Frist for innlevering: *Tirsdag 7. april kl.17.00*

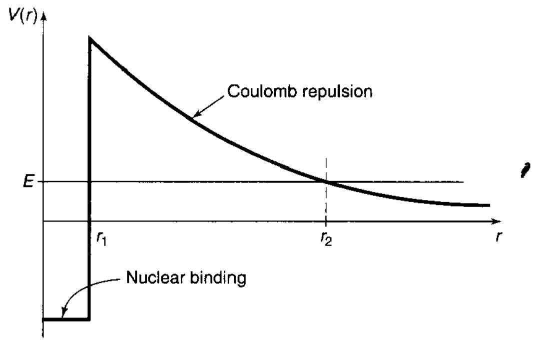
ØVING 9

Oppgåve 1

Les alt i seksjon 3.6 frå tillegg 3 som er relevant for å løyse oppgåve 2.

Oppgåve 2 α-desintegrasjon

α-desintegrasjon er ein prosess der ei radioaktiv opphavs-kjerne (*parent nucleus*) desintegrerer til ei dotter-kjerne (*daughter nucleus*) og ein α-partikkel (dvs ei helium-kjerne, ${}^4_2\mathrm{He}^{++}$, med ladning $2e$).



Figuren viser potensialet mellom α-partikkelen og dotter-kjerna (${}^A_Z\mathrm{X}$, med ladning Ze og nukleontal (massetal) A; merk at A og Z referer til *dotter*-kjerna). Coulomb-delen av dette potensialleddet er

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r}.$$

For ein α-partikkel med energi E ser vi at dette potensialet utgjer ein **Coulomb-barriere** som strekker seg frå kjerneradien $r_1 = (1.07\,\mathrm{fm})A^{1/3}$ ut til den ytre venderadien r_2, som er gjeven ved

$$E = V(r_2) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r_2}.$$

Ein kan vise transmisjonskoeffisienten for denne barrieren er tilnærma

$$T \cong \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m[V(r)-E]}\,dr\right).$$

a) Bruk definisjonen av r_2 til å vise at potensialet $V(r)$ kan skrivast som $V(r) = Er_2/r$ og bruk dette til å uttrykke $\ln T$ som

$$\ln T \cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\; r_2\int_{r_1/r_2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx.$$

Ein rask måte å estimere verdien av integralet på er å merke seg at

$$I \equiv \int_{r_1/r_2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx = \int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx - \int_0^{r_1/r_2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx.$$

Det fyrste integralet på høgresida er $\frac{1}{2}\pi$. (Det kan du lett sjekke ved å skifte variabel; $x = \cos^2 y$). I det andre integralet kan vi tilnærma erstatte $\frac{1}{x} - 1$ med $1/x$, sidan $x < r_1/r_2 << 1$. Tilnærma finn vi altså for integralet I

$$I \cong \frac{1}{2}\pi - \int_0^{r_1/r_2} x^{-1/2} dx = \frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{r_1/r_2}.$$

(Med same variabelskifte kan ein vise at den eksakte verdien av integralet er $\arccos\sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{r_1/r_2(1 - r_1/r_2)}$;

b) Bruk det *tilnærma* resultatet for integralet ovanfor til å vise at logaritmen av transmisjonskoeffisienten kan skrivast som

$$\ln T \cong -2\left[K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}\right],$$

der

$$K_1 \equiv \pi \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\sqrt{2mc^2} = 1.979(\mathrm{MeV})^{1/2},$$
$$K_2 \equiv 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}}\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}} = 1.485\,\mathrm{fm}^{-1/2}.$$

[I kjernefysikk bruker ein **atommasse-eininga** u= 931.49432 MeV/c^2, som er ein brøkdel $\frac{1}{12}$ av massen til karbonisotopen ^{12}C. Massen til eit helium-4-atom er 4.002603 u. Massen til α-partikkelen er dermed $(4.002603 \times 931.49432 - 1.022)$ MeV/c^2=3727.378 MeV/c^2. Du får også bruk for $\hbar c = 1.9735 \times 10^8$ eV fm.]

c) Gå ut frå at α-partikkelen med sannsynlegheit $= 1$ er i kjerna ved tida $t = 0$. For kvar kollisjon med kjerneoverflata blir denne sannsynlegheiten redusert med ein faktor $1 - T$, der T er transmisjonskoeffisienten. Med tidsintervallet t_1 mellom kvar kollisjon er talet på kollisjonar etter tid t lik t/t_1. Sannsynlegheiten for at α-partikkelen framleis skal vere i kjerna ved tida t er derfor

$$P(t) = (1 - T)^{t/t_1} \approx e^{-Tt/t_1}.$$

Forklar kvifor den siste overgangen er ei særs god tilnærming når $T \ll 1$, som her. [Merk at $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + \cdots$.] Finn levetida τ uttrykt ved T og t_1, og uttrykk sannsynlegheiten ovanfor ved τ. Merk at levetida pr def er den tida det tar før sannsynligheten P er redusert med en faktor $1/e$.

d) Bruk tilnærmingsformelen i b) (og resultatet ovanfor) til å rekne ut den teoretiske levetida (τ) for (*opphavs-*)kjernene

$$^{212}_{84}\mathrm{Po} \qquad (\text{med} \quad E \approx 8.9\,\mathrm{MeV}\ \text{for}\ \alpha\text{-partikkelen}) \quad \text{og}$$
$$^{232}_{90}\mathrm{Th} \qquad (\text{med} \quad E \approx 4.1\,\mathrm{MeV}\ \text{for}\ \alpha\text{-partikkelen}).$$

[NB! Husk at dotterkjerna har to protoner mindre enn opphavskjerna.] Sammenlikn forholdet mellom desse *utrekna* levetidene med forholdet mellom dei *målte* halveringstidene, som er

$$\frac{\tau_{1/2}(^{232}\mathrm{Th})}{\tau_{1/2}(^{212}\mathrm{Po})} \cong \frac{1.40 \times 10^{10}\mathrm{y(ears)}}{3 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}}.$$

[Hint: Gå ut frå at $t_1 = 2r_1/v$, og bruk $v = \sqrt{2E/m}$. Det kan vere lurt å rekne ut t_1 separat, for å ha bedre styr på numerikken.]