LØYSING ØVING 11

Løysing oppgåve 1 *Spreiing* på δ-funksjonspotensialet

a) Frå diskusjonen av bølgepakker i forelesningane skjønar vi at leddet $\psi_t = \exp(ikx)$ (for $x > 0$) svarer til ei transmittert bølgje (og ein transmittert straumtettheit $j_t = |C|^2\hbar k/m$). Eit ledd $D\exp(-ikx)$ for $x > 0$ svarer til partiklar som kjem inn frå høgre, og det skal vi ikkje ha i denne spreiingsprosessen. Det er altså eit *randkrav* at vi berre har ei transmittert bølgje for $x > 0$.

b) Den transmitterte straumtettheten er

$$j_t = \Re\mathrm{e}[\psi_t^* \frac{\hbar}{im_e}\frac{d\psi_t}{dx}] = \Re\mathrm{e}[e^{-ikx}\frac{\hbar}{im_e}\,ik\,e^{ikx}] = \frac{\hbar k}{m_e}.$$

Den innkommande straumtettheiten er tilsvarande

$$j_i = \Re\mathrm{e}[\frac{1}{t^*}e^{-ikx}\frac{\hbar}{im_e}ik\,\frac{1}{t}\,e^{ikx}] = \frac{1}{|t|^2}\frac{\hbar k}{m_e}.$$

Sannsynlegheiten for transmisjon blir såleis absoluttkvadratet av "transmisjonsamplituden" t:

$$T = \frac{j_t}{j_i} = |t|^2.$$

c) Med ψ lik $\frac{1}{t}e^{ikx} + be^{-ikx}$ for $x < 0$ og lik e^{ikx} for $x > 0$ gjev kontinuiteten i origo kravet

$$1/t\, + b = 1, \qquad \text{dvs} \quad b = 1 - 1/t.$$

Dette kan vi bruke til å eliminere b frå diskontinuitetskravet for ψ', som er

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = ik - ik(1/t - b) = \frac{2m\beta}{\hbar^2}\cdot 1 = \frac{2f}{a_0}.$$

Resultatet er

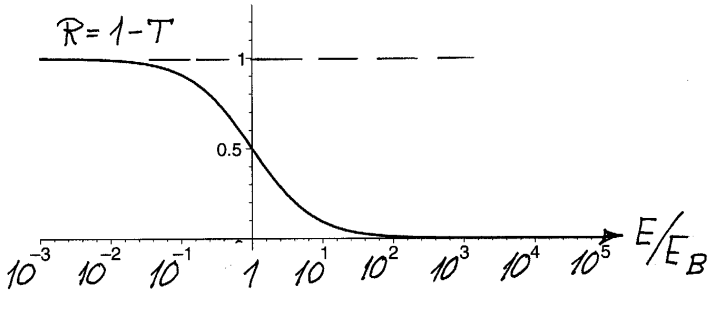
$$\boxed{\frac{1}{t} = 1 + \frac{if}{ka_0},} \quad \text{q.e.d.}$$

Sannsynlegheiten for transmisjon er altså

$$T = |t|^2 = \frac{1}{1 + f^2\frac{\hbar^2}{2m_eEa_0^2}} = \frac{1}{1 + E_B/E},$$

der $E_B = f^2\hbar^2/(2m_ea_0^2)$ er bindingsenergien (for negativ f).

(i) For $E << E_B$ ser vi at $T \approx E/E_B << 1$ (og $R = 1 - T \approx 1$). (ii) For $E = E_B$ ser vi at $T = 1/2$. (iii) For $E >> E_B$ ser vi at $T \approx 1$ (og $R = 1 - T << 1$).



Diagrammet viser at endringa frå $T << 1$ til $T \approx 1$ skjer grovt sett for $0.1\, E_B \lesssim E \lesssim 10\, E_B$. Difor kan vi seie at bindingsenergien E_B er ein naturleg skala når vi skal diskutere korleis transmisjonskoeffisienten T og refleksjonskoeffisienten $R = 1 - T$ er avhengig av energien.

d) Viss $\Im\mathrm{m}(k) > 0$ vil

$$\lim_{x\to\infty} e^{ikx} = 0, \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-ikx} = 0,$$

medan $|\exp(ikx)|$ går mot uendeleg i grensa $x \to -\infty$. For å unngå det siste problemet må vi difor i tillegg krevje at t er uendeleg. Dette er oppfylt for

$$k = -if/a_0 \equiv i\kappa \qquad (\text{med } \kappa = -f/a_0).$$

For at begge desse krava skal vere oppfylte, må vi ha $f < 0$. Da får vi ein bølgjefunksjon på forma

$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} = e^{-\kappa x} & \text{for} \quad x > 0 \\ be^{-ikx} = e^{\kappa x} & \text{for} \quad x < 0. \end{cases}$$

Energien til denne tilstanden blir då

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m_e} = -f^2\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}.$$

Dette er nøyaktig samme resultatet som vi fann på førelesning.

Moralen er at når vi reknar ut transmisjonsamplituden t finn vi at den (for $f < 0$, dvs med ein δ-brønn) har ein pol på den positive imaginære k-aksen, dvs for $k = i\kappa$. Med denne imaginære k-verdien får vi altså med på kjøpet den eine bundne tilstanden for dette systemet. Merk forøvrig at for $f > 0$ (δ-*barriere*) hamnar polen i t på den *negative* imaginære k-aksen, og då har vi ingen bunden tilstand.

Løysing oppgåve 2 **Rotasjonssymmetrisk potensial i to dimensjonar**

a) Den tidsuavhengige Schrödingerlikninga i to dimenjonar i polarkoordinatar er

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r,\phi)\right]\psi(r,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\phi). \tag{0.1}$$

der

$$\nabla^2 \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ . \tag{0.2}$$

Innsetting av $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$ gjev

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_z^2}{\hbar^2 r^2}\right) + V(r,\phi)\right]\psi(r,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\phi)\ . \tag{0.3}$$

Dersom vi krev at bølgjefunksjonen skal vere eintydig får vi

$$\psi(r,0) \quad = \quad \psi(r,2\pi)\ , \tag{0.4}$$

sidan $\phi = 0$ og $\phi = 2\pi$ er same punkt på sirkelen. (Ein kan sjølsagt velje eit vilkårleg punkt på sirkelen). Etter innsetting i (0.4) og forkorting med $R(r)$ gjev dette $1 = e^{2\pi i m}$. Denne likninga har løysing

$$m = \underline{\underline{0, \pm 1, \pm 2, \ldots}} \ . \tag{0.5}$$

b) Innsetting av $\psi(r,\phi) = R(r)e^{im\phi}$ i likning (1) og forkorting med $e^{im\phi}$ gjev direkte den oppgjevne likninga.

c) Dersom vi skiftar variabel $x = r\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$ får vi $\frac{d}{dr} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\frac{d}{dx}$ etc. Ved innsetting av $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega x^2$ gjev dette

$$-\frac{1}{2}\hbar\omega\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2}\right]u(x) + \frac{1}{2}\hbar\omega x^2 u(x) = Eu(x) \tag{0.6}$$

Vi har $R(r) = u(x) = P(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Dette gjev

$$u'(x) = P'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - P(x)xe^{-\frac{1}{2}x^2} \ , \tag{0.7}$$

$$u''(x) = P''(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - 2P'(x)xe^{-\frac{1}{2}x^2} + P(x)\left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} \ . \tag{0.8}$$

Innsetting av $u'(x)$ og $u''(x)$ og forkorting med $\frac{1}{2}\hbar\omega$ og $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ gjev

$$P''(x) + \left(\frac{1}{x} - 2x\right)P'(x) + \left(\epsilon - 2 - \frac{m^2}{x^2}\right)P(x) = 0 \ . \tag{0.9}$$

Dette trong du som sagt ikkje vise.

c) Vi bruker potensrekkjemetoden og skriv

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ . \tag{0.10}$$

Dette gjev

$$P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \ , \tag{0.11}$$

$$P''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} \ . \tag{0.12}$$

Innsetting gjev då

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n & \\ +(\epsilon - 2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - m^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2} &= 0 \ .\end{aligned} \tag{0.13}$$

Dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \frac{a_1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n & \\ +(\epsilon - 2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - m^2\left(\frac{a_0}{x^2} + \frac{a_1}{x}\right) - m^2\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} &= 0 \ ,\end{aligned} \tag{0.14}$$

der vi andre summen har trekt ut første leddet og i siste summen trekt ut første og andre leddet. Dersom vi redefinerer $n \to n-2$ i det første, tredje og siste leddet, får vi etter litt opprydding

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[a_{n+2}(n+2)^2 - m^2 a_{n+2} + (\epsilon - 2n - 2)\,a_n\Big]\,x^n \\ + \frac{a_1(1-m^2)}{x} - \frac{a_0 m^2}{x^2} \;=\; 0\,. \tag{0.15}$$

Koeffisienten foran kvar potens av x må vere lik null. Dette gjev rekursjonsrelasjonen

$$a_{n+2} \;=\; \frac{2n+2-\epsilon}{(n+2)^2 - m^2}\,a_n\,. \tag{0.16}$$

I tillegg må $a_0 = 0$ viss $m^2 \neq 0$ og $a_1 = 0$ viss $m^2 \neq 1$ (elles hadde rekkja ikkje vore gyldig i $x = 0$). Rekursjonsformelen viser at $a_{n+2}/a_n \sim 2/n$ for store n som er same oppførsel som rekkja for e^{x^2}. Det vil seie at $P(x) \sim e^{x^2}$ for store x og difor at $u(x) \sim e^{\frac{1}{2}x^2}$ for store x. $u(x)$ er såleis ikkje normerbar. Einaste vegen ut er at rekkja terminerer, det vil seie $a_{n+2} = 0$ for passe heiltal $n = 0, 1, 2, 3....$ Dette gjev

$$\epsilon = 2n + 2\,, \tag{0.17}$$

eller

$$E \;=\; \underline{\underline{\hbar\omega(n+1)}}\,. \tag{0.18}$$

d) Dersom $P(x) = A$ er konstant får vi ved innsetting i (0.9)

$$\left(\epsilon - 2 - \frac{m^2}{x^2}\right)A \;=\; 0\,, \tag{0.19}$$

som har løysing når $\epsilon = 2$ og $m^2 = 0$. Dette gjev $E = \hbar\omega$ og dette svarer såleis til grunntilstanden $n = 0$.

Dersom $P(x) = Bx$ får vi ved innsetting og litt opprydding

$$\frac{1}{x}\left(1 - m^2\right)B + x\,(\epsilon - 4)\,B \;=\; 0\,, \tag{0.20}$$

som har løysing $\underline{\underline{\epsilon = 4}}$ og $m^2 = 1$, det vil seie $E = 2\hbar\omega$ og $\underline{\underline{m = \pm 1}}$. Dette svarer såleis til fyrste eksiterte tilstand $n = 1$.