Revneset og var til nødt til å finne vinkelen på taket, og hadde ikke tilgang på kalkulator med de inverse trigonometriske funksjonene.

$\boxed{5}$ Jeg estimerte den ene kateten til å være 15 og den andre til 19. Finn takvinkelen på en kalkulator uten arctanknapp.

[2]Uttales "Rævneset". Jeg prøvde lenge å si "Revneset" men fikk så hatten passet av de lokale, og måtte til slutt krype til korset og justere uttalen.

Det er ikke så vanskelig å estimere vinkelen dersom man har tatt skredkurs. Der lærer man at den minste vinkelen i en rettvinklet trekant der den ene kateten er dobbelt så lang som den andre er om lag 26.6 grader. Dette er nyttig å vite siden terreng på under 30 grader så og si aldri er skredfarlig, og en slik ovennevnt trekant er enkel å lage med skistavene. Men skal man finne ut at takvinkelen på Revneset er mellom 27 og 28 grader, må man nesten kjenne til formelen

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Denne typen formel kalles en potensrekkeutvikling, og ble oppdaget av Isaac Newton. I våre dager er arctan en knapp på en kalkultor, men Newton måtte regne ut alt med blyant og papir, så det trengs ikke mye fantasi til for å skjønne at en slik formel kan være gull verdt på en øde øy. [3]

Men det trengs kanskje litt fantasi for å forstå at dette henger sammen med hvofor Newtons metode konvergerer kjappere enn fikspunktiterasjonen når man løser likningen $x = \cos x$ numerisk, eller hvorfor Rayleighs formel er en approksimasjon til planckfordelingen. Nå skal vi brette opp ermene og finne ut av det. La oss først minnes noe som kalles

Analysens fundamentalteorem

La f være integrerbar på $[a, b]$. Dersom det finnes en funksjon F slik at $F' = f$, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dette er nok det de fleste tenker på når de sier at "integrasjon er det motsatte av derivasjon". For eksempel vet vi gjennom dette teoremet at siden

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$

er det veldig lett å beregne

$$\int_0^1 -2xe^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}\Big|_0^1 = e^{-1} - 1$$

Antiderivasjon er kanskje integralets minst viktige aspekt, men la oss allikevel repetere litt fra videregående skole bare for å bli varme i trøyen. Der trener man på de vanligste antiderivasjonstriksene til man blir grønn i fjeset. Først noen arealklassikere som Arkimedes fant ut av allerede 250 BC.

$\boxed{6}$ Finn arealet avgrenset av $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$.

$\boxed{7}$ Finn arealet avgrenset av $y = x^2$, $y = 1$ og $x = 0$.

Andre klassikere er de der man bare må skrive om integranden litt.

$\boxed{8}$ Regn ut

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4}\,dx$$

(Hint: faktoriser polynomet.)

[3] Etter å ha regnet ut arcustangens til $15/19$ på denne måten på telefonen og blitt veldig fornøyd med meg selv, oppdaget jeg at at man får tilgang på arctanknappen ved å legge telefonen over på siden.

$\boxed{9}$ Regn ut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx$$

(Hint: $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$.)

$\boxed{10}$ Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse.

Et annet klassisk triks, er kjerneregelen. Den er egentlig bare kjerneregelen for derivasjon i retur. Vi ser for eksempel at

$$\int 3xe^{-x^2}\ dx = 3\int xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}\int -2xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden blir komplisert, kan det være lurt å utføre dette trikset som en variabelsubstitusjon, men dette blir fort en uforståelig oppskrift (det var det ihvertfall for meg da jeg gikk på skolen) om man ikke skjønner at det er kjerneregelen som ligger i bånn for alt:

$$\int 3xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}\int e^u\ du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

$\boxed{11}$ Regn ut

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\, dx.$$

$\boxed{12}$ Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2+16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

$\boxed{13}$ Beregn

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\ dx.$$

Du husker kanskje formelen for delvis integrasjon:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$\boxed{14}$ Finn

$$\int e^x \cos x\ dx$$

med delvis integrasjon. Hvis du husker Eulers formel blir den enda lettere.

Mest sannsynlig skal du antiderivere veldig lite i ditt liv. Det er ikke antiderivasjon som er viktig. Men nå skal vi ta en teoretisk antiderivasjon og åpne horisonten litt. La oss begynne med likningen fra analysens fundamentalteorem:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

15 La $u = f'(t)$ og $v = x - t$, bruk delvis integrasjon en gang på

$$\int_a^x f'(t)\,dt,$$

og sett resultatet inn i analysens fundamentalteorem. Hva får du da?

16 Gjenta prosessen, men nå med $u = f''(t)$, og $v = (x-t)^2/2$. Hva får du da?

17 Gjenta prosessen enda en gang, men nå med $u = f'''(t)$, og $v = (x-t)^3/6$. Hva får du da?

Dersom du fikk til de tre forrige oppgavene, har du begynt på utledningen av noe som kalles

Taylors teorem I

Dersom f er $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar på et intervall som inneholder a og x, er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{n+1}(s)\, ds$$

Dette kan du tenke på som en generalisering av analysens fundamentalteorem.

$\boxed{18}$ Gå vekk fra dataen din og sjekk at du klarer å skrive ned formelen over. Den er viktig.

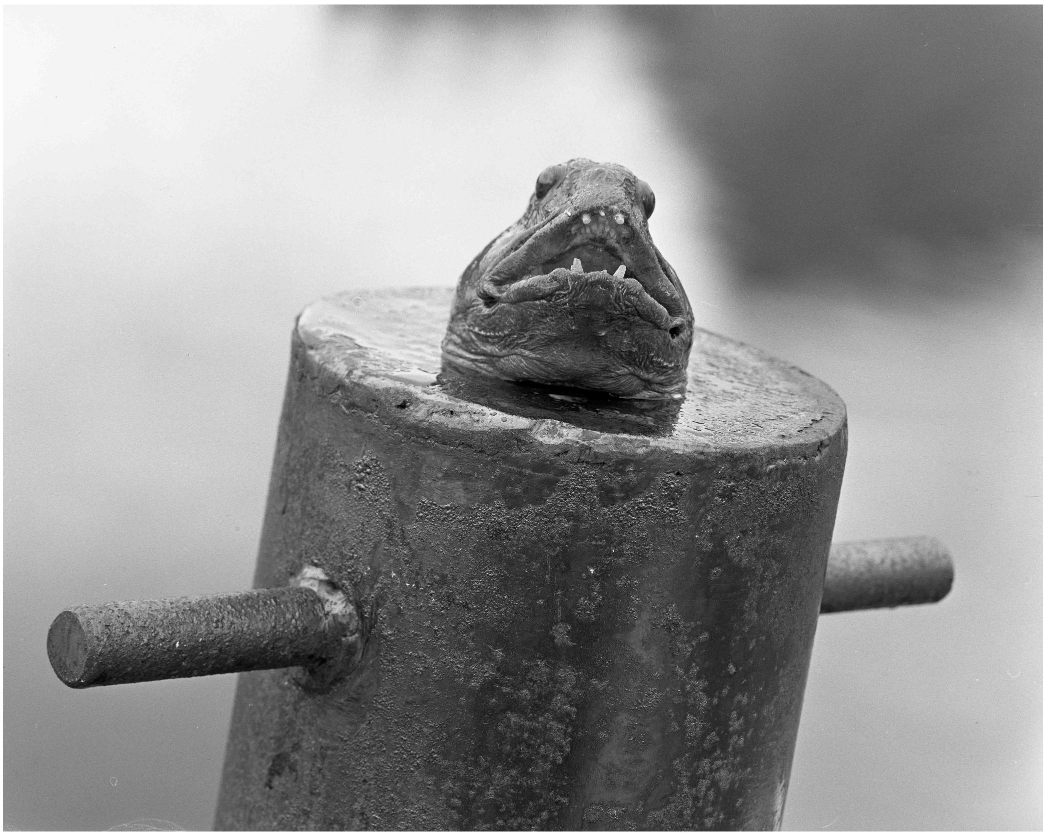
Det siste integralleddet kalles gjerne "feilen". Tar vi vekk denne, står vi igjen med

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

og uttrykket på høyresiden kalles f sitt **taylorpolynom om av orden n om punktet** a.

$\boxed{19}$ Se her:
`https://tma41x1.math.ntnu.no/14/taylors-teorem/`
og lek litt med a og n for å få en ide om hva det går i.

$\boxed{20}$ Skriv opp taylorpolynomene av orden n om $a = 0$ til eksponensialfunksjonen, sinusfunksjonen og cosinusfunksjonen og plott i python for forskjellige n. Klarer å finne mening i oppgave 4 over?



Nå begynner det å bli mulig å forklare hvorfor Newtons metode konvergerer kjappere enn fikspunktiterasjonen, men vi trenger en liten ting til.

Taylors teorem II

La f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x. Det finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Disse to teoeremene er nesten ekvivalente, forskjellen mellom dem er formen på feilleddet. Kravet om at f er $n+1$ ganger deriverbar kan slakkes i versjon I, men dette er litt for teknisk for at du trenger å bry deg med det. Forresten har jeg ikke sagt hva $n+1$ ganger deriverbar betyr ennå, men det kommer i neste uke. Vel vel. Nå kan vi ta fatt på analysen av Newtons metode og fikspunktiterasjonen.

$\boxed{21}$ Bruk Taylors teorem $n = 0$ til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

Merk ellers at for $n = 0$ er Taylors teorem bare sekantsetningen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem`
Akkurat som versjon 1 kan tenkes på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, kan versjon II tenkes på som en generalisering av sekantsetningen.

$\boxed{22}$ Studer konsekvensene av likningen i forrige oppgave. Ta stilling til om du synes det er en fornuftig påstand at fikspunktiterasjonen kan tenkes å konvergere dersom $|g'| < 1$. Kan det tenkes at fikspunktiterasjonen konvergerer raskt om $|g'|$ veldig liten?

Ok, nå blir det sikkert litt forvirrende. Newtons metode er faktisk en fikspunktiterasjon.

$\boxed{23}$ Hæ?

Jo, det er da det:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

$\boxed{24}$ Bruk Taylors teorem med $n = 1$ til å vise at det (dersom $f'(r) \neq 0$) finnes en s slik at

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

og funder på konsekvensene av dette.

Uttrykkene i oppgave 22 og 24 over kalles feilestimater. De forteller noe om hvordan feilen endres fra iterasjon til iterasjon. I det første tilfellet sier vi at vi har linæer konvergens, siden feilen i iterasjon $n + 1$ er proporsjonal med feilen i iterasjon n. I det andre tilfellet sier vi likeledes at vi har kvadratisk konvergens. Feilestimatene forklarer stort sett hvordan de numeriske likningsløserne oppfører seg.

$\boxed{25}$ Prøv å finne alle røttene til

$$p(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3.$$

$\boxed{26}$ Prøv først å finne roten $r = 1$ til

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

og til

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x - 1)^2(x - 3)(x - 4)$$

med Newtons metode. Kan du forklare hva som skjer?

$\boxed{27}$ Oppgave 3 over er litt hårete, men resonnementet går i samme baner. Vi skal se på det senere.

UKENS KJEMI

$\boxed{1}$ Bruk Taylors teorem på eksponensialfunksjonen i planckfordelingen og se om du kan finne sammenhengen mellom Plancks og Rayleighs formler.

UKENS ELEKTROTEKNIKK

UKENS REGULERING

UKENS NØTTER