NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk Vår 2014

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Kontakt på eksamen: Jon Andreas Støvneng
Telefon: 45 45 55 33

Mandag 26. mai 2014
kl. 09.00-13.00

Tillatne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgåvesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere ein partikkel med masse m som bevegar seg på ein sirkel i xy-planet med konstant radius R. Vi bruker vinkelen ϕ til å spesifisere posisjonen til partikkelen. Ein tidsuavhengig bølgjefunksjon skriv vi som $\psi(\phi)$.

a) Vis at dreieimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}$ for systemet kan skrivast som

$$\hat{\mathbf{L}} \;=\; -i\hbar \mathbf{e}_z \frac{d}{d\phi} \;, \tag{1}$$

der $\mathbf{e}_z$ er einingsvektoren i z-retninga i sylinderkoordinatar.

b) Finn Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ for systemet uttrykt ved hjelp av dreieimpulsoperatoren.

c) Vis eksplisitt at Hamiltonoperatoren i b) kommuterer med $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{d}{d\phi}$, det vil seie vis at

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] \;=\; 0 \;. \tag{2}$$

d) Finn dei simultane ortonormerte eigenfunksjonane for operatorane $\hat{L}_z$ og $\hat{H}$, og dei tilhøyrande eigenverdiane l_z og E. Kva er degenerasjonsgraden for dei ulike energinivåa? Korleis heng dette saman med resultatet frå forelesningane som seier at ein-dimensjonale system ikkje er degenererte?

e) Er eigenfunksjonane for Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ og dreieimpulsoperatoren $\hat{L}_z$ du fann i d) også eigenfunksjonar for paritetsoperatoren $\hat{P}$? Forklar resultatet.

Oppgåve 2

Vi skal i denne oppgåva studere ein tidsavhengig bølgjefunksjon til den harmoniske oscillatoren i ein dimensjon. Partikkelen har masse m og oscillatoren har frekvens ω. For $t = 0$ har vi preparert systemet slik at den normerte bølgjefunksjonen er

$$\Psi(x,0) \;=\; \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2\hbar}m\omega(x-x_0)^2} \;, \tag{3}$$

der $x_0 > 0$ er ein konstant.

a) Tidsutviklinga til $\Psi(x,t)$ er gjeven ved den tidsavhengige Schrödingerlikninga,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \;=\; \hat{H}\Psi(x,t) \;, \tag{4}$$

der $\hat{H}$ er Hamiltonoperatoren til den harmoniske oscillatoren. Den normerte løysinga til likning (4) med initialkravet (3) er gjeven ved

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) \;=\; & \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}m\omega x_0^2\right] \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}m\omega x_0^2\, e^{-2i\omega t}\right] \exp\left[\frac{m\omega x_0 x}{\hbar}\, e^{-i\omega t}\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}i\omega t\right] \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}m\omega x^2\right] \;. \end{aligned} \tag{5}$$

Dette treng du ikkje vise. Vis at

$$|\Psi(x,t)|^2 \;=\; \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m\omega(x-x_0\cos(\omega t))^2/\hbar} \;. \tag{6}$$

b) Bruk resultatet i a) til å vise at middelverdien til posisjonsoperatoren $\hat{x}$ i tilstanden $\Psi(x,t)$ er

$$\langle x\rangle_{\Psi(x,t)} \;=\; x_0\cos(\omega t) \;. \tag{7}$$

c) Middelverdien til impulsoperatoren $\hat{p}$ i tilstanden $\Psi(x,t)$ er

$$\langle p\rangle_{\Psi(x,t)} \;=\; A\sin(\omega t) \;, \tag{8}$$

der A er ein konstant. Finn konstanten A.

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi studere den isotrope harmoniske oscillatoren i tre dimensjonar. Vi bruker kulekoordinatar r, θ og ϕ. Hamiltonoperatoren er

$$\hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2}+V(r) \;. \tag{9}$$

der potensialet er $V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ og $\hat{\mathbf{L}}$ er dreieimpulsoperatoren. Eigenfunksjonane til $\hat{H}$ er på forma

$$\psi(r,\theta,\phi) \;=\; R(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \;, \tag{10}$$

der $Y_{lm}(\theta,\phi)$ er ein kulefunksjon og $R(r)$ er ein radialfunksjon. Vi skriv nå $R(r)=v(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ der $x=r\sqrt{m\omega/\hbar}$ er dimensjonslaus.

a) Utlei radiallikninga for $v(x)$.

b) Bruk potensrekkjemetoden for $v(x)$ til å finne ein rekursjonsformel for koeffisientane i rekkja i spesialtilfellet $l=0$.

c) Forklar kvifor ein ventar at grunntilstanden for oscillatoren har $l=0$. Finn grunntilstandsenergien E_0 og det tilhøyrande polynomet $v_0(x)$ (Du treng berre å finne $v_0(x)$ opp til ein normeringskonstant).

Oppgåve 4

Denne oppgåva er blanda drops, det vil seie fire spørsmål som er uavhengig av kvarandre.

a) Forklar kort omgrepet kvantemekanisk tunnelering.

b) Forklar kort Bohr-modellen for hydrogenatomet. Kva var den største suksessen til Bohr-modellen? Kva er tolkninga av Bohr-radien a_0 i kvantemekanikken?

c) Forklar kort det fysiske innhaldet i relasjonen $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$.

d) Ein partikkel bevegar seg i tre dimensjonar i eit potensial $V(\mathbf{r})$. Ehrenfests teorem for denne partikkelen kan skrivast som

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} \,, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{r}) \rangle \,. \tag{12}$$

Forklar kort det fysiske innhaldet i Ehrenfests teorem.

Nyttige formlar:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \,. \tag{13}$$