LØYSING ØVING 9

Løysing oppgåve 2 α-desintegrasjon

a) Ved å ta forholdet mellom likningane $V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ og $E = V(r_2) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$ finn vi at

$$V(r) = E\,\frac{r_2}{r}, \quad \text{q.e.d.}$$

Som ein sjekk kan ein merke seg at $V(r_2)$ er lik E. Merk også at toppen av barrieren er $V_{\max} = Er_2/r_1$. Ved å sette inn i formelen som er oppgjeven er det lett å sjå at

$$\ln T \cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\; r_2 \int_{r_1/r_2}^{1} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\, dx.$$

Ved å innføre ein ny integrasjonsvariabel $x = \cos^2 y$ er det er det rett fram å vise at integralet er

$$\begin{aligned} I &= \arccos\sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{r_1/r_2(1 - r_1/r_2)} = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin\sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}(1 - \frac{r_1}{r_2})} && (0.1)\\ &\approx \tfrac{1}{2}\pi - 2\sqrt{r_1/r_2}. && (0.2) \end{aligned}$$

b) Med denne approksimasjonen for integralet får ein

$$\begin{aligned} \ln T &\cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot r_2 \cdot I \\ &\approx -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E}\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2\sqrt{\frac{r_1\, 4\pi\epsilon_0\, E}{2Ze^2}}\right) \\ &= -2\left[\frac{\pi e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\sqrt{2mc^2}\,\frac{Z}{\sqrt{E}} - 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}}\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}}\sqrt{r_1 Z}\right] \\ &\equiv -2\left[K_1\,\frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}\right], \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv \pi\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\sqrt{2mc^2} = 1.979(\text{MeV})^{1/2}, && (0.3)\\ K_2 &\equiv 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}}\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}} = 1.485\,\text{fm}^{-1/2}, \quad \text{q.e.d.} && (0.4) \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\hbar c = 1.9735\times 10^8$ eV fm og at kvilemasse-energien for α-partikkelen er $mc^2 = 3727.38$ MeV.

c) For $T \ll 1$ kan vi tilnærme

$$e^{-T} = 1 - T + \tfrac{1}{2}T^2 + \cdots \approx 1 - T.$$

Derfor kan sannsynlegheiten for at α-partikkelen er i kjerna ved tida t skrivast på forma

$$P(t) = (1-T)^{t/t_1} = e^{-Tt/t_1} \equiv e^{-t/\tau}, \qquad \text{med} \quad \tau = \frac{t_1}{T}.$$

Sannsynlegheiten er som vi ser redusert med ein faktor $1/e$ ved tida $t = \tau$, slik at levetida er

$$\tau = \frac{t_1}{T}.$$

Her ser vi at jo mindre transmisjonskoeffisienten T er, desto større blir τ.

d) Sidan dette uansett er ein veldig grov modell, kan vi rett og slett sette $t_1 = 2r_1/v$, der vi bruker $v = \sqrt{2E/m}$. Dersom forgjengaren min har rekna rett blir kjerneradien $r_1 = 6.379$ fm for polonium og $r_1 = 6.575$ fm for thorium. Tida $t_1 = 2r_1/v = \sqrt{mc^2/2E} \cdot 2r_1/c$ blir såleis

$$\begin{aligned} t_1 &= 6.16 \times 10^{-22}\,\text{s for polonium, og} \\ t_1 &= 9.35 \times 10^{-22}\,\text{s for thorium.} \end{aligned}$$

Med opphavs-kjerna $^{212}_{84}$Po er *dottera* $^{208}_{82}$Pb, og vi får med $Z = 82$

$$\ln T_{\text{Po}} \cong -2\left[1.9793\,\frac{82}{\sqrt{8.9}} - 1.485\sqrt{82 \cdot 6.379}\right] = -40.88, \quad \Longrightarrow \quad T_{\text{Po}} = 1.76 \times 10^{-18}.$$

Dottera til $^{232}_{90}$Th er $^{228}_{88}$Ra og vi får

$$\ln T_{\text{Th}} \cong -2\left[1.9793\,\frac{88}{\sqrt{4.1}} - 1.485\sqrt{88 \cdot 6.575}\right] = -100.6, \quad \Longrightarrow \quad T_{\text{Th}} = 2.04 \times 10^{-44}.$$

Denne enkle modellen gjev då levetidene

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Po}} &= \frac{t_1}{T} = 3.5 \times 10^{-4}\,\text{s} \quad \text{for} \quad {}^{212}_{82}\text{Po} \quad \text{og} \\ \tau_{\text{Th}} &= \frac{t_1}{T} = 4.6 \times 10^{22}\,\text{s} = 1.4 \times 10^{15}\,\text{y} \quad \text{for} \quad {}^{232}_{90}\text{Th}. \end{aligned}$$

Forholdet mellom desse levetidene er

$$\frac{\tau_{\text{Th}}}{\tau_{\text{Po}}} \approx 1.24 \times 10^{26}.$$

Dei tilsvarande eksperimentelle resultata for *halveringstidene* og forholdet mellom dei er

$$\tau_{1/2}({}^{212}_{82}\text{Po}) = 3 \times 10^{-7}\,\text{s}, \qquad \tau_{1/2}({}^{232}_{90}\text{Th}) = 1.4 \times 10^{10}\,\text{y} = 4.42 \times 10^{17}\,\text{s}, \qquad \frac{\tau_{\text{Th}}}{\tau_{\text{Po}}} \approx 1.47 \times 10^{24}.$$

Vi har brukt ein særs enkel modell for α-desintegrasjon. I tillegg til dei matematiske approksimasjonene har vi brukt ein fysisk modell som er for enkel. Det vil til dømes vere meir realistisk å operere med ein større verdi r_1 for den indre venderadien. α-partikkelen har og ein endeleg radius, slik at den sterke kjernekrafta gjer seg gjeldande for ein senteravstand på rundt 9 fm, istadenfor 6.5 fm, som vi har brukt ovanfor. Dette svarer til ein kortare barriere og dermed kortare levetider. Desse korreksjonane har meir å seie for sjølve levetidene enn for forholdet mellom dei.