Kvaternioer

John Aslak Wee Kleven

6. mars 2023

I dette notatet skal vi se på kvaternioner. Noe av teorien til kvaternioner og deres relasjon til rotasjoner motiveres ved liknende resultater fra de komplekse tallene. Referanser for algebraen som brukes i notatet er [4] og [2]. For kvaternioner er de to første kapitlene av [3] en god referanse, og [5, seksjon 2.3].

1 Kvaternionene

1.1 Konstruksjon

I denne seksjonen vil vi konstuere kvaternionene, etter [4, s. 177]. La $\mathbb{H}$ være et 4-dimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$, og la $\{1, i, j, k\}$ være en basis. (Her er 1 foreløpig bare et symbol for en vektor i $\mathbb{H}$). Vi vil definere multiplikasjon trinnvis; først for 1, i, j og k, og deretter utvide det til hele $\mathbb{H}$ slik at $\mathbb{H}$ blir en ring og $\mathbb{R}$-algebra.

Vi definerer multiplikasjon på basiselementene til å være generert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

og at 1 er identitet, og at multiplikasjon med -1 kommuterer med alt sånn at vi kan flytte den inn og ut i et produkt slik vi vil.

Altså

$$\begin{aligned} ij &= -ijk^2 = k, \\ jk &= -i^2jk = i, \\ ji &= -jij^2 = -jkj = -ij = -k \end{aligned}$$

og så videre.

Det er enkelt, men slitsomt, å vise at denne multiplikasjonen blir assosiativ. Man kan også se at multiplikasjon på $\{i, j, k\}$ er antikommutativ, altså at

$$ij = -ji; \quad ik = -ki; \quad jk = -kj$$

som antydet til over. Nå som vi har definert multiplikasjon på basiselemtene, utvider vi det til hele $\mathbb{H}$ distributivt. Med dette blir $\mathbb{H}$ en ring.

Mengdene

$$\{a \cdot 1 \in \mathbb{H} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

og

$$\{a \cdot 1 + b \cdot i \in \mathbb{H} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

er underringer av $\mathbb{H}$ som er henholdsvis isomorfe med $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$. Heretter vil vi se på $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ som underringer av $\mathbb{H}$.

Når hva gjelder notasjon vil vi ofte sløyfe 1-en og skrive

$$a + bi + cj + dk$$

for $a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$. Dette vil gi ingen notasjonsmessige eller filosofiske problemer, siden $\mathbb{H}$ har en underring isomorf med $\mathbb{R}$, og skalarproduktet vi har på $\mathbb{H}$ fra dets status som vektorrom samsvarer med multiplikasjonen med denne underringen.

Én egenskap vi vil få nytte for er at multiplikasjon med $\mathbb{R}$ kommuterer med alt, nemlig at

$$rq = qr$$

for hver $r \in \mathbb{R}$ og $q \in \mathbb{H}$.

1.2 Representasjoner

De komplekse tallene har en representasjon som en underring av $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gitt ved

$$a + bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Vi kan gjøre tilsvarende for $\mathbb{H}$. Det viser seg at $\mathbb{H}$ er isomorf med en underring av $\mathbb{C}^{2\times 2}$ gitt ved

$$a + bi + cj + dk \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a + di & -b - ic \\ b - ic & a - id \end{pmatrix} \tag{1}$$

så vi kan tenke på $\mathbb{H}$ som en underring av $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Dette er vil også fungere som en alternativ definisjon av kvaternionene til den som ikke liker konstruksjonen gitt i forrige seksjon. For å være presis er $\mathbb{H}$ som ring isomorf med bildet til $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, som er en injektiv ringhomomorfi.

Med denne korrespondansen vil altså

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(merk at i-ene er forskjellige her, de inni matrisen er komplekse tall mens den utenfor er i $\mathbb{H}$.)

Intuitivt bør det også være mulig å representere den med reelle 4×4-matriser, siden de komplekse tallene har en representasjon som reelle 2×2-matriser. Denne korrespondansen er gitt ved

$$a + bi + cj + dk \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Denne representasjonen er ikke unik [1]. Vi vil ikke bruke representasjonene av 4×4-matriser i dette notatet, fordi forfatter liker ikke 4×4-matriser.

1.3 Konjugasjon og norm

De komplekse tallene har en konjugasjon

$$\overline{a+bi} = a - bi.$$

Ved representasjonen av $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ser vi at konjugasjon i $\mathbb{C}$ tilsvarer transponering i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Vi definerer konjugasjon på $\mathbb{H}$ ved

$$(a + bi + cj + dk)^* = a - bi - cj - dk$$

Hvis vi bruker korrespondansen mellom $\mathbb{H}$ og $\mathbb{C}^{2\times 2}$ i (1), alternativt ved å se på (2) og å bruke linearitet, så ser vi at konjugasjon i $\mathbb{H}$ tilsvarer konjugattransponering i $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Altså,

$$\varphi(q^*) = \varphi(q)^*$$

for hver $q \in \mathbb{H}$, og derav velger jeg å bruke $*$ for konjugasjon i $\mathbb{H}$. Man kan også skrive $\overline{q}$ for konjugering i $\mathbb{H}$, men jeg finner det mer forvirrende, fordi multiplikasjon i $\mathbb{H}$ ikke er kommutativ, så vi bør ikke forvente at $(qp)^* = q^*p^*$, hvis analog i $\mathbb{C}$ holder.

Ved å bruke kjente matriseregneregler får vi mange fine regneregler for konjugasjon i $\mathbb{H}$:

Teorem 1.1. Konjugasjonen i $\mathbb{H}$ tilfredsstiller

1. $(q^*)^* = q$ for hver $q \in \mathbb{H}$.
2. $(qp)^* = p^*q^*$ for hver $q, p \in \mathbb{H}$.

Bevis. Vi har

1. Hvis man konjugattransponerer to ganger i $\mathbb{C}^{2\times 2}$, så får man det man begynte med. Altså

$$\varphi((q^*)^*) = (\varphi(q)^*)^* = \varphi(q)$$

   slik at $q = (q^*)^*$.

2. Dette følger av regneregelen $(AB)^T = B^TA^T$ for matriser. $\square$

Hvis tar bryet om å regne ut qq^* og q^*q, så får vi en hyggelig overraskelse: Hvis $q = a + bi + cj + dk$, så vil

$$qq^* = q^*q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{3}$$

Den euklidske normen på $\mathbb{R}^2$ er kvadratroten til dette, så det blir en naturlig definisjon for normer på $\mathbb{H}$:

Definisjon 1.2. Normen på $\mathbb{H}$ er definert ved

$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q}$$

På koordinatform er det

$$\|a + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Normen, som vi vet at er en norm fordi det er en norm på $\mathbb{R}^4$, tilfredsstiller

1. $\|q\| \geq 0$ for hver $q \in \mathbb{H}$, med likhet hvis og bare hvis $q = 0$,
2. $\|qr\| = |r| \cdot \|q\|$ for hver $r \in \mathbb{R}$ og $q \in \mathbb{H}$.
3. $\|q + p\| \leq \|q\| + \|p\|$ for hver $q, p \in \mathbb{H}$.

Man kan se at hvis $a + bi + cj + dk = q \in \mathbb{H}$, så er determinanten til $\varphi(q)$, matrisen definert i (1), lik $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, som er kvadratet til normen. Med det ser vi at normen samsvarer med multiplikasjonen i en viss forstand, nemlig at

$$\|qp\| = \|q\| \cdot \|p\| \tag{4}$$

for hver $q, p \in \mathbb{H}$. Dette følger av at

$$\begin{aligned}
\|qp\|^2 &= \det(\varphi(qp)) \\
&= \det(\varphi(q)\varphi(p)) \\
&= \det(\varphi(q)) \det(\varphi(p)) \\
&= \|q\|^2 \|p\|^2
\end{aligned}$$

altså av multiplikativiteten til determinanten.

1.4 Divisjon

Én måte å definere divisjon for komplekse tall på, er ved

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{\overline{z}}.$$

Vi skal gjøre tilsvarende for kvaternionene. Formelen over er i utgangspunktet problemfritt i $\mathbb{C}$ siden de komplekse tallene er i utgangspunktet en kommutativ ring. Det er ikke kvaternionene så vi må være mer forsiktige.

Definisjon 1.3. For $0 \neq q \in \mathbb{H}$, definer q^{-1} ved

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Uttrykket over er veldefinert siden $\frac{1}{\|q\|^2}$ er et reelt tall, og multiplikasjon med reelle tall kommuterer i $\mathbb{H}$. Altså vil

$$q^* \cdot \frac{1}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2} q^*$$

og denne kvaternionen kaller vi $q^*/\|q\|^2$.

Teorem 1.4. For $0 \neq q \in \mathbb{H}$ vil $q^{-1}q = 1 = qq^{-1}$. Altså er q^{-1} den multiplikative inversen til q, slik at $\mathbb{H}$ er en divisjonsring.

Bevis. Husk at multiplikasjon med reelle tall kommuterer med all multiplikasjon i $\mathbb{H}$. Skriv $r = 1/\|q\|^2$, slik at $r \cdot \|q\|^2 = 1$. Da vil $q^{-1} = r \cdot q$. Posisjonen til r i forhold til q er ikke viktig på grunn av kommuteringen. Vi regner:

$$q^{-1}q = r \cdot (q^* q) = r \cdot \|q\|^2 = 1$$

og

$$qq^{-1} = q \cdot (r \cdot q^*) = r \cdot (qq^*) = r \cdot \|q\|^2 = 1,$$

hvor vi bruker 3 for å få normen fra qq^* og q^*q. □

Notasjonen q/p brukes ikke for kvaternioner q og p, da siden multiplikasjon ikke er kommutativt vil qp^{-1} og $p^{-1}q$ generelt være ulike, så det er ingen meningsfull definisjon for "q/p" i $\mathbb{H}$.

1.5 Algebraiske egenskaper

Her er et samleteorem som oppsummerer noen egenskaper til $\mathbb{H}$. vi har sett fram til nå.

Teorem 1.5. Kvaternionene har følgende egenskaper:

1. $\mathbb{H}$ er en ikkekommutativ divisjonsring, en $\mathbb{R}$-algebra og har en norm som vektorrom.

2. Multiplikative inverser er gitt ved

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk).$$

3. $\mathbb{H}$ har $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}$ som underringer, og multiplikasjon med $\mathbb{R}$ kommuterer med all multiplikasjon i $\mathbb{H}$.

4. $\mathbb{R}$ ligger i senteret til $\mathbb{H}$, altså kommuterer med all multiplikasjon i $\mathbb{H}$. Altså, $rz = zr$ for hver $r \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{H}$.

2 Rotasjon

2.1 Enhetskvaternionene

På polarform er multiplikasjon med komplekse tall gitt ved

$$(r_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Så hvis man multipliserer med $z = e^{i\varphi}$ for en $\varphi \in \mathbb{R}$, så vil det geometrisk være det samme som å rotere med en vinkel φ. Det kan også knyttes opp til rotasjonsmatriser, siden hvis $z = a + bi$ er et komplekst tall på enhetssirkelen vil $a^2 + b^2 = 1$. I $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vil z tilsvare

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Kravet $a^2 + b^2 = 1$ gir at $-1 \leq a \leq 1$, så det fins en θ slik at $a = \cos(t)$. Da vil $b = 1 - a^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, så z tilsvarer

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Teorem 2.1. Enhetskvaternionene

$$\{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$$

danner en gruppe under kvaternionmultiplikasjon.

Bevis. Kall mengden over for G. Vi vet i utgangspunktet at multiplikasjon er assosiativ siden $\mathbb{H}$ er en ring, så vi slipper å sjekke det.

1. Hvis $q, p \in G$ vil
$$\|qp\| = \|q\|\|p\| = 1$$
slik at $qp \in G$. Samme med pq.

2. Enheten til multiplikasjon er 1, også skrevet $1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$, som vi ser lett at har norm 1.

3. Hvis $q \in G$ vil
$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = q^*$$
og siden man kan verifisere at $\|p\| = \|p^*\|$ holder generelt for hver $p \in \mathbb{H}$, vil $\left\|q^{-1}\right\| = 1$, så $q^{-1} \in G$.

Så G tilfredsstiller gruppeaksiomene og er dermed en gruppe. $\square$

Enhetskvaternionene har en interessant egenskap; hvis $u \in \mathbb{H}$ har lengde 1, og $q, p \in \mathbb{H}$, så vil avstanden mellom uq og pq være

$$\begin{aligned}
\text{avstand mellom } up \text{ og } uq &= \|up - uq\| \\
&= \|u(p-q)\| \\
&= \underbrace{\|u\|}_{=1} \cdot \|p-q\| \\
&= \|p-q\| \\
&= \text{avstanden mellom } p \text{ og } q
\end{aligned}$$

så *multiplikasjon med enhetskvaternionene bevarer lengde* (fra venstre, og også fra høyre med et tilsvarende argument). Videre vil multiplikativiteten til normen i (4) gjør at enhetskvaternionene er de eneste slike kvaternionene.

Notatet slutter litt brått her. Da jeg begynte å skrive det hadde jeg tenkt til å fortsette med rotasjon, men jeg kom aldri så langt. Les kapittel 1 og 2 i [3] for hvordan kvaternionene relaterer seg til rotasjon.

3 Beregning

Utover å bruke matriserepresentasjone til kvaternionene for å beregne med dem, så kan man også gjøre det i SageMath. Her er et regneksempel fra seksjon 1.3:

```
sage: Q.<i,j,k> = QuaternionAlgebra(SR, -1, -1)
sage: 1*1, i*i, j*j, k*k, i*j*k
(1, -1, -1, -1, -1)
sage: var("a b c d")
(a, b, c, d)
sage: q = a + b*i + c*j + d*k
```

```
sage: conjugate(q)
a + (-b)*i + (-c)*j + (-d)*k
sage: q * conjugate(q)
a^2 + b^2 + c^2 + d^2
sage: conjugate(q) * q
a^2 + b^2 + c^2 + d^2
```

4 Referanser

[1] Richard William Farebrother, Jürgen Groß og Sven-Oliver Troschke. «Matrix representation of quaternions». I: *Linear Algebra and its Applications* 362 (2003), s. 251–255. ISSN: 0024-3795. DOI: `https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00535-9`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379502005359`.

[2] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. 7. utg. Pearson, 2014. ISBN: 9780201407518.

[3] John Stillwell. *Naive Lie Theory*. Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-78214-0. URL: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-78214-0`.

[4] P. B. Bhattacharya and S. K. Jain and S. R. Nagpaul. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press, 1994. ISBN: 0521466296.

[5] Rune Haugseng. *Introduction to Lie Theory (MA3407)*. 2022. URL: `https://folk.ntnu.no/runegha/lie/lienotes_web.pdf`.