LØYSING ØVING 5

Løysing oppgåve 1 Krumning og stykkevis konstante potensial

a) I eit område der V er konstant (lik V_1), og $E - V_1$ er positiv, er området klassisk tillate og vi har

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\psi \equiv -k^2\psi, \qquad k \equiv \sqrt{2m(E - V_1)/\hbar^2}.$$

Denne likninga har to lineært uavhengige løysingar, $\cos kx$ og $\sin kx$ eller alternativt $\exp(\pm ikx)$. Den generelle løysinga kan då skrivast på forma

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A\cos kx + B\sin kx \\
&= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos kx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin kx\right) \\
&\equiv A'(\cos\alpha\cos kx + \sin\alpha\sin kx), \qquad \left(A' \equiv \sqrt{A^2+B^2}, \quad \cos\alpha \equiv \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \text{osv.}\right), \\
&= A'\cos(kx - \alpha),
\end{aligned}$$

dersom vi vel å arbeide med reelle koeffisientar. Som vi har sett for den eindimensjonale boksen, krummar den sinusforma løysinga meir jo større bølgetalet k er, dvs jo større $K = E - V_1$ er. For den sinusforma løysinga kan vi altså bruke bølgetalet som eit mål for hvor mykje løysinga krummar.

> **Kommentar**: Ut frå dette kan vi også finne ut kor raskt ψ krummar i klassisk tillatne område når $V(x)$ *ikkje* er konstant. Dette kan vi gjere ved å skrive
>
> $$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi \equiv -[\text{“}k(x)\text{“}]^2\psi,$$
>
> der
>
> $$\text{“}k(x)\text{“} \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]/\hbar^2}, \qquad (E > V(x))$$
>
> ikkje er eit bølgjetal i ordets opprinnelege tyding. $k(x)$ gjev likevel informasjon om kor tett nullpunkta ligg. Sjå t.d. ψ_5 på side 57 i boka. Sjå og figuren side 58.

b) For eit klassisk forbode område der $V(x)$ er konstant og større enn E, kan vi skrive den tidsuavhengige Schrodingerlikninga på forma

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\psi \equiv \kappa^2\psi, \qquad \kappa \equiv \sqrt{2m(V - E)/\hbar^2}.$$

Denne likninga har to uavhengige løysingar, $e^{\kappa x}$ og $e^{-\kappa x}$, slik at den generelle løysinga blir av eksponensiell type,

$$\psi(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}.$$

Denne funksjonen krummar bort frå aksen, raskare jo større κ er, dvs jo større differansen $V - E$ er, det vil seie jo meir “klassisk forbode” dette området er.

Sidan potensialet er uendeleg for $x \geq x_2$, skal bølgjefunksjonen vere lik null i dette området. For å få ein kontinuerleg eigenfunksjon må løysinga for området $x_1 < x < x_2$ oppfylle kravet

$$\psi(x_2) = C''e^{-\kappa(x-x_2)} + D''e^{\kappa(x-x_2)}\Big|_{x=x_2} = C'' + D'' = 0.$$

I dette området har vi då

$$\psi(x) = D''(e^{\kappa(x-x_2)} - e^{-\kappa(x-x_2)}) = 2D'' \sinh[\kappa(x - x_2)], \quad \text{q.e.d.}$$

Alternativt kan ein merke seg at løysinga må vere ein lineærkombinasjon av dei to uavhengige løysingane $\sinh[\kappa(x - x_2)]$ og $\cosh[\kappa(x - x_2)]$, der koeffisienten foran den andre løysinga er null pga kontinuitetskravet.

c) (i) Dersom energieigenverdien E ligg lågare enn potensialverdien V_3 i området $-\infty < x < x_3$, må eigenfunksjonen i dette området oppfylle

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V_3 - E]\psi \equiv \kappa_3^2\psi, \qquad \text{med } \kappa_3 \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_3 - E)}.$$

Den generelle løysinga i dette området er då

$$\psi = Ce^{\kappa_3 x} + C'e^{-\kappa_3 x}.$$

Her må ein sette C' lik null, fordi ein eigenfunksjon ikke får lov å divergere, noko $\exp(-\kappa_3 x)$ gjer i grensa $x \to -\infty$. Eigenfunksjonen har altså i dette tilfellet forma

$$\psi = Ce^{\kappa_3 x} \qquad \text{for } x < x_3.$$

Denne bølgjefunksjonen går eksponensielt mot null når $x \to -\infty$ og er såleis kvadratisk integrerbar. $\psi(x)$ beskriv dermed ein lokalisert og **bunden** tilstand.

(ii) Er energieigenverdien *større* enn V_3 i det same området, blir løysinga for $x < x_3$ med eit tilsvarande resonnement

$$\psi = A \sin k_3 x + B \cos k_3 x, \qquad \text{med } k_3 \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_3)}.$$

Normeringsintegralet

$$\int_{-\infty}^{x_2} [\psi(x)]^2 dx$$

vil divergere, og eigenfunksjonen er ikkje-lokalisert og beskriv difor ein **ubunden** tilstand. Vi noterer oss forøvrig at bølgjefunksjonen sjøl er endeleg medan normeringsintegralet divergerer.

(iii) Dersom det klaffar slik at energieigenverdien er akkurat lik V_3, har vi at $\psi'' = 0$ for $x < x_3$. Den generelle løysinga er

$$\psi = Ax + B.$$

Her må vi sette $A = 0$ for å hindre at ψ divergerer i grensa $x \to -\infty$. Dette impliserer at $\psi = B$ for $x < x_3$. Her kan ein anta $B \neq 0$. Denne energieigenfunksjonen er difor ikkje kvadratisk integrerbar, og beskriv altså ein ubunden tilstand.

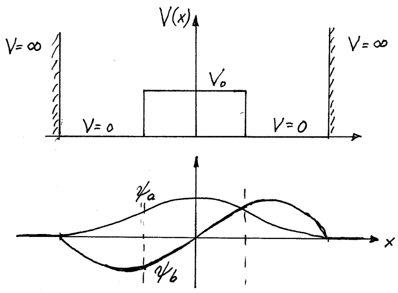
d) Då $E_1 < V_0$, er den tidsuavhengige Schrödingerlikninga på forma

$$\psi_1'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V_0 - E_1]\psi_1 \equiv \kappa_1^2\psi_1, \quad \text{med} \quad \kappa_1 \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - 0.67V_0)}.$$

Denne likninga har dei to lineært uavhengige løysingane $\exp(\pm\kappa_1 x)$ (alternativt $\cosh(\kappa_1 x)$ og $\sinh(\kappa_1 x)$). Ein symmetrisk kombinasjon av $\exp(\kappa_1 x)$ og $\exp)(-\kappa_1 x)$ kan skrivast som

$$\psi_1 = \tfrac{1}{2}C_1(e^{\kappa_1 x} + e^{-\kappa_1 x}) = C_1 \cosh(\kappa_1 x).$$

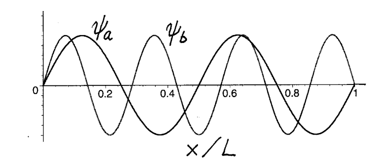
e)



ψ_b er ein energieigenfunksjon. I barriere-området ser vi at den krummar mot aksen. Energien E må då være høgare enn barriere-høgda V_0. Vi ser også at krumninga er lita i dette området og bølgjetalet er såleis relativt lite. Difor må $E - V_0$ vere forholdsvis liten, dvs E er berre litt større enn V_0. I dei to brønnane på begge sider av barrieren er bølgjetalet større, og krumninga tilsvarande større. Vi merkar oss elles at løysinga er antisymmetrisk, med eitt nullpunkt. Denne funksjonen beskriv såleis fyrste eksiterte tilstand. (Hugs at grunntilstanden er symmetrisk og utan nullpunkt.)

Den andre funksjonen, ψ_a, krummar som vi ser bort frå aksen nær dei harde veggane, som er klassisk tillatne område. Her skal krumningen skal vere *mot* aksen slik at dette er ingen energiegenfunksjon.

f)



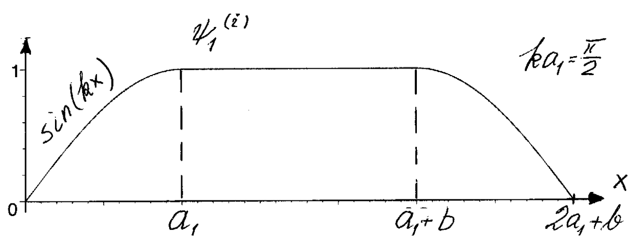
Frå dei oppgjevne kurvene ser vi at $\lambda_a = L/2$, mens $\lambda_b = 2L/7$. Bølgjetala er altså

$$k_a = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{L} \qquad \text{og} \qquad k_b = \frac{7\pi}{L}.$$

Frå samanhengen $E - V_0 = \hbar^2 k^2/2m$ har vi da at

$$E_a - V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\cdot 16 \qquad \text{og} \qquad E_b - V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\cdot 49.$$

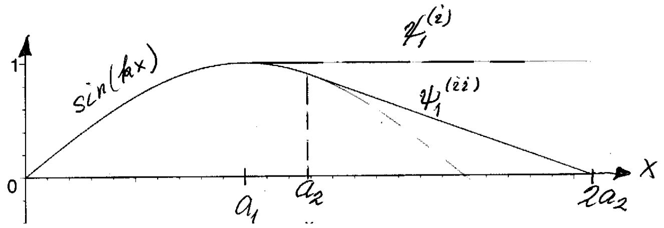
g) (i) I barriereområdet, der $E_1 = V(x) = V_0$, skal $\psi_1^{(i)}$ vere både lineær og symmetrisk, dvs lik ein konstant C. Denne konstanten kan vi sette lik 1 viss vi ikkje bryr oss om nomeringa. For $0 < x < a_1$ skal bølgjefunksjonen vere sinusforma, med eit nullpunkt for $x = 0$ og med ein kontinuerlig derivert for $x = a_1$. I dette området skal vi altså ha ein kvart periode av sinusen, slik at vi må ha $ka_1 = \pi/2$, der k er bølgetalet.



Vi har altså

$$\tfrac{1}{2}\pi = ka_1 = a_1 \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_1} = a_1 \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mV_0} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{8mV_0}}.$$

(ii) Her skal $\psi_1^{(ii)}$ vere lineær for $a_2 < x < 2a_2$, og den rette linja skal tangere sinuskurva for $x = a_2$.



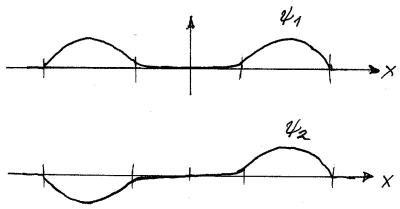
Sinusdelen av kurva utgjer litt meir enn ein kvart periode, slik at $a_2 > a_1$.
[Vi kan finne a_2 ved å sette $\psi_1 = \sin kx$ for $0 < x < a_2$. I dette området er då $\psi_1'/\psi_1 = k\cot kx$. For $a_2 < x < 2a_2$ kan vi sette $\psi_1 = A(x - 2a_2)$, og har i dette området at $\psi_1'/\psi_1 = 1/(x - 2a_2)$. Kravet om kontinuitet av ψ_1'/ψ_1 gjev då kravet

$$k\cot ka_2 = -1/a_2, \quad \text{dvs} \quad ka_2 \cot ka_2 = -1 \quad (\pi/2 < ka_2 < \pi).$$

Ved å prøve deg fram med kalkulatoren eller løyse likninga på anna vis, vil du finne at løysinga av denne transcendente likninga er $ka_2 \approx 2.03$, slik at $a_2/a_1 \approx 2.03/(\tfrac{1}{2}\pi) \approx 1.29$.]

Løysing oppgåve 2 **Eindimensjonal dobbelt-brønn**

a)

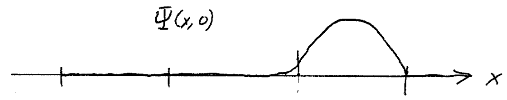


Vi merkar oss at både ψ_1 og ψ_2 krummar bort frå aksen i barriere-området; både E_1 og E_2 er altså mindre enn barriere-høgda V_0. I dei tillatne områda ser vi at både ψ_1 og ψ_2 er sinusforma, med tilnærma like bølgetal. Dette tyder at $E_2 \approx E_1$. Fordi både ψ_1 og ψ_2 har små verdiar i barriere-området, bidrar dette området lite til begge normeringsintegrala. I og med at dei to funksjonane er symmetrisk og antisymmetrisk, må dei ha tilnærma like stor sannsynlegheitstettheit i dei tillatne områda. Vi skjønar at $\psi_2(x) \approx \psi_1(x)$ i høgre brønn, og $\psi_2(x) \approx -\psi_1(x)$ i venstre brønn.

I barriereområdet i midten må ψ_1 vere ein symmetrisk lineærkombinasjon av $e^{\kappa_1 x}$ og $e^{-\kappa_1 x}$, der $\kappa_1 = \sqrt{2m(V_0 - E_1)/\hbar^2}$, dvs den er på forma $A\cosh[\kappa_1 x]$. Fyrste eksiterte tilstand ψ_2 skal tilsvarende vere ein antisymmetrisk lineærkombinasjon av $e^{\kappa_2 x}$ og $e^{-\kappa_2 x}$, der $\kappa_2 = \sqrt{2m(V_0 - E_2)/\hbar^2}$, dvs den må gå som $B\sinh[\kappa_2 x]$.

b) For $t = 0$ har vi da

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) + \psi_2(x)] \approx \begin{cases} \sqrt{2}\psi_1(x) & \text{i høgre brønn} \\ 0 & \text{i venstre brønn.} \end{cases}$$



Dette tyder sjølsagt at sannsynlegheiten for å finne partikkelen i høgre brønn ved $t = 0$ er tilnærma lik 1.

For $t = T/2 = \pi\hbar/(E_2 - E_1)$ er

$$e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar} = e^{-i\pi} = -1,$$

slik at

$$\Psi(x, T/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-iE_1t/\hbar}[\psi_1(x) - \psi_2(x)],$$

der

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) - \psi_2(x)] \approx \begin{cases} 0 & \text{i høgre brønn} \\ \sqrt{2}\psi_1(x) & \text{i venstre brønn.} \end{cases}$$

Her er partikkelen like sikkert havna i venstre brønn. Sannsynlegheiten oscillerer altså att og fram mellom dei to brønnane, med perioden $T = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$. Partikkelen er såleis i stand til å forsere barrieren som er klassisk forboden. Dette er eit døme på den såkalla tunnel-effekten. Dette er ein rein kvantemekanisk effekt. Klassisk er ein partikkel dømt til å opphalde seg i éin av dei klassisk tillatne brønnane.

Ein kan vise at energidifferansen $E_2 - E_1$ blir mindre jo høgare vi gjer barrieren. Tida $T/2 = \pi\hbar/(E_2 - E_1)$ som partikkelen bruker på å kome gjennom barrieren vil altså auke jo høgare V_0 er.

c) Initialtilstanden i dette problemet kan vi tenke oss er preparert ved at partikkelen er plassert i høgre brønn ved $t = 0$. Dersom vi studerer tidsforløpet mellom f.eks $t = 0$ og $t = T/2$, finn vi at bølgjefunksjonen (og dimed sannsynlegheiten) lekk langsomt over frå den eine brønnen til den andre. Ved $t = T/4$ er t.d sannsynlegheiten likt fordelt mellom dei to brønnane, som forklart i oppgåveteksten. Dette tyder sjølvsagt ikkje at partikkelen "deler seg". Dersom vi på eit tidspunkt t måler kor partikelen er, vil vi finne at den er anten til høgre eller til venstre. I prinsippet er det til og med ein liten sannsynlegheit for å finne den i det forbodne området. Det kan kanskje vere lurt å tenke på at bølgjefunksjonen beskriv oppførselen til eit *ensemble* av slike system. Ved $t = T/2$ har alle partiklane flytt seg til venstre brønn. Ved $t = T/4$ er omtrent halvparten til høgre og halvparten til venstre. Dersom vi ser på ein medlem av ensemblet, kan ikkje kvantemekanikken forutseie når partikkelen passerer barrieren. Eit halvklassisk bilete av denne prosessen er at kvar partikkel fyker att og fram mellom den harde veggen og barrieren, med impuls $p = \pm\hbar k$. For kvar gang den treff barrieren er det ein viss (liten) sannsynlegheit for at den går gjennom. Denne transmisjons-sannsynlegheiten er mindre jo høgare barrieren er.