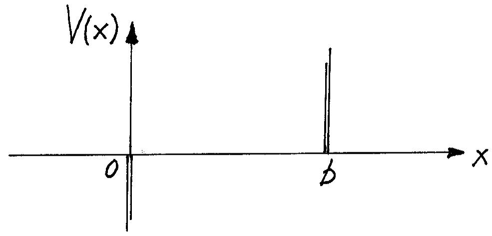
Frist for innlevering: *Tirsdag 24. mars kl 17.00*

ØVING 8

Oppgåve 1 **Elektron i potensial med to δ-funksjonar**



Eit elektron bevegar seg i eit endimensjonalt potensial som består av ein deltabrønn og ein deltabarriere:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m_e a_0} g\delta(x) + \frac{\hbar^2}{m_e a_0} f\delta(x-b).$$

Her er $g > 0$, $f > 0$ og $b \geq 0$.

a) Kva veg knekkjer ein energiegenfunksjon ψ ved brønnen (mot aksen eller bort frå den), og kva veg knekkjer den ved barrieren? Hint: Tenk på deltabrønnen som ein veldig djup og veldig trang brønn, og finn ut korleis ψ må krumme. Kvifor må ein eigenfunksjon ψ for ein bunden tilstand for dette systemet krumme utover frå aksen unntatt i origo?

b) La oss halde brønnstyrken g fast. For $f = 0$ følgjer det frå forelesningane at vi har éin bunden tilstand med energien $E = -g^2\hbar^2/(2m_e a_0^2)$. For aukande barrierestyrke f ligg det i korta at bindingsenergien til denne tilstanden avtar. Vi skal nå undersøkje om det finnast ein f-verdi som er så stor at energien til tilstanden er $E = 0$. Denne tilstanden, ψ_0, må vere lineær både for $x < 0$, $0 < x < b$ og $x > b$ sidan ψ_0'' er lik null i desse områda når $E = 0$. Kvifor kan vi like godt sette $\psi_0 = 1$ for $x < 0$? . Bruk diskontinuitetskravet som du finn nedanfor til å finne ψ_0' rett til høgre for brønnen, og finn $\psi_0(x)$ i området $0 < x < b$.

c) Vi skal nå sjå på tilfellet $0 < b < a_0/2g$. Bruk diskontinuitetskravet i $x = b$ til å finne den f-verdien som gjer at ψ_0 blir lik ein konstant for $x > b$ (slik vi må krevje av ein eigenfunksjon med $E = 0$). Kall denne f-verdien for $f_0(b)$. Sjå på $f_0(b)$ for tilfella

(i) $b \to 0$,

(ii) $b = a_0/4g$,

(iii) $b \to a_0/2g$.

d) Skissér ψ_0 t.d for tilfellet $b = a_0/4g$. Forklar kvifor ψ_0 er grunntilstanden, slik at vi ikkje har nokre bundne tilstandar for dette systemet. Hint: Prøv å sette $\psi = e^{\kappa x}$ for $x < 0$, og finn ut korleis denne løysinga må ta seg ut samanlikna med ψ_0 når du bruker skjøtekravet og "jobbar deg mot høgre". Ei skisse som viser korleis ψ krummar samanlikna med ψ_0 vil vere nyttig.

e) Vi har nå sett at dersom $0 < b < a_0/2g\,(\equiv b_0)$, kan vi "fjerne" den bundne tilstanden ved hjelp av deltabarrieren med styrken $f_0(b)$. For b større enn b_0 går ikkje dette. Grunntilstanden blir da bunden sjølv om vi vel ein uendeleg stor barrierestyrke f. La oss rekne på dette tilfellet, som er enklare enn når f er endeleg. Kva seier diskontinuitetskravet

$$\psi'(b^+) - \psi'(b^-) = \frac{2f}{a_0}\,\psi(b)$$

om $\psi(b)$ i grensa $f \to \infty$? Kvifor må grunntilstanden da vere på forma $C\sinh[\kappa(x-b)]$ i området $0 < x < b$? . Kva blir forma for $x < 0$? Vis at κ og dermed energien $E = -\kappa^2\hbar^2/(2m_e)$ kan finnast frå kravet

$$\kappa b(\coth(\kappa b) + 1) = \frac{2gb}{a_0} \equiv \frac{b}{b_0}.$$

Dette kravet kan ein omforme til

$$1 - e^{-2\kappa b} = \frac{2\kappa b}{b/b_0}.$$

Skissér venstre - og høgresida i denne likninga i same diagram som funksjonar av $2\kappa b$, og forklar kvifor dei to kurvene må skjere kvarandre for eit positivt argument $2\kappa b$ når $b > b_0$. Hint: Sjå på dei deriverte for $\kappa = 0$.

Sett $b = a_0/g = 2b_0$, rekn ut $2\kappa b$ numerisk, og finn forholdet mellom energien og grunntilstandsenergien vi har for $f = 0$.

Oppgjeven: Med $V(x) = \alpha\delta(x - c)$ må ein energieigenfunksjon oppfylle diskontinuitetskravet

$$\psi'(c^+) - \psi'(c^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\,\psi(c).$$