NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 11.12.2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $f : D \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 4$$

der D er ellipseskiven gitt ved

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (x_1 - x_2)^2 \leq 1.$$

a) Finn den største og minste verdien til f på D.

b) Finn volumet under grafen til f.

c) Finn overflatearealet til grafen til f.

d) Vis at f er en harmonisk funksjon.

Oppgave 2 En kurve Γ er parametrisert ved $\mathbf{z} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{t^3} \end{pmatrix}.$$

Tegn Γ og finn lengden.

Oppgave 3 Forklar hvordan egenverdiene til hessematrisen kan fortelle deg om et kritisk punkt er et maksimums-, minimums- eller sadelpunkt.

Oppgave 4 Regn ut at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Oppgave 5 La u og v være henholdsvis real- og imaginærdelen til en kompleks analytisk funksjon. Utled Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

Oppgave 6 La flaten $\mathcal{S}$ være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at en enhetsnormalvektor til flaten er gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

og at den totale fluksen til $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gjennom flaten $\mathcal{S}$ er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right) \, d\mathbf{x}.$$

Regn ut den totale elektriske fluksen til en punktladning q plassert i origo gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R.

Oppgave 7 Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled de korresponderende likningene på integralform.