# Konvergens av fourierrekker

John Aslak Wee Kleven

29. januar 2023

I dette dokumentet skal vi se på Chernoffs [2] konvergensbevis for (punktvis) konvergens av fourierrekker.

Jeg lærte om fourierrekker i MA2106 og i TMA4145. Da jeg tok disse emnene lærte jeg fra [4] og [3]. Sistnevnte er en Springer-bok, så man kan få enkelt tak i en pdf her: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-65322-8`.

I dette dokumentet vil vi bruke en del kompleks teori som man kanskje kun har sett i det reelle tilfellet. Til de vil jeg si at teorien er mye av det samme som den er for $\mathbb{R}$.

## 1 Grunnleggende konsepter

**Definisjon 1.1.** En funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ hvor $A \subseteq \mathbb{R}$ er *Lipschitz* hvis det fins en $K \geq 0$ slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

for hver $x$ og $y$ i $A$.

**Kommentar.** En Lipschitz-liknende egenskap vil dukke opp senere. Merk at hvis en funksjon er Lipschitz, så er den kontinuerlig, ved et enkelt $(\varepsilon, \delta)$-bevis som etterlates som en oppgave til den interesserte.

Vi skal nå innføre indreproduktet. De prototypiske eksemplene er $\mathbb{R}^n$ med prikkproduktet, og $\mathbb{C}^n$ med det vanlige vanlige komplekse prikkproduktet

$$(z_1, \cdots, z_n) \cdot (w_1, \cdots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j.$$

**Definisjon 1.2.** La $V$ være et vektorrom over $\mathbb{F}$, hvor $\mathbb{F}$ er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Da er $V$ et indreproduktrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ hvis $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tilfredsstiller

1. Indreproduktet er lineær i første argument, alstå

   $$\begin{aligned} \langle v + v', w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle, \\ \text{og} \qquad \langle av, w \rangle &= a\langle v, w \rangle \end{aligned}$$

   for alle vektorer $v, v'$ og $w$ i $V$, og skalarer $a$ i $\mathbb{F}$.

2. Indreproduktet er antisymmetriskt, altså

   $$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

   for alle vektorer $v, w$ i $V$. Merk at dette impliserer at $\langle v, v \rangle$ er reell for hver $v \in V$.

3. For hver $v \in V$, så vil
$$\langle v, v\rangle \geq 0$$
med likhet hvis og bare hvis $v = 0$.

Når man har et indreprodukt, så kan man begynne å angi vektorene sine lengder.

**Definisjon 1.3.** Gitt et indreprodukt $V$, definer $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ved
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$
Denne funksjonen kalles *normen* til $V$.

**Teorem 1.4.** Normer tilfredsstiller

1. $\|v\| = 0$ hvis og bare hvis $v = 0$, og
2. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ for hver skalar $a \in \mathbb{F}$ og $v \in V$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ for hver $v, w \in V$.

*Bevis.* Se en bok i grunnleggende lineær algebra, Se [3, s. 195] eller bøker i grunnleggende lineær algebra. □

Basert på egenskapene over, vil normer intuitivt angi hver vektor en lengde. Faktisk er det vanlig å kalle $\|v\|$ for lengden til $v$:

Hvis vi tar egenskapene i teorem 1.4 som aksiomer for å definere hva en *norm* på $V$ er, så ser vi at det fins flere mulige normer man kan ha på et vektorrom[1]. Normen vi har lagd er imidlertid ekstra fin fordi den kommer fra et indreprodukt. Vi kaller den *normen indusert av indreproduktet.*

Når vi da har en norm, så definerer vi (eller tenker på) $\|v - w\|$ til å være *avstanden* mellom $v$ og $w$. Normegenskapene over sørger for at denne avstanden oppfører seg intuitivt som avstand slik vi tenker på det.

**Definisjon 1.5.** To vektorer $v$ og $w$ i et indreproduktrom $V$ er *ortogonale* hvis $\langle v,w\rangle = 0$.

**Kommentar.** Dette er indreprodukt-generaliseringen av når to vektorer står rettvinkla på hverandre. Merk at $\langle v, w\rangle$ er null hvis og bare hvis $\langle w, v\rangle$ er null, så definisjonen er uavhengig av rekkefølgen av $v$ og $w$.

Indreproduktet tilfredsstiller

**Teorem 1.6** (Pythagoras' læresetning)**.** La $V$ være et indreproduktrom. Hvis $v, w \in V$ er ortogonale, så vil
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

*Bevis.* Du kan prøve selv, eller så kan du se hvilken som helst bok i grunnleggende (abstrakt) lineær algebra, eller så kan du se [3, s. 193]. □

[1] Faktisk utgjør mengden av normer på et vektorrom selv et vektorrom, så det bli veldig fort uendelig mange av dem.

### 1.1 Moro: Konvergens i normerte vektorrom

Siden vi har en norm, så kan vi også definere konvergens og sånt. Dette vil ikke bli brukt i resten av dokumentet, men det legges ved her fordi det er kult.

**Definisjon 1.7.** La $V$ være et normert vektorrom, altså et vektorrom med en norm $\|\cdot\|$. En følge $(v_n)$ av vektorer i $V$ konvergerer mot $L \in V$ hvis for hver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for hver $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq N$, så vil $\|v_n - L\| < \varepsilon$.

**Bemerkning.** På kortform blir det

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \to \|v_n - L\| < \varepsilon).$$

Teorien man har bygget opp for følger og rekker i $\mathbb{R}$ kan man i stor grad også gjøre på normerte vektorrom. Siden $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ utgjør normerte vektorrom med de vanlige normene, så har vi plutselig fått teorier for følger og rekker. På kjøpet får vi en teori for følger og rekker for vektorrom av funksjoner, som er ikke like intuitive.

Det er også mulig å definere grenseverdier og kontinuitet ved $(\varepsilon, \delta)$-definisjoner. Til tross for at dette er ganske generelt, så kan kontinuitetsdefinisjonen man får av å gjøre dette bli generalisert i minst to ytterliggere hakk. Først kan man bytte normene med avstandsfunksjoner (på fagspråket, "metrikker")[2], og man kan også forkaste det og bare bruke en topologi[3].

# 2 Fourierrekker

Fourierrekker bygger på idéen om at hvis man har et indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

på vektorrommet $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ av kontinuerlige funksjoner fra $[-\pi, \pi]$ til $\mathbb{C}$, så ser man at funksjonene

$$\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

i $x$ danner en ortonormal mengde, slik at det er fristende å håpe at projiseringsformelen som nå kommer, kanskje vil fungere i dette tilfellet også.

**Teorem 2.1.** La $V$ være et vektorrom, og $\{e_i\}_{i=1}^n$ en endeilg ortonormal mengde. La $M = \operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^n$. Da vil projiseringen av $x$ ned på $M$, definert ved

$$P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \tag{1}$$

være den unike vektoren i $M$ som er nærmest $x$.

*Bevis.* Se [1, s. 196–198] og for et fint bevis. □

Vi kan selvfølgelig ikke bruke formel (1) uten videre, siden $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ er et uendeligdimensjonalt vektorrom. Samtidig er det en veldig tiltrekkende idé.

[2]Dette gjøres i TMA4145 Lineære Metoder.
[3]Dette gjøres i TMA4190 Introduksjon til topologi.

Det viser seg at projeksjonsformelen over har en uendeilgdimensjonal variant, men den vil konvergere i normen per 1.7, og ikke nødvendigvis punktvis, som vi vil ha. Vi må altså gjøre mer for å få det vi vil ha.

På grunn av indreproduktet vi bruker, blir fourierkoeffisientene våre

$$\hat{f}(n) = \left\langle f, e^{inx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

# 3 Bessels ulikhet

Bessels ulikhet er en fin ulikhet, og vi trenger den for vårt bevis. Generelt blir den formulert i språket av indreprodukter, så fourier-versjonen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$$

blir bare et spesialtilfelle.

**Teorem 3.1** (Bessels ulikhet)**.** *La $V$ være et indreproduktrom, og la $(e_k)_k$ være en ortonormal følge. Da vil, for hver $x \in V$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

*(altså summen konvergerer, og er mindre enn $\|x\|^2$.)*

*Bevis.* Hvis vi summerer endelig, så får vi Husk at vi har følgende identitet i indreproduktrom:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

så det gir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \\
&= \|x\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 - 2\operatorname{Re}\left( \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\left( \sum_{k=1}^{n} \langle x, \langle x, e_k \rangle e_k \rangle \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\left( \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

hvor Pythagoras brukes. i overgangen fra første til andre linje. Så vi har

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Så la $n \to \infty$, og få

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

hvor summen konvergerer fordi følgen av partialsummer er voksende (hvert ledd er $\geq 0$) og begrensa (av $\|x\|^2$), så den den monotone konvergenssats[4] sier at summen konvergerer. $\square$

**Korollar 3.2.** La $V$ være et indreproduktrom, og $(e_k)_k$ en ortonormal følge. Da vil, for hver $x \in V$,

$$\lim_{k \to \infty} \langle x, e_k \rangle = 0.$$

Dette følger av det at hvis en sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så vil $a_n \to 0$ når $n \to \infty$. Beviset for dette bruker det at følgen av partialrekker for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en Cauchyfølge.

# 4 Konvergensbeviset

**Teorem 4.1.** La $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ være stykkevis kontinuerlig[5]. La $x_0 \in [\pi, \pi]$, og anta videre at $|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$, for en $C$, altså at $f$ er Lipschitz "i $x_0$"[6]. Da vil fourierrekka til $f$ i $x_0$ konvergere mot $f(x_0)$.

*Bevis.* Uten tap av generalitet kan vi anta at $x_0 = 0$ og at $f(x_0) = 0$, for gitt en tilfeldig $f$ kan vi forskyve funksjonen for å få det. Altså, gitt $f$ vil $g(x) = f(x - x_0)$ tilfredsstille $g(0) = 0$. Vi gjør dette for at formlene som kommer skal være mindre grisete.

Merk at funksjonen

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \tag{2}$$

er begrensa nær null ved Lipschitz-antagelsen, og er kontinuerlig i alle andre punkter enn muligens i null. Dermed er funksjonen

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}$$

også begrensa ved null, siden nevneren er "$O(|x|)$", altså

$$e^{ix} - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$$

så nær null vil $g$ oppføre seg som (2). (Altså, når $x$ er nær nok null vil det inni parantesen være ikkenull, så (2) er begrensa nær null). Dermed er $g$ begrensa.

[4] På engelsk, "Monotone convergence theorem".

[5] Dette betyr kontinuerlig i hele $[-\pi, \pi]$, utenom muligens i endelig mange punkter. Merk at stykkevis kontinuerlige funksjoner er integrerbare.

[6] Merk at $f$ vil være dette hvis $f$ er deriverbar i $x_0$.

Siden $g$ er kontinuerlig i alle punkter $f$ er (utenom muligens i null), så er $g$ stykkevis kontinuerlig og begrensa, så funksjonen er dermed integrerbar.

Siden funksjonen $g^2$ er kontinuerlig i de punktene $g$ er, så den er også stykkevis kontinuerlig. Funksjonen er også begrensa, som den arver fra $g$. Dermed fins integralet $\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx$, så vi kan bruke Bessels ulikhet, og konkludere[7] at

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2 \leq \|g\|^2 < \infty. \tag{3}$$

Samtidig, siden

$$f(x) = (e^{ix} - 1)g(x)$$

må fourierkoeffisientene tilfredsstille

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n-1) + \hat{g}(n).$$

så fourierrekken blir teleskoperende. Partialsummen i $x_0 = 0$ blir

$$\sum_{k=-m}^{n} \hat{f}(k) \underbrace{e^{-ikx_0}}_{=1} = \sum_{k=-m}^{n} \hat{f}(k) = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(-m-1)$$

Men Bessels ulikhet gir, ved korollar 3.2, at $\hat{g}(n) \to 0$ når $n \to \pm\infty$, så

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx_0} = \lim_{n\to\infty} \hat{g}(n-1) - \hat{g}(-n-1) = 0 = f(x_0)$$

så fourierrekka konvergerer. □

**Kommentar.** Det er mer krutt i argumentet enn vi har vist her. Beviset gir også at de énsidige fourierrekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx_0} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{-\infty} \hat{f}(n) e^{inx_0}$$

konvergerer, og den kan håndtere diskontinuiteter. Se Chernoffs artikkel [2] for mer.

# 5 Referanser


[1] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. 3. utg. Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-11079-0. URL: `https://linear.axler.net` (Sitert på s. 3).

[2] Paul R. Chernoff. «Pointwise Convergence of Fourier Series». I: *American Mathematical Monthly* 87 (1980), s. 399–400. DOI: `https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995049` (Sitert på s. 1, 6).

[3] Christopher Heil. *Metrics, Norms, Inner Products, and Operator Theory*. Birkhäuser, 2018. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-65322-8` (Sitert på s. 1, 2).

[4] Steven G. Krantz. *Real Analysis and Foundations*. CRC Press, 2017. ISBN: 9781498777681 (Sitert på s. 1).


[7] Det er en liten teknikalitet i hvordan vi skal egentlig definere summering over $n \in \mathbb{Z}$, men siden alle leddene er $\geq 0$ er summen absolutt konvergent, så rekkefølgen til summeringen spiller ingen rolle i dette tilfellet.