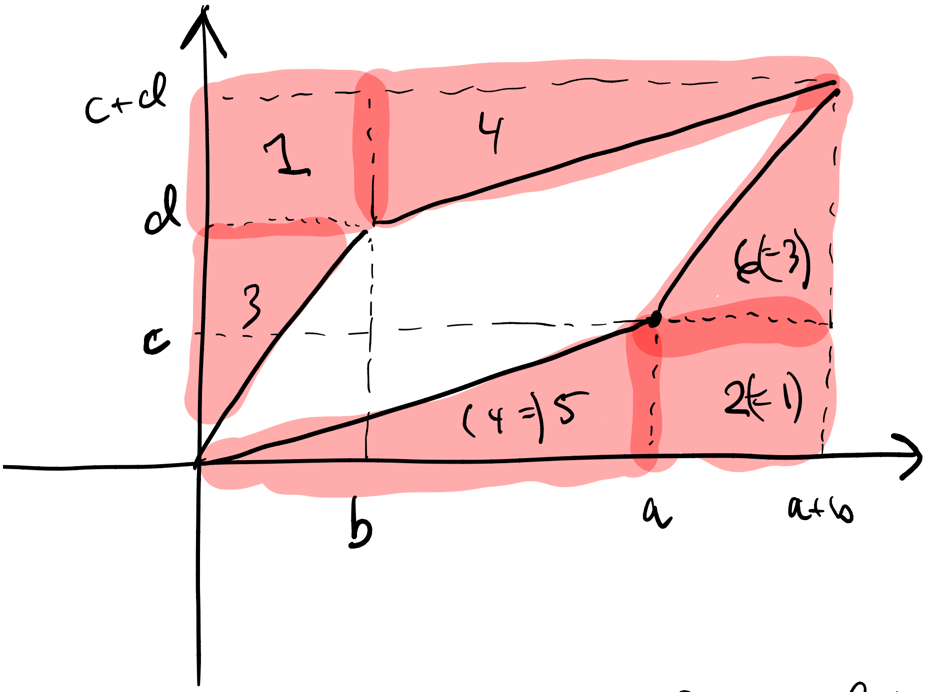
Generelle koordinattransformasjoner

Først litt repitisjon om hva determinanten betyr i 2 dim.
La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ være en lineæroperator (matrise)

A vil da transformere $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

og enhetskvadratet sendes til parallelogrammet utspent av $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



Arealet av dette parallellogrammet er verdien av determinanten

parallellogram = stor firkant − 2· liten firkant − 2· trekant 4 − 2· trekant 3

$$\det(A) = (a+b)(c+d) - 2\cdot bc - 2\cdot\left(\frac{ac}{2}\right) - 2\cdot\frac{bd}{2}$$

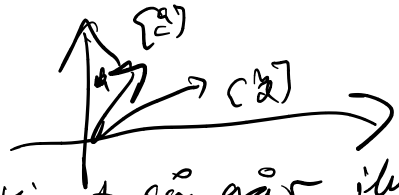
$$= \cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd}$$

$$= ad - bc.$$

det = 0 ⇒ en av vektorene er 0, eller de kollapser til samme linje.

Noen ganger er determinanten negativ

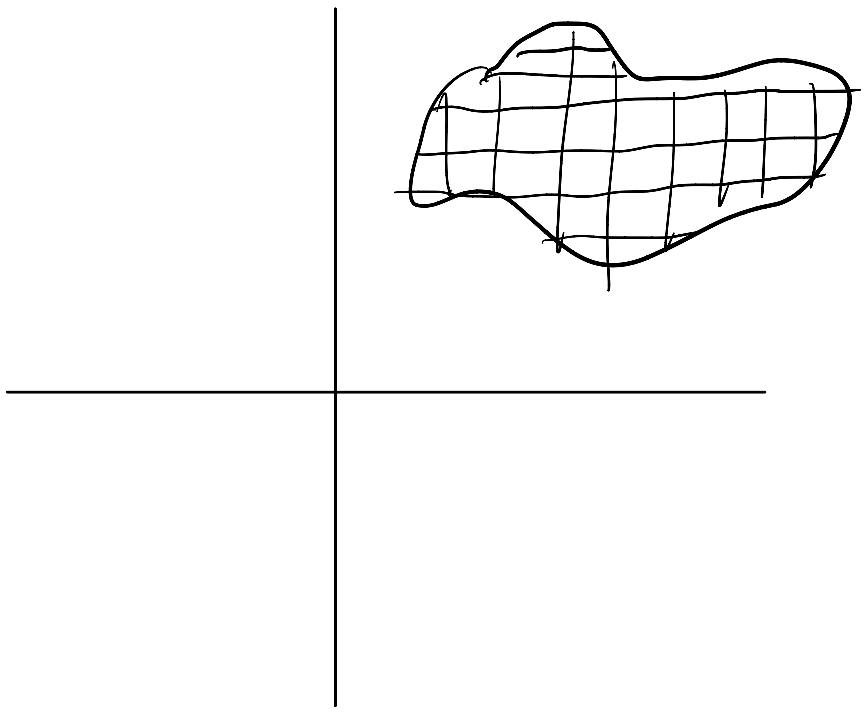
⇒ tilsvarer



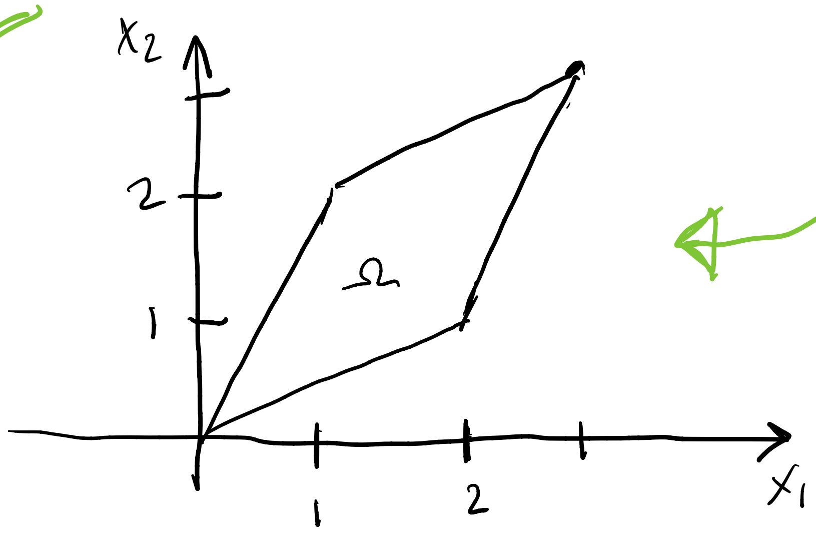
"flipping"

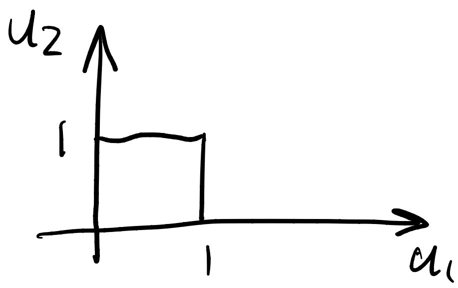
Dette bør være kjent, så går ikke nær inn på det enn å si at man må ta absoluttverdi av det. for å finne utvidelsesfaktor.

Så determinanten forteller oss hvordan et areal skalerer under en lineærtransformasjon.



ex





$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2u_1 + u_2$$

$$x_2 = u_1 + 2u_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

ganger med areal-utvidelses-faktoren

$$\iint_\Omega x_1 \cdot x_2 \, dx_1 dx_2 = \int_0^1\int_0^1 (2u_1 + u_2)(u_1 + 2u_2)\, |A| \, du_1 du_2$$

$$= 3\int_0^1\int_0^1 2u_1^2 + 5u_1u_2 + 2u_2^2 \, du_1 du_2$$

$$= 3\int_0^1 \left[\frac{2}{3}u_1^3 + \frac{5}{2}u_1^2u_2 + 2u_2^2u_1\right]_0^1 du_2$$

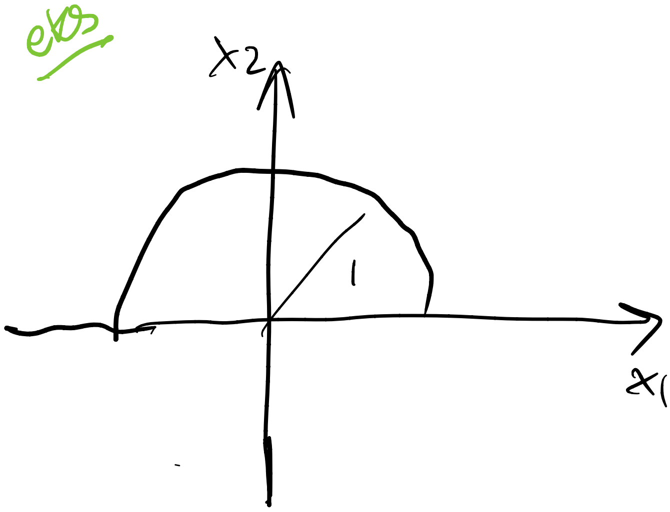
$$= 3\int_0^1 \frac{2}{3} + \frac{5}{2}u_2 + 2u_2^2 \, du_2 = 3\left[\frac{2}{3}u_2 + \frac{5}{4}u_2^2 + \frac{2}{3}u_2^3\right]_0^1$$

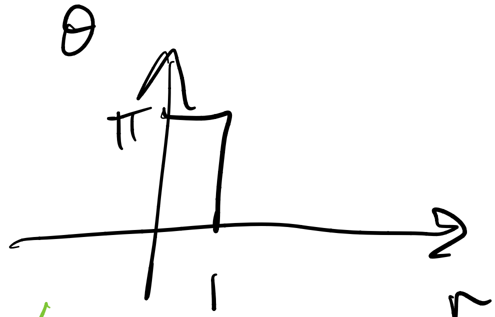
$$= 2 + \frac{15}{4} + 2 = \frac{16+15}{4} = \underline{\underline{\frac{31}{4}}}$$

Problem: Denne beskrivelsen gir bare mening hvis koordinattransformasjonen er linear!

og Den klassiske determinanten gir jo også bare mening for lineær-transf.

eks



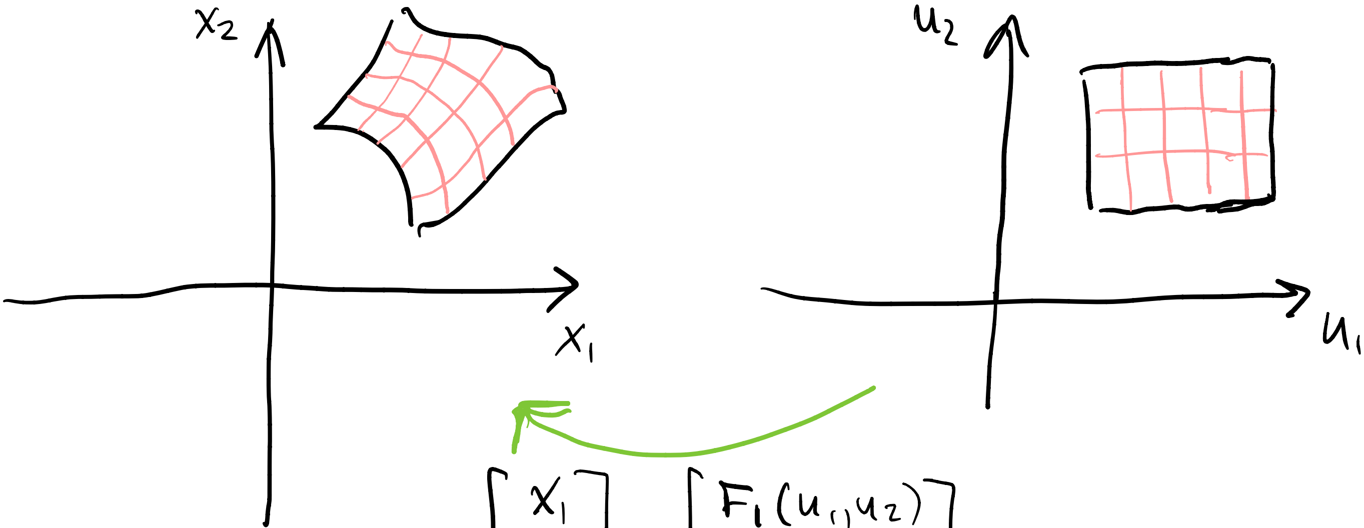


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(r,\theta) \\ F_2(r,\theta) \end{bmatrix}$$

kan ikke umiddelbart skrives som lin.transf.

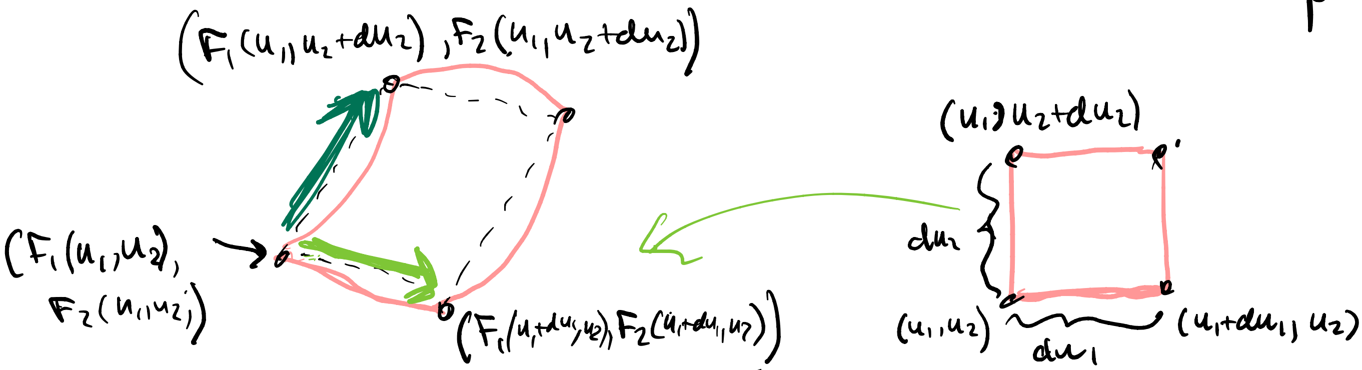
Hva gjør vi da?

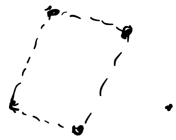
En lineærtransformasjon sender rette linjer til rette linjer, En generelle transf. (så lenge den er kontinuerlig) sender rette linjer til linjer som kan være buet.



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(u_1,u_2) \\ F_2(u_1,u_2) \end{bmatrix}$$

Når vi "zoomer inn" kan koordinat-transformasjonen tilnærmes med lineærtransformasjoner lokalt i hvert punkt.



Utvidelsesfaktoren kan tilnærmes med determinanten til lineæroperatoren som gir parallellogrammet .
I grensen når areal-elementene $du_1 du_2$ er veldig små, så er det en god tilnærming (så lenge F_1, F_2 er "glatte nok", da vil jo endringen være tilnærmet rett hvis man bare zoomer langt nok inn)

Vi finner et uttrykk for vektorene $\searrow$ og $\nearrow$.

$$\searrow = \begin{bmatrix} F_1(u_1+du_1, u_2) - F_1(u_1, u_2) \\ F_2(u_1+du_1, u_2) - F_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{F_1(u_1+du_1, u_2) - F_1(u_1, u_2)}{du_1} du_1 \\ \dfrac{F_2(u_1+du_1, u_2) - F_2(u_1, u_2)}{du_1} du_1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}(u_1, u_1) \end{bmatrix} du_1$$

Tilsvarende finner vi at $\nearrow = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \cdot du_2$

Tilnærmet "lokal" transformasjon som tar $\begin{bmatrix} du_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ til $\searrow$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ du_2 \end{bmatrix}$ til $\nearrow$ blir da

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Jacobimatrisen}$$

Arealutvidelsesfaktoren lokalt blir da

jacobideterminanten

$$J = \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(u_1,u_2) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) - \frac{\partial F_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial u_1}(u_1,u_2)$$

Generell formel

$$\iint_D f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_S g(u_1,u_2)\, |J|\, du_1\, du_2$$

$$x_1 = F_1(u_1,u_2) \qquad x_2 = F_2(u_1,u_2)$$

$$S \xrightarrow{F} D$$

J jacobimatrisen til F.

$$g(u_1,u_2) = f\big(F_1(u_1,u_2), F_2(u_1,u_2)\big) = f(x_1,x_2)$$

Noen kommentarer:

- Har skjøvet glatthet litt under teppet her...
  Viktig at F_1, F_2 har kontinuerlige førsteordens partiell-deriverte for at tilnærmingen når $du_1, du_2 \to 0$ gir mening
- Vi må ta med absoluttverdi-tegn på J.
  Kort sagt er det fordi vi i integralet kun holder oversikt over hva det nye domenet er og ikke hvilke kanter som mappes til hvilke (og evt. "flipping" av planet som gir negativt fortegn på determinanten)
- Transformasjonen F må være injektiv og $J \neq 0$ ("nesten") overalt på domenet, se eksempel om polarkoord.

Vi sjekker at jacobideterminanten gir riktig svar for polarkoord + en lineærtransf.

ex For polarkoordinater gir dette:

$$\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}$$

$$=\cos\theta\cdot r\cos\theta-(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r.$$

Kommentar

Jacobideterminanten $=0$ når $r=0$. Her er transf. F ikke injektiv ($(0,\theta)\xrightarrow{F}(0,0)$ for alle verdier av θ)

Men siden det kun skjer i ett punktet i x_1,x_2-planet, så påvirker det ikke verdien av integralet.

ex

$$x_1=2u_1+u_2=F_1(u_1,u_2)$$

$$x_2=u_1+2u_2=F_2(u_1,u_2)$$

$$|J|=|2\cdot2-1\cdot1|=|3|=\left|\det\left(\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)\right|$$