



NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi

Institutt for Fysikk

Kontinuasjoneksamen

TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk august 2014

Faglærer: Professor Jens O. Andersen

Institutt for Fysikk, NTNU

Telefon: 73 59 31 31

7. august 2014

Tillatte hjelpemiddel:

Godkjent kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter: navn og symboler

Oppgavesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgave 1

I denne oppgåva skal vi studere bundne tilstandar i ein romleg dimensjon. Ein partikkel med masse m bevegar seg i potensialet

$$V(x) = -\beta\delta(x - L) - \beta\delta(x + L), \quad (1)$$

der $\beta > 0$ er styrken til potensialet og $L > 0$ er avstanden frå origo til δ -funksjonane. Sjå figur 1. Bølgjefunksjonen til grunntilstanden er symm-

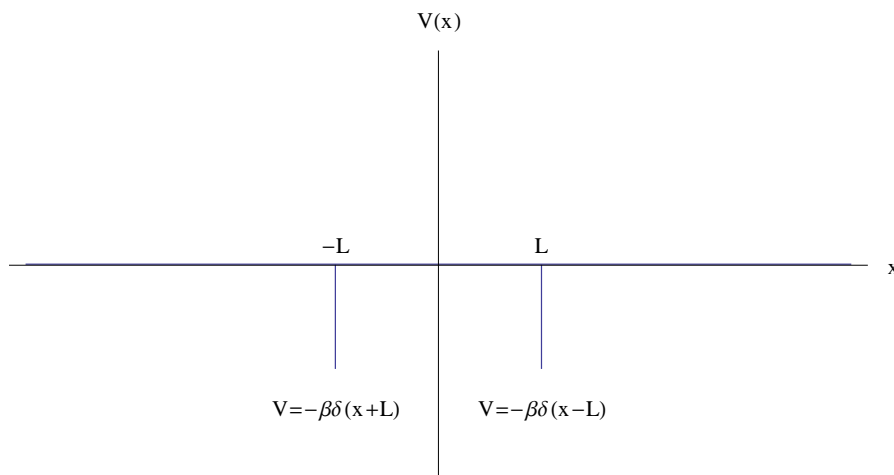


Figure 1: Potensialet $V(x)$ i oppgave 1.

metrisk og kan skrivast på forma

$$\psi_0(x) = \begin{cases} Ae^{Kx}, & x < -L, \\ B \cosh(Kx), & |x| < L, \\ Ce^{-Kx}, & x > L, \end{cases} \quad (2)$$

der A , B , C og K er konstantar. Du kan velje fassen til bølgefunksjonen slik at A , B og C er reelle.

a) Bruk symmetrien til bølgefunksjonen $\psi_0(x)$ til å finne samanhengen mellom konstantane A og C .

b) Finn samanhengen mellom grunntilstandsenergien E_0 og konstanten K .

c) Bruk kontinuiteten til bølgefunksjonen $\psi_0(x)$ i $x = L$ til å vise at

$$B \cosh(KL) = Ce^{-KL}. \quad (3)$$

Skisser bølgefunksjonen.

d) Bruk diskontinuiteten til $\psi'_0(x)$ i $x = L$ til å vise at

$$BK \sinh(KL) + CKe^{-KL} = \frac{2m\beta}{\hbar^2} Ce^{-KL}. \quad (4)$$

e) Vis at K tilfredsstiller den transcendentale likninga

$$e^{-2KL} = \frac{\hbar^2 K}{\beta m} - 1, \quad (5)$$

og forklar kvifor likning (5) har ei og berre ei løysing.

f) Bølgjefunksjonen til fyrste eksiterte tilstand er antisymmetrisk og kan skrivast på forma

$$\psi_1(x) = \begin{cases} Ae^{Kx}, & x < -L, \\ B \sinh(Kx), & |x| < L, \\ Ce^{-Kx}, & x > L, \end{cases} \quad (6)$$

der A , B , C og K er (nye) konstantar. Du kan velje fasen til bølgjefunksjonen slik at A , B og C er reelle. Finn samanhengen mellom konstantane A og C . Skisser bølgjefunksjonen.

g) Vis at den antisymmetriske tilstanden eksisterer viss β er større enn ein kritisk verdi β_c og finn β_c .

Oppgåve 2

Vi skal studere eit potensial $V(x)$ i ein romleg dimensjon. Potensialet er gjeve ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, & \text{(område I),} \\ V_0, & 0 < x < L, & \text{(område II),} \\ \infty, & x > L, & \text{(område III),} \end{cases} \quad (7)$$

der $V_0 > 0$ er konstant. Sjå figur 2.

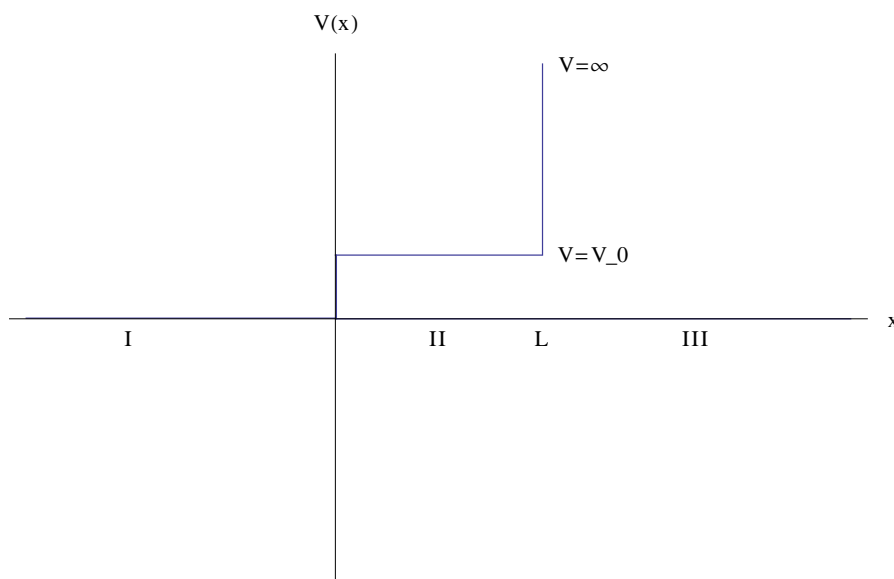


Figure 2: Potensialet $V(x)$ i oppgåve 2.

a) Det kjem inn partiklar med masse m og energi E frå venstre mot dette potensialet. Rekn ut refleksjonskoeffisienten R som funksjon av E .

Oppgåve 3

Denne oppgåva er blanda drops, det vil seie fire spørsmål som er uavhengig av kvarandre.

a) Vis at eigenverdiane til ein hermitesk operator \hat{F} er reelle. La \mathcal{H} vere Hilbertrommet av kvadratisk integrerbare funksjonar på x -aksen. Er operatoren $\hat{F} = \frac{d}{dx}$ hermitesk på dette Hilbertrommet? Grunnlegg svaret.

b) Forklar kort omgrepet kvantemekanisk tunnelering.

c) Forklar kort Bohr-modellen for hydrogenatomet. Kva var den største suksessen til Bohr-modellen? Kva er tolkninga av Bohr-radien a_0 i kvantemekanikken?

d) Er funksjonen $\psi(\theta, \phi) = \sin \theta$ eigenfunksjon til operatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$? Enn til operatoren \hat{L}_z ?

Nyttige formlar:

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(a), \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (9)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (10)$$