1 Stokastisk variabel

Før vi byrjar på oppgåvene gjev vi ein liten briefing om stokastiske variable, middelverdiar, usikkerheiter osb.

Ein stokastisk variabel X er ei avbildning frå eit *utfallsrom* Ω til eit verdirom Ω_X

$$X:\ \Omega \to \Omega_X \subseteq\ \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

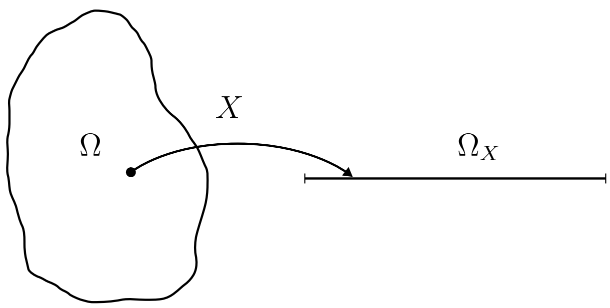

Figure 1: Stokastisk variabel X som ei avbildning frå eit utfallsrom Ω til verdirom Ω_X.

Elementa i utfallsrommet kallast *utfall*. Kron eller mynt er eit døme på ein stokastisk variabel der utfallsrommet er sida som landar opp, det vil seie $\Omega = \{\text{"mynt"}, \text{"kron"}\}$. Vi definerer

$$X(\text{"kron"}) \;=\; 0\ , \tag{2}$$
$$X(\text{"mynt"}) \;=\; 1\ , \tag{3}$$

slik at verdirommet blir $\{0, 1\}$.

Terningkast er eit anna døme på ein stokastisk variabel der utfallsrommet er talet på auge, det vil seie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vi definerer

$$X(\text{antal auge } n) \;=\; n\ , \tag{4}$$

slik at verdirommet blir $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. For kvart element $x \in \Omega_X$ kan vi definere ein funksjon $P(x)$

$$P(x) : \Omega_X \to \mathbb{R}_0^+\ . \tag{5}$$

Funksjonsverdien er såleis $P(x) \geq 0$ for alle x. Dersom Ω_X er endeleg eller tellbar uendeleg er $P(x)$ *sannsynlegheiten* for utfallet x. Vi må da ha

$$\sum_{x\in\Omega_X} P(x) \;=\; 1\ . \tag{6}$$

Viss mynten er fullstendig symmetrisk er $P(\text{"kron"}) = P(\text{"mynt"}) = \frac{1}{2}$ slik at summen av sannsynlegheitene er lik 1. Viss vi kastar ein fullstendig symmetrisk terning har vi $P(1) = P(2) = ...P(6) = \frac{1}{6}$. slik at summen av sannsynlegheitene er lik 1.

Viss Ω_X er ikkje-tellbar uendeleg, kallast $P(x)$ *sannsynlegheitstettheiten* og må normerast til 1 ved å krevje

$$\int_{\Omega_X} P(x)\, dx \;=\; 1\ . \tag{7}$$

I kvantemekanikk får ein ofte bruk for sannsynlegheitstettheiter. Dersom $\psi(x)$ er bølgjefunksjonen til ein partikkel som bevegar seg på x-aksen, er sannsynlegheistettheiten for posisjonen x gjeve ved $P(x) = |\psi(x)|^2$. Normeringsintegralet (7) betyr at vi finn partikkelen ein eller annan stad på x-aksen. Eit døme på ei kontinuerleg fordeling er vist i figur 2. Mykje meir om dette seinare.

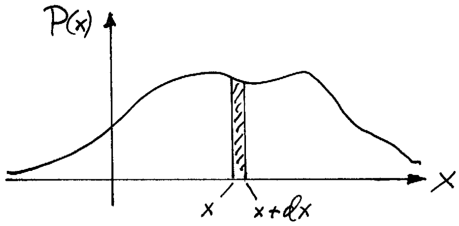

Figure 2: Kontinuerleg sannsynlegheitsfordeling $P(x)$.

Viss vi kjenner $P(x)$ kan vi definere middelverdien $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle \equiv \sum_{x \in \Omega_X} P(x) x \ , \tag{8}$$

$$\langle x \rangle \equiv \int_{\Omega_X} P(x) x \, dx \ . \tag{9}$$

Middelverdien til $f(x)$ er definert på same måte:

$$\langle f(x) \rangle \equiv \sum_{x \in \Omega_X} P(x) f(x) \ , \tag{10}$$

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{\Omega_X} P(x) f(x) \, dx \ , \tag{11}$$

der $f(x)$ er ein funksjon som er definert på Ω_X.

Middelverdien gjev informasjon om fordelinga $P(x)$, men ikkje om fordelinga er smal eller brei. Slik informasjon kan ein finne ved å rekne ut *variansen* $(\Delta x)^2$ til ein stokastisk variabel X:

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Kvadratrota til variansen kallast *standardavviket* eller *usikkerheiten*, og ein skriv av og til σ istadenfor Δ. Usikkerheiten er rota av det midlere kvadratiske avviket som på engelsk er *root-mean-square deviation*.

Variansen er også *det andre momentet* rundt middelverdien. Det k'te momentet Γ^k rundt middelverdien $\langle x \rangle$ er definert ved

$$\Gamma^k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle \ . \tag{13}$$

Døme:

Middelverdien $\langle n \rangle$ til talet på n auge er gjeve ved

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{n=6} P(n)n \\ &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Middelverdien $\langle n^2 \rangle$ kan ein rekne ut på same måte

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=1}^{n=6} P(n)n^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{91}{6}}} \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Dette gjev variansen

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \\ & \underline{\underline{\frac{35}{12}}} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Usikkerheiten blir såleis $\Delta = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$. Middelverdien $\langle n \rangle$ tilsvarer tyngdepunktet i sannsynlegheitsfordelinga og $\langle \Delta n \rangle$ fortel oss kor brei sannsynlegheisfordelinga er. Dette er illustrert i figur. 3.

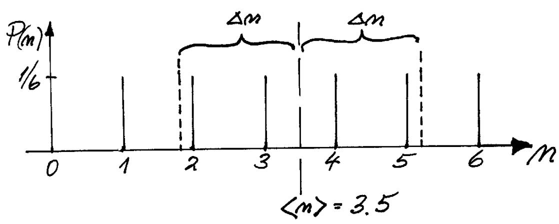

Figure 3: Middelverdi og usikkerheit for terningkast.

Programmet på heimesida genererer seriar av kron/mynt og terningkast med forskjellige verdiar av n. Fordelinga etter t.d. 100 terningkast er ikkje eksakt $\frac{1}{6}$, men ganske nær. Dette tilsvarer at middelverdien ikkje er eksakt $\frac{7}{2}$, men ganske nær. Dersom vi hadde gjennomført uendeleg mange kast, hadde fordelinga konvergert mot $P(n) = \frac{1}{6}$ for $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ og middelverdien konvergert mot den teoretiske middelverdien $\frac{7}{2}$. På same måte vil variansen Δx_n

konvergere mot $\frac{35}{12}$. Vi har altså

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \frac{7}{2} && (17) \\ \lim_{n\to\infty} \Delta x_n &= \frac{35}{12} \, . && (18) \end{aligned}$$

Vi har same situasjon i kvantemekanikk. Her er det vanleg å preparere n kopiar av eit eit system (eit atom, ein harmonisk oscillator etc) i same kvantemekanisk tilstand, det vil seie beskrive av same bølgefunksjon ψ. Vi kallar ei slik samling av identiske system for eit *ensemble*. Ei måling av t.d. energien E til systemet tilsvarer eit terningkast. Vi kan da rekne ut midlere energi til systemet ved å rekne ut gjennomsnittet $E(n)$ til måleserien. Viss $n \to \infty$ vil $E(n)$ konvergere mot det teoretiske middelet på same vis som med terningkasta.

Døme:

Vi skal sjå på levetida til ei lyspære. Dette er eit døme på ei kontinuerleg sannsynlegheitsfordeling. Ved $t = 0$ fungerer pæra og sannsynlegheiten for at pære har gått etter tid t er modellert ved formelen

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \, , \tag{19}$$

der λ er avhengig av type pære og merke. Legg merke til at $F(0) = 0$ og at $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ slik at pæra går på eit eller anna tidspunkt. Sannsynlegheitstettheiten $P(t)$ er definert ved sannsynlegheiten for at pære skal ryke i tidsrommet mellom t og $t + \Delta t$ og er gjeve ved $P(t)\Delta t$ og ved $F(t + \Delta t) - F(t)$. Dette gjev

$$P(t)\Delta t = F(t + \Delta t) - F(t) \, . \tag{20}$$

Ved å dele på Δt og ta grensa $\Delta \to 0$ finn ein

$$\begin{aligned} P(t) &= F'(t) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \, . \end{aligned} \tag{21}$$

Ein får da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(t) dt &= F(\infty) - F(0) \\ &= 1 \, , \end{aligned} \tag{22}$$

som er normeringskravet til fordelinga $P(t)$. Middellevetida for lyspæra blir såleis

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \int_0^\infty t P(t) \, dt \\ &= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} \, dt \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}} \, . \end{aligned} \tag{23}$$

Levetida til pæra minkar med λ. λ for ei vanleg lyspære er difor større enn for ei LED pære. På same måte får vi

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle &= \int_0^\infty t^2 P(t)\, dt \qquad (24) \\ &= \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{\lambda^2}}}\,, \qquad (25) \end{aligned}$$

slik at standardavviket blir $\Delta t = \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$. Standardavviket minkar med λ og fordelinga $P(t)$ blir difor smalare.