NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Løysingsframlegg TFY4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2012

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Fredag 7. desember 2012
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

Likninga for ein anharmonisk oscillator med demping kan skrivast som

$$\ddot{x} + b\dot{x} - kx + x^3 = 0 , \tag{1}$$

der b og k er reelle parametre.

a) Dersom $b > 0$ har vi vanleg demping, der leddet $b\dot{x}$ kan tolkast som eit friksjonsledd. Dersom $b < 0$, har vi "antidemping", det vil seie at vi tilfører systemet energi. Det lineære leddet kx kan tolkast som ei kraft der forteiknet avgjer retninga. Dersom $k < 0$ har vi eit vanleg harmonisk ledd som verkar mot $x = 0$. Dersom $k > 0$ verkar den lineære krafta bort frå origo. **Merk**: Den kubiske leddet dominerer for store $|x|$ og stabiliserer oscillatoren. Vi multipliserer likning (1) med $\dot{x}$ og skriv likninga

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}x^4\right] = -b\dot{x}^2 . \tag{2}$$

For $b = 0$ og alle verdiar av k er venstresida lik null og integrasjon gjev da den bevarte energien er

$$E = \underline{\underline{\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}x^4}} . \tag{3}$$

I dette tilfellet er den kinetiske energien $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ og potensialet

$$V(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}x^4 . \tag{4}$$

Vi ser og frå likning (2) at $\frac{dE}{dt} < 0$ viss $b > 0$ (dissipasjon) og $\frac{dE}{dt} > 0$ viss $b < 0$ (energi tilført systemet) i samsvar med tolkninga av b som friksjonsledd og "antidempingsledd". Potensialet $V(x)$ er vist i Fig. 1.

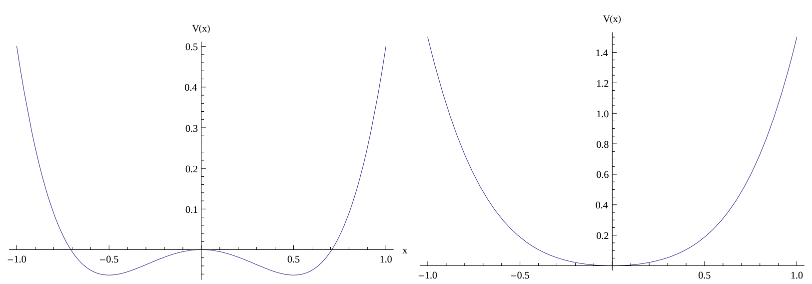

Figure 1: Potensialet $V(x)$ for $k = 1$ og $k = -1$.

b) Viss vi definerer ein ny variabel $y = \dot{x}$, følger likning (3) ved derivasjon og innseting frå likning (1).

c) $\dot{x} = 0$ gjev $y = 0$. Innsett i likninga $\dot{y} = 0$ gjev då $kx - x^3 = 0$. Vi har tre løysingar $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{k}$. Dette gjev fikspunkta $\underline{\underline{(0,0)}}$ og $\underline{\underline{(\pm\sqrt{k}, 0)}}$. Dei to fikspunkta $(\pm\sqrt{k}, 0)$ eksisterer berre for $k \geq 0$. Jakobimatrisa er

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k - 3x^2 & -b \end{pmatrix} . \tag{5}$$

For fikspunktet $(0,0)$, gjev dette

$$A(0,0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -b \end{pmatrix}}} . \tag{6}$$

For fikspunkta $(\pm\sqrt{k}, 0)$

$$A(\pm\sqrt{k}, 0) \;=\; \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2k & -b \end{pmatrix}}}\,. \tag{7}$$

d) Det karakteristiske polynomet for fikspunktet $(0, 0)$ er $\lambda(\lambda + b) - k$ og eigenverdiane er

$$\lambda_{\pm} \;=\; \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4k}}{2}}}\,. \tag{8}$$

Det karakteristiske polynomet for fikspunkta $(\pm\sqrt{k}, 0)$ er $\lambda(\lambda + b) + 2k$ og eigenverdiane er

$$\lambda_{\pm} \;=\; \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8k}}{2}}}\,. \tag{9}$$

e) For fikspunktet $(0, 0)$ har vi $\tau = -b$ og $\Delta = -k$. For $k > 0$ og vilkårleg b er altså eit sadelpunkt. For $k < 0$ er origo ein node viss $b^2 + 4k > 0$ og ein spiral viss $b^2 + 4k < 0$. For $b^2 + 4k = 0$ har vi ein degeneret node. Origo er stabilt viss $b > 0$ og ustabilt viss $b < 0$. Dette er vist i Fig. 2.

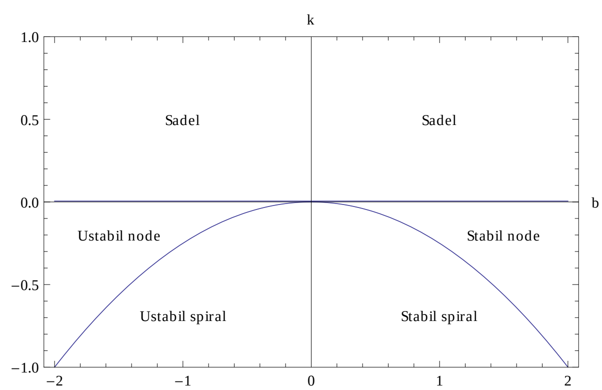

Figure 2: Stabilitetsdiagram for origo.

For fikspunkta $(\pm\sqrt{k}, 0)$ har vi $\tau = -b$ og $\Delta = 2k$. Dei eksisterer berre for $k \geq 0$. For $k > 0$ er desse fikspunkta nodar viss $b^2 - 8k > 0$ og spiralar viss $b^2 - 8k < 0$. For $b^2 - 8k = 0$ har vi ein degeneret node. Fikspunkta er stabile viss $b > 0$ og ustabile for $b < 0$. Dette er vist i Figur. 3.

f) For $b = 0$, er eigenverdiane til fikspunktet i origo lik $\pm\sqrt{k}$. For $k \leq 0$ er origo difor eit nøytralt senter og for $k > 0$ eit sadelpunkt. Altså skiftar origo stabilitet for $k = k_c = 0$. For $b = 0$ er eigenverdiane til fikspunkta $(\pm\sqrt{k}, 0)$ lik $\pm i\sqrt{2k}$ og difor eit nøytralt senter. **Merk**: Sidan systemet er

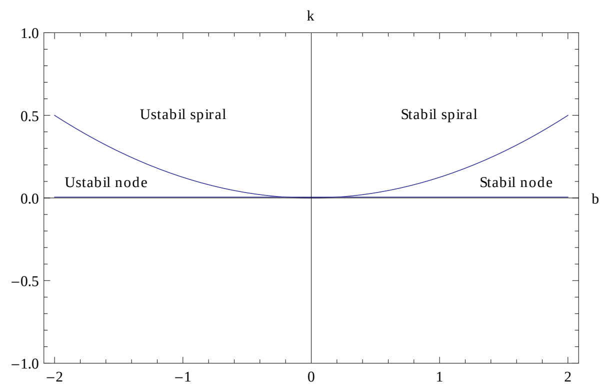

Figure 3: Stabilitetsdiagram for $(\pm\sqrt{k}, 0)$.

konservativt er eit lineært senter og eit ikkjelineært senter. Alternativt kan ein bruke at systemet er reversibelt for $b = 0$. Dette kan ein og kome fram til viss ein diskuterer potensialet $V(x)$ som er vist i Fig. 1.

g) For $k = 0$ gjev likningssettet (2)–(3) at origo er det einaste fikspunktet. Dersom $b > 0$ har eit partikkel som beveger seg i eit potensial $V(x) = \frac{1}{4}x^4$ med (anti)demping. Potensialet har same form som $k = -1$ i Fig. 1. Dette tyder at fikspunktet er ein *stabil spiral*: Ein partikkel beveger seg att og fram i potensialet men utslaget blir mindre og mindre pga demping. For $b < 0$ har vi antidemping - det vil seie at vi tilfører systemet energi og origo er ein *ustabil spira*l. For $b = b_c = 0$ er systemet konservativt og origo skifter stabilitet. For $b = 0$ er origo eit *nøytralt senter* (utslaget i potensialet er konstant). Sidan det er ikkje er stabile baner for $b < 0$ eller $b > 0$, er bifurkasjonen *degenerert*. **Merk**: Linearising av likningssystemet impliserer at det er ei linje av fikspunkt (x-aksen) og eigenverdiane $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = 0$, og difor $\Delta = 0$. Dette er eit grensetilfelle der ein ikkje alltid kan stole på linearisering. Oppgåva her eit døme på det.

Oppgåve 2

Likningssystemet er

$$\dot{x} = x - y - x^3 \,, \tag{10}$$
$$\dot{y} = x + y - y^3 \,. \tag{11}$$

a) $(0, 0)$ er opplagt eit fikspunkt. Spørsmålet er om det finst fleire fikspunkt. $\dot{x} = 0$ gjev $y = x - x^3$ som innsett i $\dot{y} = 0$ gjev $x + (x - x^3) - (x - x^3)^3 = 0$. Dette kan vi faktorisere, $x(x^8 - 3x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 2) = 0$. Frå oppgåveteksten veit vi polynomet i parantesen ikkje har reelle nulpunkt. Altså har likningssystemet ikkje andre løysingar enn $x = y = 0$ og *origo er det einaste fikspunktet.*

b) Vi skiftar til polarkoordinatar og bruker

$$r\dot{r} \;=\; x\dot{x} + y\dot{y}\;. \tag{12}$$

Dette gjev

$$\dot{r} \;=\; r - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta)\;, \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

Dette gjev $\dot{r} > r - r^3$ sidan maksimum til $(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$ er 1. Likeeins er $\dot{r} < r - \frac{1}{2}r^3$ sidan minimum til $(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = \frac{1}{2}$. Vi har da at $\dot{r} > 0$ på ein sirkel med radius $r > r_{\mathrm{min}} = 1$ og $\dot{r} < 0$ på ein sirkel med radius $r > r_{\mathrm{maks}} = \sqrt{2}$. Området mellom dei to konsentriske sirklane er difor eit innfangingsområde utan fikspunkt. Poincare-Bendixon teoremet gjev da at det finst ei stabil grensesyklus innafor dette området. Sja Fig. 4. Alternativt

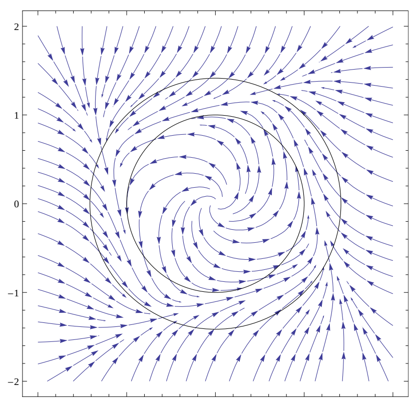

Figure 4: Faseportrett med innfangingsområde

og meir elegant kan ein vise at origo er ein ustabil spiral. Jakobimatrisa i origo er nemleg gjeve ved

$$A(0,0) \;=\; \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}\;. \tag{15}$$

og eigenverdiane er $\lambda_{\pm}1 \pm i$. Ein kan da fjerne eit infinitesimalt området rundt fikspunktet $r = 0$ og bruk Poincare-Bendixon teoremet. Det var fleire studentar som løyste oppgava slik.

Oppgåve 3

a) $x = 0$ er opplagt eit fikspunkt. Stabiliteten er gjeve ved $|t'(x)|$ evaluert i $x = 0$. Sidan $t'(x) = r$ for alle r, er $x = 0$ stabilt for $\underline{\underline{r < 1}}$. For $r = 1$ er $x = 0$ marginalt stabilt. Alle punkt $x \leq \frac{1}{2}$ er nå fikspunkt og $x = 0$ er difor Liapunov stabil. Ved å bruke eit spindelvev ("cobweb") kan ein vise at $x_n \to 0$ for alle $x \in [0, 1]$ for $r < 1$. Altså er $x = 0$ globalt stabilt for $\underline{\underline{r < 1}}$.

b) Ved innsetting ser ein at $q = t(p)$ $p = t(q)$ dersom $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$. Ulikheiten $q \geq \frac{1}{2}$ gjev då $r^2 \geq 1$ eller $r \geq 1$. For $r = 1$ er $p = q$ slik at periode-2 syklusen blir født for $r = 1$ og eksisterer altså for $\underline{\underline{r \geq 1}}$.

c) Stabiliteten til periode-2 syklusen er gjeve ved $|\frac{d}{dx}t(t(x))|_{x=p}| = |t'(p)t'(q)|$. Sidan $t'(x) = r$ for alle x, er $|t'(p)t'(q)| = r^2 > 1$ og syklusen er såleis *ustabil*. Vi har at $t'(x) = r$ for alle x. Det tyder at Liapunov eksponenten er enkel å rekne ut:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \\
&= \ln r \, .
\end{aligned} \tag{16}
$$

Vi har kaos når $\lambda > 0$, det vil seie for $\underline{\underline{r > 1}}$.