Frist for innlevering: *Tirsdag 27. januar kl. 17*

Øving 1

Oppgåve 1:

Finn middelverdien $\langle x \rangle$, standardavviket Δx og det tredje momentet $\Gamma^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle$ for kron eller mynt.

Oppgåve 2:

I denne oppgåva skal vi sjå litt på eigenskapane til den eindimensjonale bølgjefunksjonen

$$\Psi(x,t) \;=\; A e^{-\lambda |x|} e^{-i\omega t} \,, \tag{1}$$

der $-\infty < x < \infty$ og der A, λ og ω er reelle positive konstantar. Dersom $\Psi(x,t)$ er normert, er $P(x) = |\Psi(x,t)|^2$ sannsynlegheitfordelinga for partikkelen og $P(x)dx$ er sannsynlegheiten for å finne partikkelen i intervallet $(x, x + dx)$. I denne oppgåva kan du få bruk for flg. integral

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \,, \qquad I_n(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx \,. \tag{2}$$

Ved delvis integrasjon får ein

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \,, \\ &= n I_{n-1} \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Sidan $I_0 = 1$ får vi då $I_n = n!$ ved rekursjon og $I_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

a) Finn normeringskonstanten A. Hint: Bølgjefunksjonen og sannsynlegheitstetheiten er symmetriske funksjonar slik at ein kan forenkle integrasjonen.

b) Skisser $P(x) = |\Psi(x,t)|^2$ som funksjon av λx.

c) Rekn ut forventningsverdiane $\langle x \rangle$ og $\langle x^2 \rangle$. Igjen kan du bruke symmetrien til $P(x)$ til å forenkle utrekningane.

d) Finn usikkerheiten Δx.

e) Merk av punkta $\langle x \rangle \pm \Delta x$ i på skissa for $|\Psi(x,t)|^2$ for å illustrere korleis Δx representerer usikkerheiten i x. Kva er sannsynlegheiten for å finne partikkelen utanfor intervallet $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$?

Oppgåve 3:

I denne oppgåva skal vi studere ein harmonisk oscillator som vist i figur 1.
Den klassiske energien til ein harmonisk oscillator i ein dimensjon er

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \,, \tag{4}$$

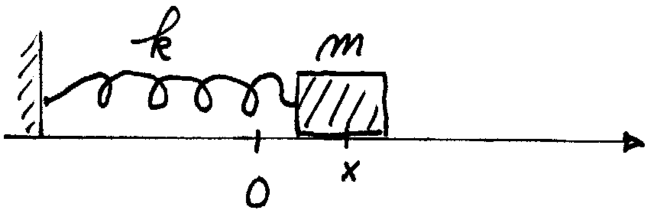

Figure 1: Harmonisk oscillator i ein dimensjon med masse m og fjærkonstant k.

der frekvensen er $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Den tilhøyrande kvantemekaniske Hamiltonoperatoren er

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 . \tag{5}$$

Hamiltonoperatoren har ein eigenfunksjon

$$\psi_0(x) = C_0 e^{-\beta x^2} , \tag{6}$$

der C_0 er ein normeringskonstant og β er ein konstant.

a) Finn β og energien E_0 ved innsetting i den tidsuavhengige Schrödingerlikninga $\hat{H}\psi = E\psi$. Det er to moglege verdiar for β, men berre ein fysisk akseptabel. Forklar!

b) Rekn ut normeringskonstanten C_0. Merk at du kan velje fasen til C heilt fritt. Det er vanleg å velje fasen lik null slik at C_0 er reell. Lag ei skisse av sannsynlegheitsfordelinga $P(x) = |\psi_0(x)|^2$. og merk av dei klassiske vendepunkta for partikkelen, det vil seie dei punkta på x-aksen der $E_0 = V(x)$. Frå skissa skal du estimere sannsynlegheiten for at partikkelen er i det *klassiske forbode området*, det vil seie området der $V(x) > E_0$.

c) Vi skal seinare sjå at bølgjefunksjonen $\psi_0(x)$ i likning (6) representerer den kvantemekaniske grunntilstanden for oscillatoren, det vil seie tilstanden med lågast energi. Eigenfunksjonen med nest lågast energi er

$$\psi_1(x) = C_1 x e^{-\beta x^2} . \tag{7}$$

Finn den tilhøyrande energien E_1.

Oppgåve 4:

Hamiltonoperatoren for hydrogenatomet er

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} , \tag{8}$$

der det første leddet representerer den kinetiske energien til elektronet og det andre leddet er den elektrostatiske potensielle energien som ein kan utleie frå Coulombs lov. I denne oppgåva kan det vere greit å bruke uttrykket for Laplace-operatoren i kulekoordinatar. Vi har

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) . \tag{9}$$

a) Vis at den kulesymmetriske funksjonen

$$\psi(r) \;=\; Ce^{-r/a_0} \;, \tag{10}$$

der C er ein normeringskonstant og $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ er ein eigenfunksjon til Hamiltonoperatoren (8) og finn den tilhøyrande energien E.

b) La $\Psi(r,t) = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$. Vis at $\Psi(r,t)$ tilfredsstiller den tidsavhengige Schrödingerlikninga

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \;=\; \hat{H}\Psi \;. \tag{11}$$

c) Rekn ut normeringskonstanten C.