Elementær basis- og dimensjonsteori i lineær algebra

John Aslak Wee Kleven

20. februar 2023

I dette notatet skal vi se på grunnleggende teori i ("teoretisk" / "abstrakt") lineær algebra. Vi vil bruke $\mathbb{F}$ for kropper. Hvis dette er uvant, så kan leser tenke på det som et symbol for "$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$". Referanser for dette er enhver bok i ("teoretisk" / "abstrakt") lineær algebra, som for eksempel [1] og [2]. Førstnevnte er en Springer-bok, så man kan lett få tak i en pdf fra NTNUs nett. Dette notatet inneholder noe kok av bevis fra [1].

1 Vektorrom

Her er definisjonen på vektorrom.

Definisjon 1.1. En triplett $(V, +, \cdot)$ er et vektorrom over $\mathbb{F}$ hvis $+ : V \times V \to V$ og $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ og

1. $u + v = v + u$ for hver $u, v \in V$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ for hver $u, v, w \in V$.
3. Det fins en $0 \in V$ slik at $0 + v = v$ for hver $v \in V$[1].
4. For hver $v \in V$ fins en $u \in V$ slik at $u + v = 0$.
5. $1 \cdot v = v$ for hver $v \in V$.
6. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ og $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ for hver $a, b \in \mathbb{F}$ og $u, v \in V$.

Når man har disse aksiomene kan man gjøre ting som å observere at u-en i aksiom 4 er unik, slik at vi kan tillate oss å skrive $-v$ for u, og dermed gjøre ting som å definere $a - b = a + (-b)$. Man kan også vise at $a \cdot 0 = 0$ for hver $a \in \mathbb{F}$ og at $(-1) \cdot v = -v$ for hver $v \in V$. Vi vil ikke gjøre det her.

2 Underrom

Et underrom skal være et et vektorrom som ligger inni et annet vektorrom.

[1]Merk at 0 er unik ved forrige aksiom, da da hvis en 0 og $0'$ begge har denne egensakpen, så må de være like.

Definisjon 2.1. La $(V, +, \cdot)$ være et vektorrom Da er en mengde $U \subseteq V$ et *underrom av* V hvis U er selv et vektorrom med $+$ og $\cdot$, begrensa til U[2].

Eksempel 2.2. Hvis $V = \mathbb{R}^2$ med den vanlige $+$ og $\cdot$, så er

$$U = \{(x, 0) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$$

et underrom.

Eksempel 2.3. Et mer interessant eksempel: Hvis $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ er mengden av alle uendeligderiverbare funksjoner, så er

$$U = \{y \in V \mid y' + y = 0\}$$

et underrom.

Det er en enkel måte å teste om en mengde er et underrom.

Teorem 2.4. La V være et vektorrom over $\mathbb{F}$. Da er mengde $U \subseteq V$ et underrom hvis

1. $0 \in U$
2. For hver $u, v \in U$ så vil $u + v \in U$.
3. For hver $a \in \mathbb{F}$ og $u \in U$, så er $a \cdot u \in U$.

Bevis. (skisse) Det som åpenbart mangler her er aksiom nr. 4 i vektorromsaksiomene. Men $-v = (-1) \cdot v$, så hvis $v \in U$ så vil $-v \in U$. De resterende aksiomene som må sjekkes arves av at U er inni V. $\square$

3 Span og lineær uavhengighet

3.1 Span

Gitt en mengde E av vektorer i et vektorrom V, så ønsker vi å kunne diskutere det minste underrommet av U som inneholder E. Er det mulig engang?

Lemma 3.1. La V være et vektorrom over $\mathbb{F}$, og $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ være en familie (mengde) av underrom av V, indeksert av en mengde Λ. Da er snittet

$$U = \bigcap_{i \in \Lambda} U_i = \{v \in V \mid \text{for hver } i \in \Lambda \text{ vil } v \in U_i\}$$

et underrom av V.

Bemerkning. I mengdelære, når man tar et snitt av mengder så får man en mindre mengde enn de man begynte med, så når vi har dette lemmaet kan vi bruke det til å produsere underrom "mindre" enn det vi har fra før av.

Bevis. Kall snittet for U. Vi bruker underromstesten.

1. ($0 \in U$). Siden $0 \in U_i$ for hver $i \in \Lambda$ (de er selv underorm), så vil $u \in U$.

[2] Formelt sett er det at $(U, +|_{U \times U}, \cdot|_{\mathbb{F} \times U})$ er et vektorrom. Her er $|$-notasjonen at man begrenser definisjonsmengden til en funksjon.

2. $(u+v \in U)$. Hvis $u, v \in U$ så vil $u, v \in U_i$ for hver $i \in \Lambda$, så $u+v \in U_i$ for hver $i \in \Lambda$, så $u+v \in U$.

3. $(a \cdot u \in U)$. Hvis $a \in \mathbb{F}$ og $u \in U$, så vil $u \in U_i$ for hver $i \in \Lambda$, så $a \cdot u \in U_i$ for hver $i \in \Lambda$, så $a \cdot u \in U$. ☐

Vi kan nå definere span:

Definisjon 3.2. La V være et vektorrom over $\mathbb{F}$, og la $E \subseteq V$ være en mengde av vektorer. Da er $\operatorname{span}(E)$ det minste underrommet av V som inneholder E. Altså,

$$\operatorname{span}(E) = \bigcap_{\substack{U \subseteq V \text{ underrom} \\ \text{slik at } E \subseteq U}} U$$

Mengden E kalles en *genererende mengde* for V.

Det er også en fin minimalitets-karakterisering av span:

Teorem 3.3. $\operatorname{span}(E)$ er det unike underommet av V som inneholder E og tilfredsstiller implikasjonen

$$E \subseteq U \implies \operatorname{span}(E) \subseteq U$$

for hvert underrom U av V.

Bevis. Eksistens: Følger av 3.1. Unikhet: Hvis to underrom, si W og W' begge har denne egenskapen, så vil $E \subseteq W$ og $E \subseteq W'$. Ved å bruke egenskapen vil da $W \subseteq W'$ og $W' \subseteq W$, så $W = W'$. ☐

Det er også en fin formel for span. Den holder også i det uendelige tilfellet, men da blir det mer knot å skrive opp.

Teorem 3.4. Hvis $E = \{v_1, \cdots, v_n\}$ er endelig, så er

$$\operatorname{span}(E) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Bevis. Gjøres ved minimaliteten til span. ☐

3.2 Lineær uavhengighet

Definisjon 3.5. En endelig mengde $E = \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq V$ er lineært uavhengig hvis for hver $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$, slik at $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, så vil $a_1, \cdots, a_n = 0$.

Lineær uavhengighet kan også bli definert for uendelige mengder, men vi må overkomme teknikaliteten om at man kan kun addere sammen endelig mange ting.

Definisjon 3.6. En (uendelig) mengde $E \subseteq V$ er lineært uavhengig hvis hver endelige delmengde $E' \subseteq E$ er lineært uavhengig.

Definisjon 3.7. En mengde $S \subseteq V$ er lineært avhengig hvis den ikke er lineært uavhengig.

Det er noen lemmaer som kobler sammen lineær (u)avhengighet og delmengder.

Lemma 3.8. La V være et vektorrom, og $A \subseteq B \subseteq V$. Hvis B er linært uavhengig, så er A lineært uavhengig.

Bevis. Oppgave. $\square$

Lemma 3.9. La V være et vektorrom, og $A \subseteq B \subseteq V$. Hvis A er linært avhengig, så er B lineært avhengig.

Bevis. Oppgave. $\square$

Dette kan bli formulert som at lineært uavhengige mengder er "lukka nedover", og lineært avhengige mengder er "lukka oppover".

Lemma 3.10. La $E = \{v_1, \cdots, v_n\}$ være en endelig lineært avhengig mengde av vektorer i V. Da fins en $1 \leq j \leq n$ slik at

1. $v_j \in \text{span}(v_1, \cdots, v_{j-1})$
2. $\text{span}(E \setminus \{v_j\}) = \text{span}(E)$, altså hvis vi fjerne v_j vil det ikke endre hva som spennes us.

Bevis. ([1, s. 34]) Den lineære avhengigheten til E gir at vi har noen $a_1, \cdots, a_n$ slik at

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

hvor ikke alle a_i-ene er null. La v_j være den største av i-ene slik at a_i er ikkenull. Da vil

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1}) \tag{1}$$

og første punkt er vist. For andre punkt, la $v \in \text{span}(E)$. Da vil

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

og vi kan erstatte v_j i høyresida med 1, og få at v er i spennet til $E \setminus \{v_j\}$. Dette gir $\text{span}(E) \subseteq \text{span}(E \setminus \{v_j\})$. Samtidig vil $E \setminus \{v_j\} \subseteq E$, så

$$\text{span}(E \setminus \{v_j\}) \subseteq \text{span}(E)$$

så siden begge mengdene er inneholdt i hverandre er de like. $\square$

Vi kan iterere lemmaet over for å få at lineært uavhengige mengder inneholder en lineært uavhengig mengde:

Lemma 3.11. La $E \subseteq V$ være en endelig mengde av vektorer. Da har E en lineært uavhengig delmengde som spenner ut samme underrom.

Bevis. Hvis E inneholder nuller, fjern de. Hvis E er lineært uavhengig eller tom, så er vi ferdige, siden $\emptyset$ er lineært uavhengig. Vi kan så iterativt fjerne et element fra E og bevare spennet ved lemma 3.10. Denne prosessen vil etter hvert slutte, siden hver gang vi fjerner et element fra E vil antallet elementer i E minke. Hvis vi fortsetter fram til E gjenstår med bare ett element, så vil E være lineært uavhengig (siden alle mengder med ett element, utenom $\{0\}$, er lineært uavhengige). Dermed vil algoritmen alltid slutte, og vi er ferdige. (Dette er i praksis et forkledt induksjonsbevis.) $\square$

4 Basiser

Definisjon 4.1. La V være et vektorrom. En mengde $E \subseteq V$ er en *basis* for V hvis den er lineært uavhengig og spenner ut V (altså $\text{span}(E) = V$).

Det er en fin ekvivalent formulering av basisdefinisjonen:

Teorem 4.2. En mengde $E \subseteq V$ er en basis for V hvis for hver $v \in V$ fins unike $v_1, \cdots, v_n \in E$ og $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$ slik at

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Bevis. ($\Rightarrow$) La v være gitt. Siden E er en basis for V fins $a_1, \cdots, a_n$ i $\mathbb{F}$ og $v_1, \cdots, v_n$ i V slik at

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Det var eksistens, så trengs unikhet. Unikhet av koeffisientene: Hvis vi har

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \end{aligned}$$

for et (muligens annet) sett med koeffisienter $b_1, \cdots, b_n$, så vil

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

så ved den lineære uavhengigheten til E må $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

Når hva gjelder unikhet av v_i-ene, så er det førsts og fremst noe vi trenger å tenke på hvis V ikke er endeligdimensjonal. For den interesserte, hvis vi har

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m \tag{2}$$

hvordan kan vi vise at vi har unikhet her? Hvis vi skriver $A = \{w_i \in E \mid 1 \leq i \leq m\}$ og $B = \{v_i \in E \mid 1 \leq i \leq n\}$, så vil $A \cup B$ være en delmengde av E og dermed lineært uavhengig, så siden

$$0 = a_1 + v_1 + \cdots + a_n v_n - b_1 w_1 - \cdots - b_m w_m$$

vil den lineære uavhengigheten gjøre at koeffisientene er null for alle v_i-er som ikke er lik noen av w_j-ene. (For de vil $a_i = b_j$, slik at uttrykkene i 2 blir det vi vil. $\square$

Det er et veldig viktig teorem om basiser, nemlig at de alltid fins:

Teorem 4.3. Hvert vektorrom har en basis.

Beviset er en rett fram anvendelse av Zorns lemma[3], som er utenfor dette notatets omfang og nivå.

[3]En påstand som er ekvivalent med *utvalgsaksiomet*, et av aksiomene i det vanligste aksiomatiske systemet i matematikk, ZFC. Utvalgsaksiomet er for øvrig historisk matematikkens mest kontroversielle aksiom.

5 Dimensjon

Vi vil at dimensjonen til et vektorrom skal være antallet elementer i basisen, men det kan oppstå problemer hvis to basiser kan ha ulik størrelse. Vi er i utgangspunktet interessert i det vi vil kalle endeligdimensjonale vektorrom, så vi vil

Definisjon 5.1. Et vektorrom V er *endeligdimensjonalt* det har en endelig genererende mengde. (Altså hvis det fins en endelig $E \subseteq V$ slik at $\text{span}(E) = V$.). V er *uendeligdimensjonal* hvis det ikke er endeligdimensjonalt.

Definisjonen over er ikke hva endeligdimensjonal burde bety, nemlig at vektorrommet har en endelig basis, men vi trenger et begrep for å kunne diskutere endeligdimensjonalitet før vi definerer dimensjon. Vi kan iallefall allerede nå se at et vektorrom har en endelig basis hvis og bare hvis det har en endeilg genererende mengde: En endeilg basis vil selv være en endelig genererende mengde, og gitt en endelig genererende mengde vil den inneholde en basis ved lemma 3.11.

Lemma 5.2. Anta at $V = \text{span}(w_1, \cdots, w_m)$. Da vil hver basis for V ha høyst m elementer.

Bevis. ([1, s. 35]) Anta at $u_1, \cdots, u_n$ er lineært uavhengig i V, og at $w_1, \cdots, w_m$ spenner ut V. Vi skal vise at $n \leq m$. Det gjør vi induktivt.

Steg 1: Se først på listen

$$u_1, w_1, \cdots, w_n$$

Den er lineært avhengig siden $w_1, \cdots, w_n$ i utgangspunktet spenner ut V. Ved lemma 3.10 kan vi fjerne én av w_i-ene slik at den nye listen fortsatt spenner ut V. (Beviset for lemma 3.10 vil sørge for at vektoren vi fjerner, ikke er u_1. **??**

Steg k: Fra forrige steg har vi nå en liste som begynner med $u_1, \cdots, u_{k-1}$, og er etterfulgt av noen w_i-er, som spenner ut V. Det er totalt m vektorer i lista. Hvis vi nå legger til u_k mellom $u_1, \cdots, u_{k-1}$ og w_i-ene, får vi en lineært avhengig mengde. Ved lemma 3.10 vil ett av elementene i lista være i spennet til de tidligere. Det kan ikke være én av u_i-ene, da $u_1, \cdots, u_j$ er lineært uavhengig, så det er en av w_i-ene. Fjern den.

Etter å ha gjort denne prosessen fram til steg n, har vi en lineært uavhengig liste som begynner med $u_1, \cdots, u_n$, og som muligens har noen w-er etterpå. Denne listen spenner ut V, og er lineært uavhengig, så $n \leq m$. □

Lemmaet over har et fint korollar:

Korollar 5.3. Hvert underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom, er endeligdimensjonalt.

Bevis. La $W \subseteq V$ være et underrom, og V endeligdimensjonal. Ved teorem 4.3 har W en basis $E \subseteq W$. Da er E en lineært uavhengig mengde i V, så ved lemma 3.11 vil antallet elementer i E være mindre enn eller lik alle størrelser til alle genererende mengder til V. Dermed er E endelig, så W er endeligdimensjonal. □

Nå kommer det store teoremet:

Teorem 5.4. ("Alle basiser er like store") Hvis V er endeligdimensjonal, så er alle basiser til V like store.

Bevis. Anta at U og W er begge basiser til V. Disse er begge endelige ved lemmaet over. La $n = |U|$ og $m = |W|$. (Her er $|U|$ antallet ting i U, og så videre). Siden $V = \text{span}(W)$ og U er en basis for V er U en lineært uavhengig mengde i $\text{span}(W)$. Ved lemma 5.2 må da $m \leq n$. Tilsvarende vil $n \leq m$, så $m = n$. □

Teoremet over holder generelt for alle vektorrom ("alle basiser for et vektorrom er like store"), men å vise det er utenfor notatets omfang.

Ved teoremet over kan vi definere dimensjon som det vi vil at det skal være:

Definisjon 5.5. La V være et vektorrom. Hvis V er endeligdimensjonalt, er dimensjonen antallet elementer i en basis til V. Ellers har V uendelig dimensjon.

Siden vi har allerede definert begrepet "endeligdimensjonal", så kan vi sjekke at et vektorrom er endeligdimensjonalt hvis og bare hvis dimensjonen er endelig.

Teorem 5.6. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med dimensjon n, og la $E \subseteq V$. Hvis E er lineært uavhengig og $|E| < n$, så kan E bli utvidet til en basis for V.

Bevis. Skriv

$$E = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

for en $m < n$. Velg $\{w_1, \cdots, w_n\}$ en basis for V. Se på lista

$$v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n$$

Den er lineært avhengig (inneholder en basis pluss litt mer), og spenner ut V. Vi kan da iterativt fjerne w_i-er fra lista ved lemma 3.10 (lemmaet vil ikke fjerne noen av v_i-ene fordi ingen av de er i spennet av de tidligere vektorene) fram til prosessen stopper ved at vi ikke lenger kan fjerne ting fra lista. (Det gjør den fordi ved hvert steg har vi endelig mange ting i lista, og vi iterativt fjerner elementer fra den) Da vil ingen av vektorene være i spennet av de tidligere, så mengden må være lineært uavhengig. Siden lista fortsatt spenner V blir den en basis. □

Korollar 5.7. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med dimensjon n, og la $E \subseteq V$ være en lineært uavhengig mengde av n vektorer. Da vil E spenne ut V.

Bevis. Utvid E til en basis E' for V. Da vil E' ha n elementer ved teorem 4.3, men E har også n elementer så $E = E'$, så E er en basis. □

Tilbake til underrom igjen.

Teorem 5.8. Hvis $U \subseteq V$ er et underrom og V er endeligdimensjonal, vil

$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

Bevis. Dette er i praksis et korollar av teorem 5.6. Velg en basis E for U. Da er E en lineært uavhengig mengde i V, som kan bli utvidet til en basis E' for V som inneholder E, ved teorem 5.6. Så $|E| \leq |E'|$. Men alle basiser har samme størrelser, så $|E| = \dim(U)$ og $|E'| = \dim(V)|$, og vi er ferdige. □

Fra dette kan vi få et annet fint teorem om dimensjon og lineær avhengighet.

Teorem 5.9. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med dimensjon n, og la $E \subseteq V$. Hvis $E \subseteq V$ har $|E| > n$, så er E lineært avhengig.

Bevis. Ved å iterativt bruke 3.10 får vi at E har en lineært uavhengig delmengde E' som spenner ut det samme som E. Da er E' en basis for $\mathrm{span}(E') = \mathrm{span}(E)$, et underrom av V som dermed har dimensjon høyst n. Så E' har høyst n elementer, slik at $E \setminus E'$ er ikketom. Da vil de "overflødige" elementene i E (altså $E \setminus E'$) også være i spennet til E', slik at E er lineært avhengig. $\square$

6 Referanser

[1] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. 3. utg. Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-11079-0. URL: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-11080-6`.

[2] S. Friedberg, A. Insel og L. Spence. *Linear Algebra*. 4. utg. Pearson, 2014.