NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk Vår 2015

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Kontakt på eksamen: Jan Myrheim. Telefon: 90075172

Onsdag 27. mai 2015
kl. 09.00-13.00

Tillatne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgåvesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere bundne tilstandar til ein partikkel med masse m som bevegar seg i ein dimensjon der potensialet er gjeve ved

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq -a & \mathrm{I} \\ \alpha\delta(x) & -a < x < a & \mathrm{II} \\ \infty & x \geq a & \mathrm{III} \end{cases}, \tag{1}$$

der α er ein reell konstant. Sjå figur 1.

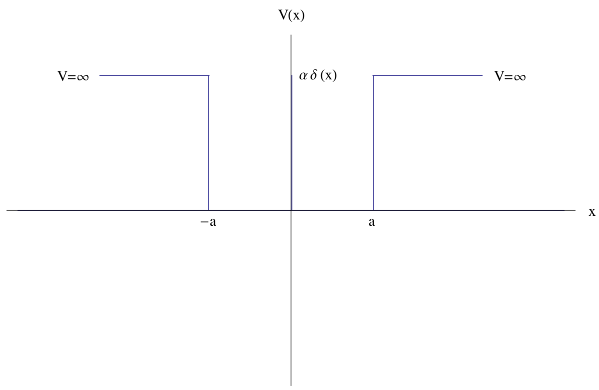

Figure 1: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 1. Her er $\alpha > 0$.

Vi skal først studere tilfellet der $\alpha > 0$. I dette tilfellet er $E > 0$.

a) Sidan potensialet $V(x)$ er symmetrisk, veit vi at eigentilstandane $\psi(x)$ til Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ kan veljast slik at dei er er symmetriske eller antisymmetriske. La oss studere dei symmetriske bølgjefunksjonane først. I området $0 < x < a$ kan ein skrive den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga som

$$\psi(x) \quad = \quad A \sin kx + B \cos kx \ , \tag{2}$$

der $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ og A og B er komplekse koeffisientar. Bruk symmetrien til $\psi(x)$ til å skrive ned den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga i området $-a < x < 0$.

b) Bruk randkravet i $x = a$ og kontinuitetseigenskapane til $\psi(x)$ i $x = 0$, til å vise at bølgjetalet k tilfredsstiller den transcendentale likninga

$$\tan(ka) \quad = \quad -\beta(ka) \ , \tag{3}$$

og uttrykk β ved hjelp av $\hbar$, m, α og a. Skisser den grafiske løysinga av (3).

c) Finn eit eksplisitt uttrykk for bølgjetalet k i grensa $\beta \to 0$. Samanlikn dette med resultatet for bølgjetalet som du kjenner for ein partikkel i boks. Finn eit eksplisitt uttrykk for bølgjetalet k i grensa $\beta \to \infty$. Forklar dette resultatet.

d) Nå tar vi for oss dei antisymmetriske løysingane. Skriv ned den mest generelle løysinga til Schrödingerlikninga i dette tilfellet.

e) I dette tilfellet kan ein finne eit eksplisitt uttrykk for bølgjetalet k og difor energien E. Finn dette uttrykket og samanlikn med energinivåa for ein partikkel i boks.

Vi skal nå sjå på tilfellet $\alpha < 0$. I dette tilfellet er $E_0 \leq 0$, der E_0 er grunntilstandsenergien.

f) Finn den normerte bølgjefunksjonen $\psi_0(x)$ for grunntilstanden når $E_0 = 0$. Kva verdi av α svarer dette til?

g) Vi skal nå sjå på tilfellet der $E_0 < 0$. Skriv ned det mest generelle uttrykket for bølgjefunksjonen til grunntilstanden for $-a < x < a$.

h) Finn ei transcendental likning for bølgjetalet i analogi med likning (3). Skisser den grafiske løysinga.

i) Bevis at det ikkje finst eksiterte tilstandar med $E < 0$.

Oppgåve 2

a) Bølgjefunksjonen $f(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$ er ein normert eigentilstand til operatorane $\hat{\mathbf{L}}^2$ og $\hat{L}_z$. Finn dei tilhøyrande eigenverdiane.

b) Dersom vi roterer denne bølgjefunksjonen ein vinkel $\frac{\pi}{2}$ rundt y-aksen, får vi ein ny bølgjefunksjon $g(\theta, \phi)$. Finn $g(\theta, \phi)$.

c) Vis at $g(\theta, \phi)$ er ein eigentilstand til $\hat{L}_x$ og finn den tilhøyrande eigenverdien. Forklar resultatet.

d) Kva er dei moglege måleverdiane viss ein målar z-komponenten av dreieimpulsen i tilstanden $g(\theta, \phi)$? Er L_z skarp i tilstanden $g(\theta, \phi)$?

Oppgåve 3

Her kjem litt blanda drops.

a) Gjer kort greie for skilnaden mellom grunntilstanden til den klassiske oscillatoren og den kvantemekaniske oscillatoren.

b) Kva tyder det at to observable F og G er kompatible?

c) Er operatoren $\hat{A} = -\frac{d}{dx}$ hermitesk? Grunngje svaret.

d) Forklar kort omgrepet bunden tilstand.

e) Forklar potensrekkjemetoden for differensiallikningar.

Nyttige formlar:

Rotasjon vinkel $\frac{\pi}{2}$ rundt y-aksen:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -z && (4) \\ y &\rightarrow y && (5) \\ z &\rightarrow x && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

Dreieimpulsoperatorar

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] , \tag{8}$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] , \tag{9}$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} , \tag{10}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] . \tag{11}$$

Diskontinuitet til $\psi(x)$ for eit delta-funksjonspotensial

$$\psi'(x^+) - \psi'(x^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x) . \tag{12}$$