NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Prøveeksamen TFY4215/FY1006
Innføring i Kvantemekanikk

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Når det passar deg

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåvesettet er på fire sider. Ingen vedlegg. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere ein partikkel med masse m som bevegar seg i ein romleg dimensjon der potensialet $V(x)$ er gjeve ved

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha\delta(x) , & |x| < L \\ \infty , & |x| \geq L \end{cases} , \tag{1}$$

der L og α er positive konstantar. Sjå figur 1. For ein bestemt verdi av α, $\alpha(L)$ finst det ei symmetrisk løysing av den tidsuavhengige Schrödingerlikninga med $E = 0$. Finn $\alpha(L)$ og den normerte bølgjefunksjonen.

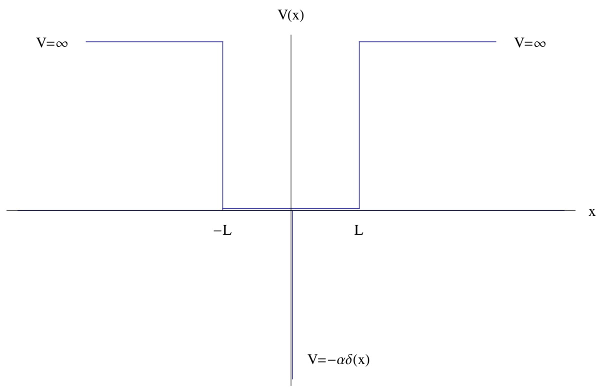

Figure 1: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 1.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi studere ein partikkel med masse m som bevegar seg i ein romleg dimensjon der potensialet $V(x)$ er gjeve ved

$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} \infty\ , & x \leq 0 \\ 0\ , & 0 < x < L \\ V_0\ , & x \geq L \end{cases} \quad , \tag{2}$$

der L og $V_0 > 0$ er konstantar. Potensialet er vist i figur 2. Vi er interessert i *bundne tilstandar*.

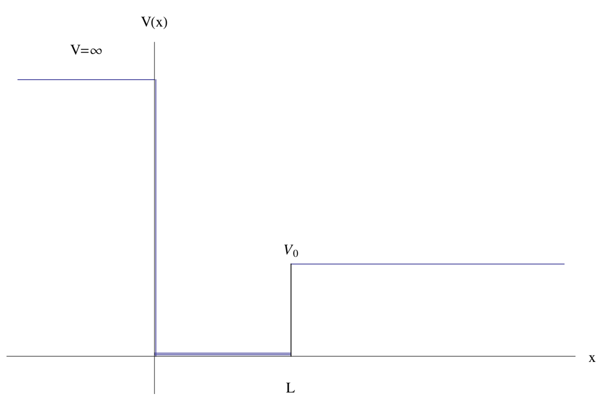

Figure 2: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 2.

a) Skriv ned den generelle løysinga til den tidsuavhengige Schrödingerlikninga i dei ulike områda.

b) Bruk kontinuitetskrava til bølgjefunksjonen $\psi(x)$ og den deriverte $\psi'(x)$ til å finne ei likning for energien E. Skisser bølgjefunksjonen ψ_0 for grunntilstanden og gjer greie for forma på ψ_0. Hint: $E < V_0$.

c) Ta grensa $V_0 \to \infty$ og finn eit eksplisitt uttrykk for energien E. Forklar resultatet.

Oppgåve 3

Schrödingerlikninga i polarkoordinatar for ein partikkel med masse m som bevegar seg i eit rotasjonssymmetrisk todimensjonalt potensial $V(r)$ er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi^2}\right]\psi(r,\phi) + V(r)\psi(r,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\phi) \; . \qquad (3)$$

Vi skal nå sjå på ein isotrop oscillator der potensialet er

$$V(r) \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \; , \qquad (4)$$

der ω er frekvensen til oscillatoren. Ein av eigentilstandane til likning (3) kan vi skrive som

$$\psi(r,\phi) \quad = \quad Cre^{-\frac{1}{2}m\omega r^2/\hbar}e^{i\mu\phi} \; , \qquad (5)$$

der C er ein normeringskonstant og μ er eit heiltal.

a) Finn energien E og heiltalet μ.

b) Finn middelverdien $\langle r \rangle$. Hint: du treng ikkje rekne ut $|C|$.

c) Er tilstanden i likning(5) grunntilstanden for den tomdimensjonale isotrope oscillatoren? Forklar.

Oppgåve 4

I denne oppgåva er det fem delspørsmål du kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Heisenbergs uskarpheitsrelasjon for operatorane $\hat{x}$ og $\hat{p}_x$ er

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \frac{1}{2}\hbar \; . \qquad (6)$$

Forklar kort det fysiske innhaldet i likning (6).

b) La $\hat{H}$ vere ein Hamiltonoperatoren for ein partikkel og la er $\hat{A}$ vere ein operator og A den tilhøyrande observabelen, Tidsutviklinga til forventningsverdien $\langle A \rangle$ er da gjeve ved

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle \quad = \quad \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \; . \tag{7}$$

Finn uttrykket for likning (7) når $\hat{A} = \hat{p}$ og $\hat{H}$ er Hamiltonoperatoren for ein harmonisk oscillator i ein romleg dimensjon. Forklar resultatet.

c) Forklar Bohrs atommodell. Gjer spesielt greie for dei ideane som bryt med klassisk mekanikk.

d) La $\hat{A}$ vere ein hermitesk operator. Vis at eigenverdiane til $\hat{A}$ er reelle. Vis eksplisitt at operatoren $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ er hermitesk.

e) Kva er ein bunden tilstand? Ei kort forklaring er nok.

–