LØYSING ØVING 10

Løysing oppgåve 1 Variasjonsmetoden

a) På grunn av faktoren $e^{-\alpha x}$ går $\psi(x) \to 0$ når $x \to +\infty$ og $\psi(x)$ er difor lokalisert. $\psi(x)$ beskriv da ein bunden tilstand.

Normeringsintegralet er

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\psi(x)|^2 &= |A|^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2\alpha x}\, dx \\
&= \frac{|A|^2}{8\alpha^3} \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy \\
&= \frac{|A|^2}{4\alpha^3} \\
&\stackrel{!}{=} 1 \,.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Dersom ein veljer A reell får vi $A = 2\alpha^{\frac{3}{2}}$ og den normerte bølgjefunksjonen blir

$$\psi(x) = \underline{\underline{2\alpha^{\frac{3}{2}} x e^{-\alpha x}}} \,. \tag{0.2}$$

b) Middelverdien til den potensielle energien er

$$\begin{aligned}
\langle V(x) \rangle &= 4F\alpha^3 \int_0^\infty x^3 e^{-2\alpha x} dx \\
&= \frac{F}{4\alpha} \int_0^\infty y^3 e^{-y}\, dy \\
&= \underline{\underline{\frac{3F}{2\alpha}}} \,.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

c) Middelverdien til den kinetiske energien er

$$\begin{aligned}
\langle E_k \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x)\, dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right]^2 dx
\end{aligned} \tag{0.4}$$

etter delvis integrasjon. Innsetting av $\psi(x)$ gjev

$$\begin{aligned}
\langle E_k \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m} 4\alpha^3 \int_0^\infty [1 - \alpha x]^2 e^{-2\alpha x}\, dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} 2\alpha^2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 e^{-y}\, dy \\
&= \underline{\underline{\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2}} \,.
\end{aligned}$$

d) Den totale energien til systemet kan vi da skrive som

$$\begin{aligned}
E &= E_k + E_p \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 + \frac{3F}{2\alpha} \,.
\end{aligned} \tag{0.5}$$

Verdien på α som minimaliserer E, $\alpha_{\min}$, finn ein ved å løyse $\frac{dE}{d\alpha} = 0$. Dette gjev

$$\frac{\hbar^2}{m}\alpha_{\min} - \frac{3F}{2\alpha_{\min}^2} = 0 , \tag{0.6}$$

eller

$$\alpha_{\min} = \left(\frac{3mF}{2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} . \tag{0.7}$$

Innsett i uttrykket for E får vi da

$$E_{\min} = \underline{\underline{\frac{3}{4}6^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}} F^{\frac{2}{3}}}} . \tag{0.8}$$

der prefaktoren er $\frac{3}{4}6^{\frac{2}{3}} \approx 2.48$. Feilen i grunntilstandsenergien er omlag 6 prosent. Ikkje dårleg. Merk: $\frac{d^2E}{d\alpha^2} = \frac{\hbar^2}{m} + \frac{3F}{\alpha^3} > 0$ for alle $\alpha > 0$ og vi har såleis eit minimum og ikkje eit maksimum.

E_k er gjeve integralet ved $(\frac{d}{dx}\psi)^2$ og blir mindre jo flatare $\psi(x)$ er ($\psi(x) =$ konstant minimerer E_k). Den potensielle energien E_p blir mindre desto meir bølgjefunksjonen er konsentret rundt $x = 0$ (som er minimum til $V(x)$). Verdien på α som minimaliserer E, $\alpha_{\min}$, er da eit kompromiss mellom desse to ledda.

Oppgåve 2 **Ehrenfests teorem**

Vi bruker først Ehrenfests teorem på $\hat{F} = \hat{\mathbf{p}}$. Dette gjev

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\mathbf{p}\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}]\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle[mg\hat{z}, \hat{p}_z]\rangle \\ &= -mg\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{0.9}$$

Dette gjev $\langle\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}_0 - mgt\mathbf{e}_z = m(v_0 - gt)\mathbf{e}_z$. Ehrenfests teorem på $\hat{F} = \mathbf{r}$ gjev

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\mathbf{r}\rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}]\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}, \hat{\mathbf{r}}]\rangle \\ &= \frac{\langle\mathbf{p}\rangle}{m} \\ &= (v_0 - gt)\mathbf{e}_z . \end{aligned} \tag{0.10}$$

Integrasjon gjev då

$$\langle\mathbf{r}\rangle = \underline{\underline{\mathbf{r}_0 + v_0 t\mathbf{e}_z - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{e}_z}} . \tag{0.11}$$

Altså tilfredsstiller $\langle\mathbf{r}\rangle$ Newtons bevegelseslikning med initialkrava som er gjevne i teksten.