7 - ANDRE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

På skolen lærte du Newtons andre lov

$$F = ma.$$

Dette er egentlig en differensiallikning, men på skolen ble du ikke plaget med annet enn konstante krefter. Vi skriver enten

$$F(x) = m\ddot{x}$$

eller

$$F(x) = \frac{d}{dt}mv.$$

Du tenker sikkert at det er rart å ha en derivasjon på massen, men Newtons andre lov sier at kraft skal være lik endringsrate i moment, og dersom du for eksempel reiser i en ting som bruker drivstoff, endrer massen seg betraktelig etterhvert som du reiser. For raketter, der drivstoffet er en betydelig del av totalvekten, er dette viktig. Vi skal ikke plages med variabel masse inntil videre, så la oss konsentrere oss om

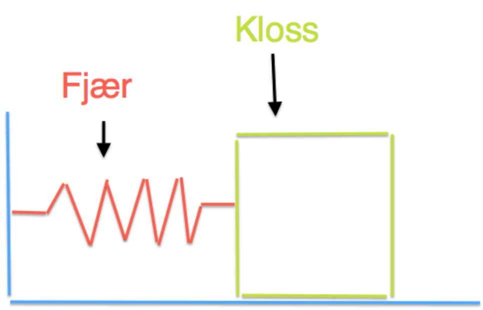
$$F(x) = m\ddot{x}.$$

Du tenker kanskje at det er snodig at kraften avhenger av den ukjente, men dette er vanlig i fysikk. La oss se på et eksempel.

En kloss sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær.

Hookes fjærlov sier at

$$F(x) = -kx,$$



der x er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert, k er en konstant som avhenger av fjærens stivhet, og $F(x)$ er kraften fra fjæren på klossen. Dersom $x(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $\ddot{x}(t)$, og Newtons andre lov blir

$$-kx = m\ddot{x},$$

der m er klossens masse.

Vi skriver vanligvis

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

og løsningen er, som du lærte på skolen,

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Dette systemet kalles en harmonisk oscillator, og løsningen er en bevegelse som aldri stopper opp.

$\boxed{1}$ Finn x dersom $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = 0$.

And now for something completely the same. På skolen lærte du også Kirchhoffs spenningslov, som sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null:

$$\sum_k v_k = 0$$

Dette også en differensiallikning, men på skolen ble du ikke plaget med reaktive elementer. En spole er er en leder som er lagt i spiral:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor`
og spenningen over spolen er proporsjonal med den deriverte av strømmen:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\dot{i}(t)$$

Merk prikken over i'en. Proporsjonalitetskonstanten L kalles spolens induktans, og er, som alt annet innen elektroteknikk, oppfunnet av Oliver Heaviside. [1]

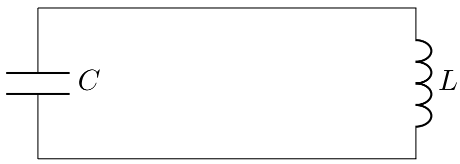
En kondensator er to plater som er fysisk adskilte, men som kan fylles opp med elektroner:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor`
Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er måkt inn på den:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i$$

Proporsjonalitetskonstanten C kalles kapasitansen, og er selvfølgelig også oppfunnet av Heaviside.

Kirchhoffs spenningslov på kretsen til høyre gir

$$L\dot{i}(t) + v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i = 0$$



eller

$$\ddot{i} + \frac{1}{LC}i = 0$$

om du foretrekker det, og løsningen er

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss.

$\boxed{2}$ Finn i dersom $i(0) = 1$ og $\dot{i}(0) = 0$.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside`

De to foregående eksemplene illustrerer hvorfor det er lurt å studere litt matematikk, selv om man ikke skal bli matematiker. Mange completely different problems innen fysikk kan analyseres kvantitativt med

NØYAKTIG DEN SAMME MATEMATIKKEN.

Hvis du går MTKJ og synes det ble litt mye mas om kondensatorer, kan jeg trøste deg med at kretsteori er ganske viktig i elektrokjemi, og at kretser med motstander og kondensatorer brukes som modeller i elektrokjemiske celler:
https://iopscience.iop.org/article/10.1149/1.1518484

Nå er det slik at de aller fleste realistiske modeller fra fysikk eller kjemi eller elektro ikke kan analyseres fullstendig med penn og papir slik som de to situasjonene over. Men det er noen unntak fra denne regelen, og akkurat disse er litt viktige å lære seg grundig fordi de bygger generell intuisjon om fysiske prosesser. Det siste du lærte på videregående skole var å løse differensiallikningen

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Begge likningene over er spesialtilfeller av denne. Dersom a skulle slumpe til å være null, blir alt helt annerledes, og derfor er det vanlig å dele ut a:

$$\ddot{x} + \frac{b}{a}\dot{x} + \frac{c}{a}x = 0$$

og så absorbere a i b og c:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

for da slipper man å skrive "med forbehold om at $a \neq 0$" hver eneste gang man skal si et eller annet og ønsker at utsagnet skal være så presist som mulig.

$\boxed{3}$ Skriv opp alle løsninger til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

for alle kombinasjoner av b og c.

For å få full oversikt over forrige oppgave, er det lurt å lære noe helt nytt om forholdet mellom eksponensialfunksjonen og de trigonometriske funksjonene. Richard Feynman kalte det "vår juvel".

Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

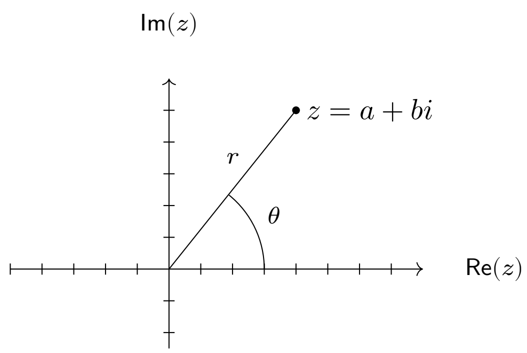
4 Du kan utlede denne formelen ved å anta at derivasjonsreglene du lærte på skolen holder også når det står en i her og der, og derivere brøken

$$\frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}.$$

Prøv. Om du ikke får det til, kan du scrolle litt nedover her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula`

Husk at r avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og at θ er vinkelen z gjør med den reelle aksen. Alle barn i barnehagen vet at

$$a = \text{Re}(z) = r\cos\theta$$
$$b = \text{Im}(z) = r\sin\theta$$



Polare koordinater

Med Eulers formel kan vi forbedre dette ganske betraktelig:

Polar form

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Følgende oppgave passer egentlig best i første klasse på gymnaset, men vi tar den med allikevel.

5 Skriv $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$ på polar form.

Nå er det ikke innlysende at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen gjelder når det står en i i eksponenten, men de gjør det. Polar form er praktisk når man skal gange og dele komplekse tall for hånd.

6 La

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

og

$$w = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Anta vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen, og beregn

$$z \cdot w \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}$$

$\boxed{7}$ Finn $e^{\pi i/2}$, $e^{\pi i}$, $e^{3\pi i/2}$ og $e^{2\pi i}$.

Nå er det imidlertid sjelden at noen ganger sammen komplekse tall for hånd etter at de har landet sin første jobb. Men de geometriske tolkningene som Eulers formel gir oss, og sammenhengen med de trigonometriske funksjonene, er viktig, spesielt om du skal drive på med signalbehandling eller liknende.

$\boxed{8}$ Vis at

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

og

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$\boxed{9}$ Kan du si noe om $\overline{z}$?

Husk ellers at

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

og

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

$\boxed{10}$ Vis at

$$\cosh(ix) = \cos x$$

og

$$\sinh(ix) = i \sin x.$$

og bruk det til å vise at

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$
$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

Og nå tilbake til differensiallikninger. Eulers formel er nyttig å kjenne til når man skal analysere transientresponser for andre ordens lineære differensiallikninger. Hvis du husker tilbake til videregående skole, husker du kanskje at læreren sa at løsningen alltid var

$$x(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Dette har noen oppdaget. La oss lete litt etter A og λ. Vi setter inn x i likningen, og får

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + Ab\lambda e^{\lambda t} + Ace^{\lambda t} = 0.$$

Nå kan vi anta at $A \neq 0$, siden $A = 0$ er en ganske uinteressant løsning. Vi vet også at $e^{\lambda t} \neq 0$, og derfor kan vi dele begge disse ut og få

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

som kalles den karakteristiske likningen, og vi lærte på skolen at

$$\lambda = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Nå finnes det tre tilfeller, alt etter fortegnet på $b^2 - 4c$ Dersom $b^2 - 4c > 0$, finnes det to reelle røtter $\lambda_1 \neq \lambda_2$, slik at

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Dersom $b^2 - 4c = 0$, finnes det bare en rot λ, og da sa læreren at løsningene er

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}.$$

Dersom $b^2 - 4c < 0$, sa læreren at løsningen var

$$\begin{aligned} x(t) =& Ae^{-\frac{b}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} t\right) + Be^{-\frac{b}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} t\right) \\ =& Ae^{\delta t} \cos(\omega_0 t) + Be^{\delta t} \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

$\boxed{11}$ Den siste er ikke så trukket ut av hatten som det kan fremstå på gymnaset. Den følger av Eulers formel. Ser du hvordan?

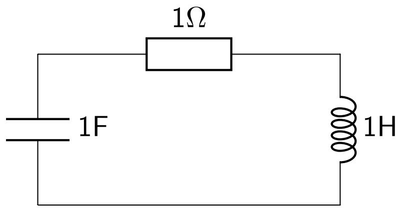
$\boxed{12}$ Sett$A = B = 1$ og plott for forskjellige verdier av resonansfrekvensen ω_0 og dempeleddet δ. Gå på nett, finn Kreyszig og slå opp i kap. 2.4 for en grei oppsummering.

$\boxed{13}$ Finn en tavle og en studiekamerat og gjenta hele denne historien, slik at du er sikker på at du forstår og husker den. Dette er viktig stoff. Ikke bruk manus.

UKENS ELEKTROTEKNIKK

Man kan bruke Kirchhoffs spenningslov og sette opp differensiallikninger for RLC-kretser.

$\boxed{1}$ Vis at kretsen



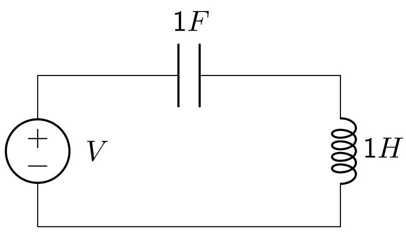
modelleres av differensiallikningen

$$\ddot{i} + \dot{i} + i = 0$$

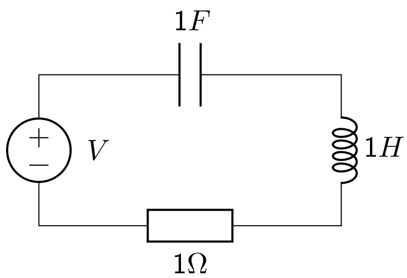
og finn alle mulige strømmer.

Det er en påtrykt spenning som er ekstremt viktig i elektroteknikk, nemlig $V(t) = e^{j\omega t}$. Vi skal komme tilbake til hvorfor i om ikke lenge. Finn differensiallikning og alle mulige strømmer i kretsen dersom $V(t) = e^{j\omega t}$:

$\boxed{2}$



$\boxed{3}$



UKENS REGULERING

I regtek er de veldig interessert i noe som kalles den naturlige responsen til et system. For eksempel er

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

en modell for støtdemperen på en bil (noe forenklet, se s. 56 her: `https://folk.ntnu.no/tronda/regtek-kurs/bok-reguleringsteknikk.pdf`)
Her er m massen som hviler på hjulet, b er en faktor som beskriver støtdemperens demping, og k er fjærkonstanten i springfjæren.

Den naturlige responsen er kort og godt den løsningen du lærte om i R2 på videregående skole. Matematikere kaller dette den homogene løsningen.

$\boxed{1}$ Plott den naturlige responsen for $m = b = k = 1$, og slå opp i Kreyszig kap. 2.4. Er dette overdempet eller underdempet? Forklar hvorfor EU-kontrollen sjekker støtdemperen. Går denne gjennom?

Vanligvis i reguleringsteknikk er man interessert i å styre et system mot en bestemt verdi. En av de grunnleggende måtene å gjøre dette på, kalles PID-regulator, se kap. 6 i Gravdahls kompendium. En PID-regulator funker slik at man måler avstanden r mellom en måling y av den ukjente x og en ønsket referanseverdi r, og så legger man på tre forskjellige pådrag basert på dette. Nå skal vi studere dette litt med penn og papir, så da setter vi $y = x$ for enkelhets skyld.

De tre heter P-regulator (P for "proporsjonal"):

$$u_P(t) = K_P(r - x)$$

I-regulator (I for "integral"):

$$u_I(t) = K_I \int_0^t r - x$$

og D-regulator (D for "derivert"):

$$u_D(t) = K_D(\dot{r} - \dot{x})$$

Alle regulatorene har hver sin unike respons på avviket, og systemets totale pådrag er summen av regulatorene:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t)$$

Denne skal inn på høyresiden i differensiallikningen:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u$$

Man styrer systemet ved å sette K_P, K_I og K_D slik at x styres mot r raskest mulig, men uten å sette regulatoren under for høyt press:
`https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller`

Når likningen er lineær og r er konstant, går det helt fint med penn og papir å regne ut hva x blir om man bestemmer seg for r. Skriv opp løsningen til

$\boxed{2}$ $\dot{x} + bx = u_P$

$\boxed{3}$ $\dot{x} + bx = u_P + u_D$

$\boxed{4}$ $\dot{x} + bx = u_P + u_D + u_I$

$\boxed{5}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$

$\boxed{6}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_D$

$\boxed{7}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_I + u_D$ (denne klarer du nok ikke, men du kan jo alltids prøve)

Ziegler-Nichols' metode er en sjalabaismetode for å tune PID-regulatorer:
https://en.wikipedia.org/wiki/Ziegler-Nichols_method
Den består i å først sette $K_I = K_D = 0$ og så sette K_P slik at man får stabile oscillasjoner. Så skrur man opp K_I og K_D til det ser bra ut.

$\boxed{5}$ Sett $K_I = K_D = 0$ og finn K_P slik at $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$ har stabile oscillasjoner.

UKENS KJEMI

PID-regulatorer er relevant for prosessteknikk, men MTKJ har ikke dette før i tredje studieår. For denne ukens andre kjemigreier, se avsnitt 2.3 i Vegards oppgavesamling:
https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/martaoppgaver.pdf